Темы расчетно-графических работ

Расчетно-графическая работа по основам теории колебаний.

Механическая система с одной степенью свободы совершает малые колебания вблизи устойчивого положения равновесия.

Учитывая силу сопротивления $\overline{F}_{\text{с}} = -b\overline{v}_1$ и возмущающую силу $F_{\text{в}} = H \sin pt$, действующие на тело 1, пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, определить амплитуду В вынужденных колебаний механической системы как функцию частоты возмущающей силы, а также найти ее максимальное значение $B_{\max}$ и значение этой амплитуды при резонансе $B_{\text{рез}}$. За обобщенную координату принять у – смещение тела 1 от положения статического равновесия.

Схемы систем показаны на рис. 1, а необходимые данные приведены в табл. 1 и 2.

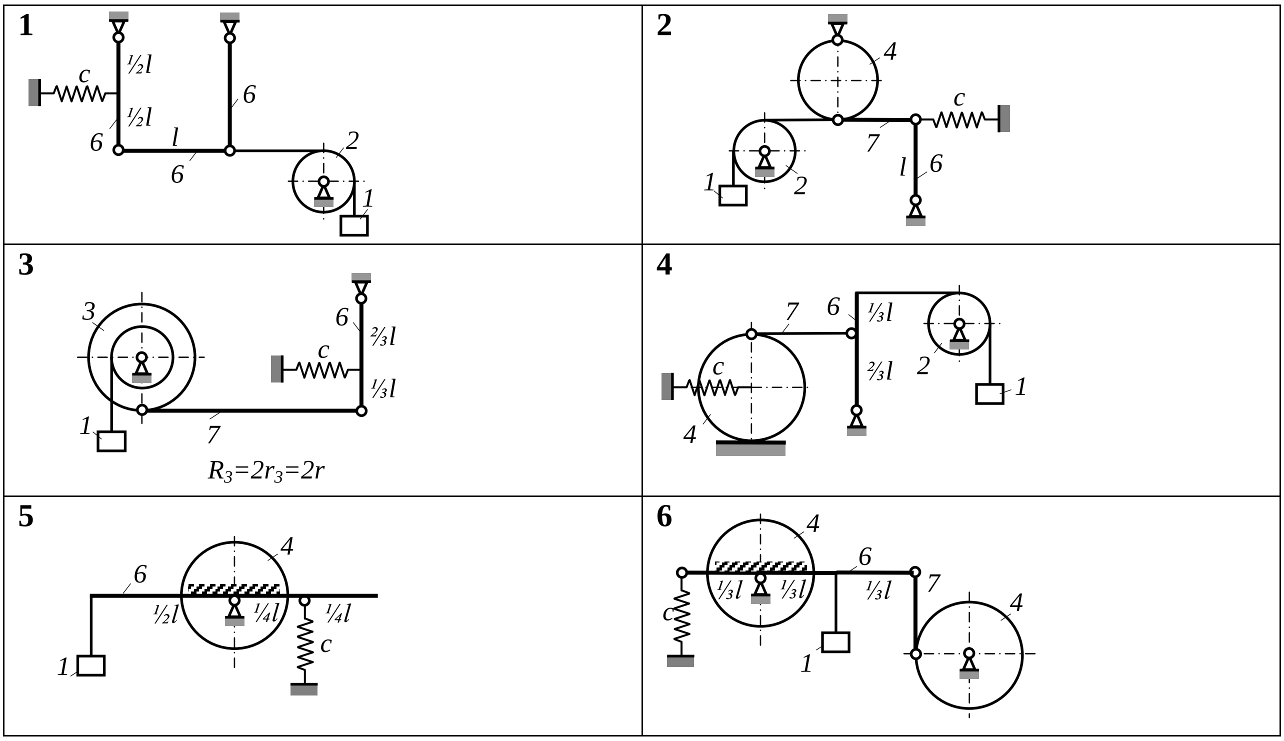
В задании приняты следующие обозначения: 1 – груз массой m_1; 2 – блок массой m_2 и радиусом r_2 (однородный сплошной диск); 3 – блок массой m3 и радиусом инерции i_x; 4 – однородный сплошной диск массой m_4 и радиусом r_4; 5 – диск массой m_5 и радиусом инерции $i_x^{'}$; 6 – тонкий однородный стержень массой m_6 и длиной l; 7 – стержень, масса которого не учитывается; с – коэффициент жесткости пружины.

Системы тел показаны в положении покоя при статической деформации пружин (рис. 1).

В вариантах 5, 6, 14 и 23 стержень 6 жестко соединен с диском 4.

Пример выполнения задания. Дано: m_1 = 1 кг, m_2 = 2 кг, m_4 = 1 кг, m_6 = 3 кг, 1 = 0,6 м, с = 2000 Н/м, b = 200 Н·с/м, Н = 50 Н.

Определить амплитуду В вынужденных колебаний механической системы, а также найти ее максимальное значение $B_{\max}$ и значение этой амплитуды при резонансе $B_{\text{рез}}$.



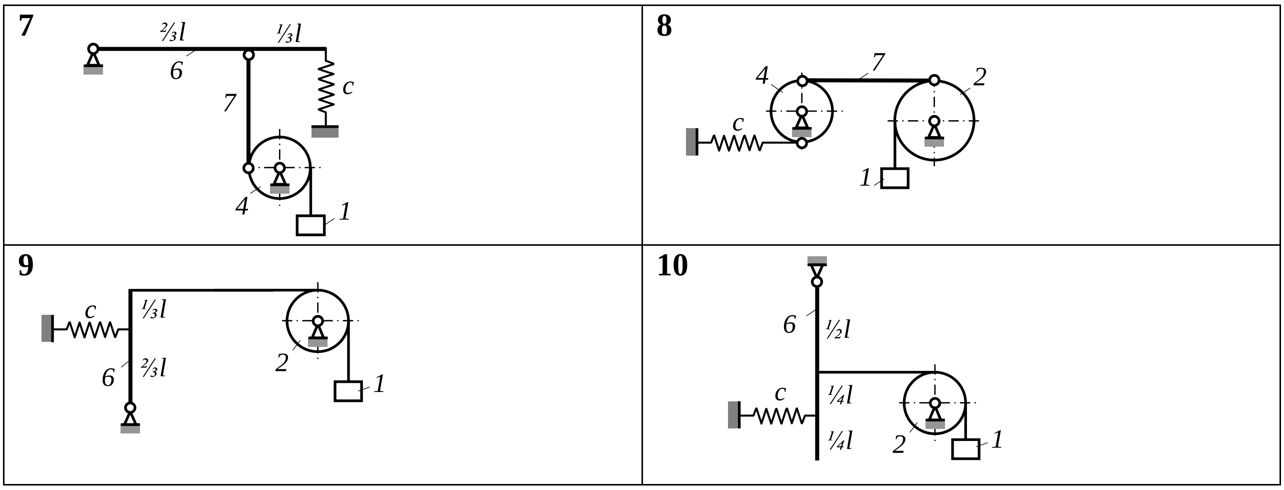


Рис. 1

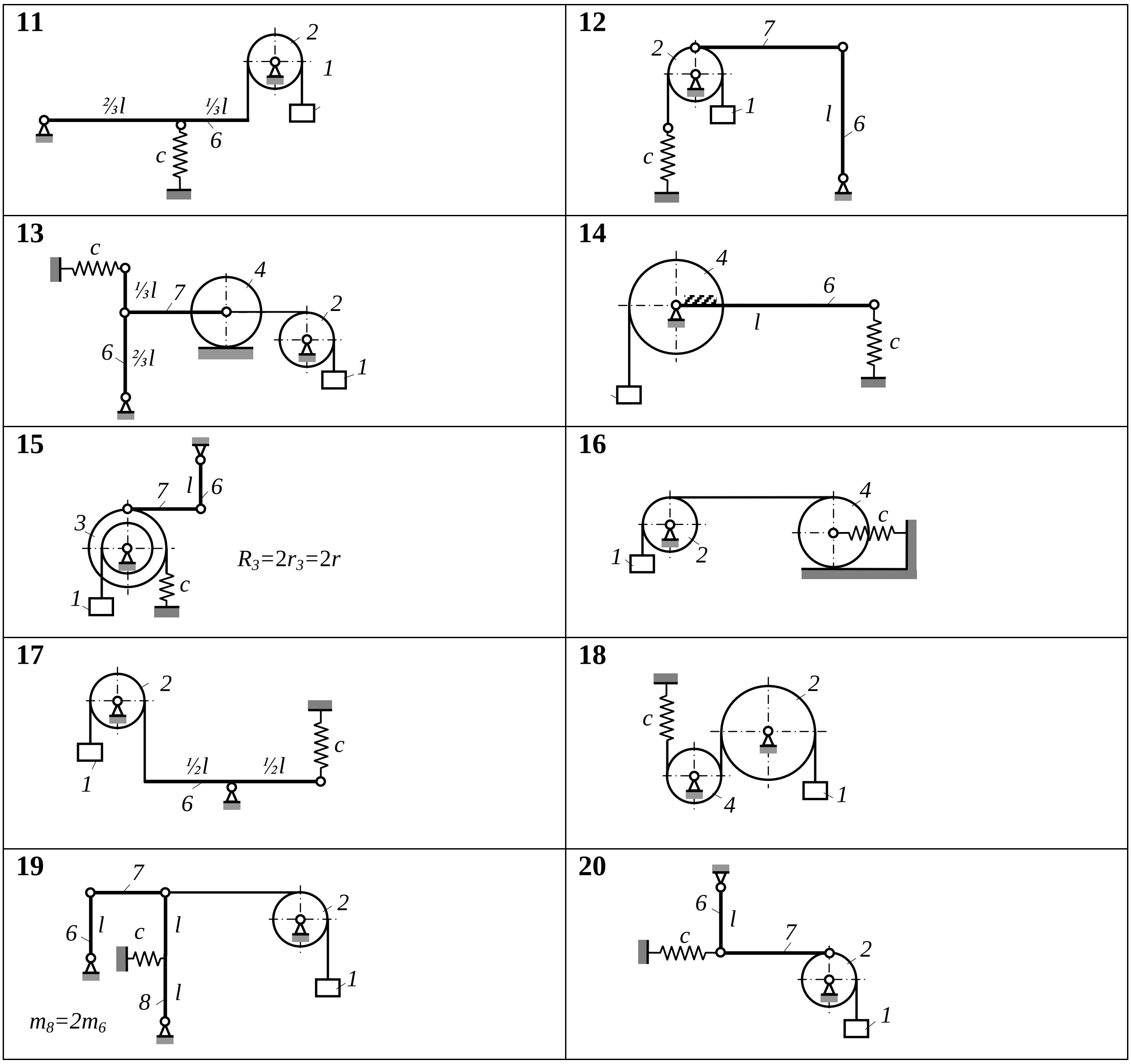


Рис. 1

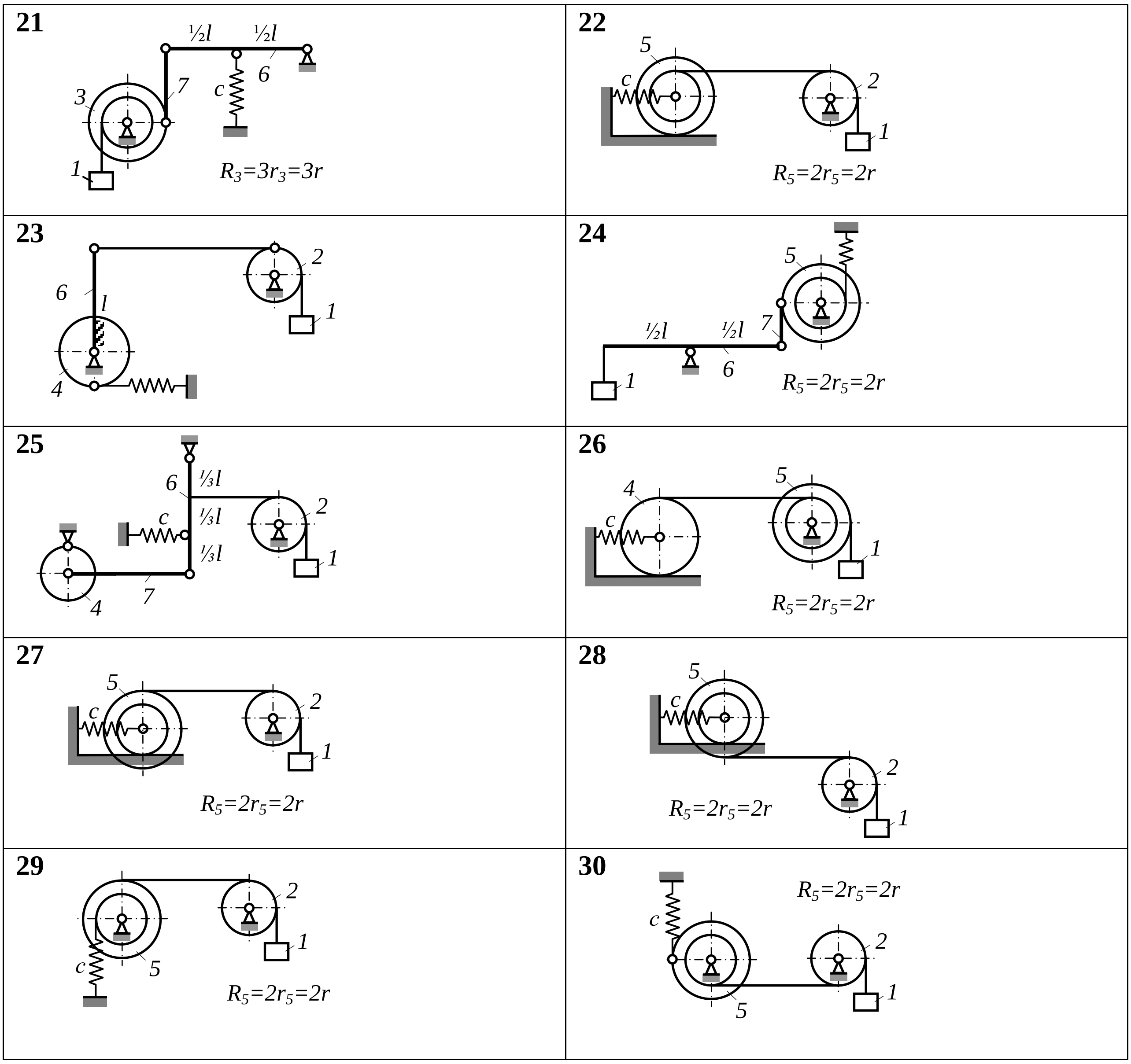


Рис. 1

Таблица 1

Вариант	l м	i_x м	i'_x м	r_4 м	m_1 кг	m_2 кг	m_3, m_4, m_5 кг	m_6 кг	C Н/см
1	0,5	–	–	–	1	2	–	3	40
2	0,5	–	–	0,2	1	2	2	3	40
3	0,5	1,5r	–	–	1	–	4	3	20
4	0,6	–	–	–	1	2	3	2	36
5	0,6	–	–	0,15	1	–	3	3	16
6	0,6	–	–	0,15	1	–	1	1	40
7	–	–	–	–	1	–	2	2	40
8	–	–	–	–	1	3	2	–	40
9	0,6	–	–	–	1	2	–	3	38
10	0,6	–	–	–	1	2	–	3	32
11	–	–	–	–	1	2	–	3	30
12	0,5	–	–	–	1	2	–	3	20

13	0,3	–	–	–	1	1	1	2	32
14	0,4	–	–	0,1	1	–	2	3	20
15	0,4	1,7*r*	–	–	1	–	2	2	20
16	–	–	–	–	1	2	3	–	32
17	–	–	–	–	1	2	–	2	20
18	–	–	–	–	1	2	1	–	40
19	0,2	–	–	–	1	1	–	1	32
20	0,5	–	–	–	1	2	–	3	20
21	–	2*r*	–	–	1	–	2	3	32
22	–	–	1,4*r*	–	1	2	4	–	40
23	0,4	–	–	0,2	1	2	2	3	40
24	–	–	1,7*r*	–	1	–	3	2	40
25	0,3	–	–	0,1	1	2	2	1	40
26	–	1,4*r*	–	–	1	–	2	–	40
27	–	–	1,5*r*	–	1	2	3	–	40
28	–	–	1,7*r*	–	1	2	3	–	40
29	–	–	1,3*r*	–	1	2	3	–	40
30	–	–	1,4*r*	–	1	2	3	–	40

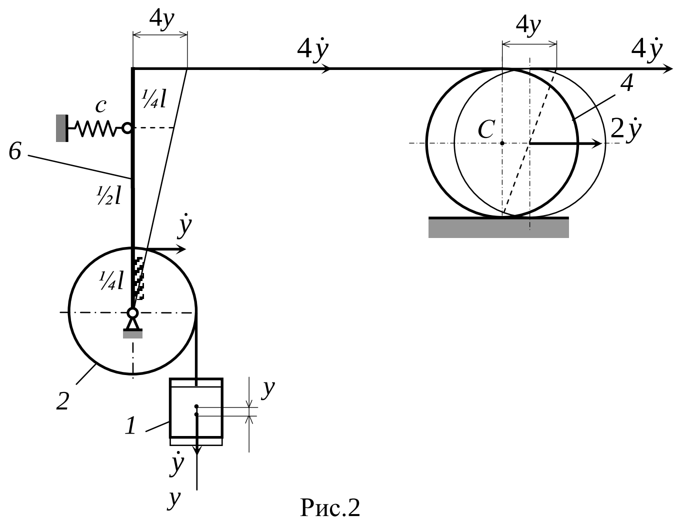


Рис.2

Решение. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение центра масс груза *1* из положения статического равновесия. Тогда уравнение Лагранжа 2 рода для механической системы, изображенной на рис. 2, можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q^{\text{п}}+Q^{\text{в}}+Q^{\text{с}}.$$

Кинетическую T и потенциальную U энергию системы вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно величин y и $\dot y$.

Кинетическая энергия *1* тела

$$T_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1\dot y^2.$$

Блок *2* – однородный сплошной диск радиуса $r_2=\frac{1}{4}l$, поэтому его кинетическая энергия определяется равенством

$$T_2=\frac{1}{2}I_{2x}\omega_2^2=\frac{1}{4}m_2r_2^2\left(\frac{\dot y}{r_2}\right)^2=\frac{1}{4}m_2\dot y^2.$$

Так как стержень *6* жестко соединен с блоком *2*, $\omega_2=\omega_6$,

$$T_6=\frac{1}{2}I_{6x}\omega_6^2=\frac{1}{6}m_6l^2\frac{\dot{y}^2}{\frac{1}{16}l^2}=\frac{8}{3}m_6\dot{y}^2.$$

Учитывая, что $I_{6x}=\frac{1}{3}m_6l^2$, $\omega_6=\omega_2=\frac{\dot{y}}{r_2}=\frac{4\dot{y}}{l}$, получим

$$T_6=\frac{8}{3}m_6\dot{y}^2.$$

Тело *4* – однородный сплошной диск, совершающий плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия равна

$$T_4=\frac{1}{2}m_4v_C^2+\frac{1}{2}I_{4x}\omega_4^2,$$

где $v_C=2\dot{y}$, $\omega_4=\frac{v_C}{r_4}=\frac{2\dot{y}}{r_4}$, $I_{4x}=\frac{1}{2}m_4r_4^2$. Подставляя эти выражения в T_4, получим

$$T_4=3m_4\dot{y}^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия рассматриваемой механической системы равна

$$T=T_1+T_2+T_4+T_6=\frac{1}{2}(m_1+\frac{1}{2}m_2+6m_4+\frac{16}{3}m_6)\dot{y}^2.$$

Из последнего равенства определяем коэффициент инерции механической системы

$$a=m_1+\frac{1}{2}m_2+6m_4+\frac{16}{3}m_6=24 \text{ кг}.$$

Обобщенная сила, соответствующая потенциальным силам, может быть вычислена по формуле

$$Q^{\Pi}=-\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial U_{\text{т}}}{\partial y}-\frac{\partial U_{\text{пр}}}{\partial y},$$

где $U_{\text{т}}$ – потенциальная энергия сил тяжести, а $U_{\text{пр}}$ – потенциальная энергия пружины. Если принять в равновесном положении системы $U_{\text{т}}=U_{\text{пр}}=0$, то в произвольный момент времени потенциальная энергия силы тяжести груза равна

$$U_{\text{т}_1}=-m_1gh_1=-m_1gy,$$

а потенциальная энергия силы тяжести стержня –

$$U_{\text{т}_6}=-m_6gh_6=-\frac{l}{2}m_6g(1-\cos\varphi_6),$$

где φ_6 – угол поворота стержня. При малых y угол φ_6 мал. Поэтому

$$1-\cos\varphi_6\approx\frac{1}{2}\varphi_6^2=\frac{1}{2}\frac{y^2}{r_2^2}=8\frac{y^2}{l^2}.$$

Таким образом,

$$U_{\text{т}}=-m_1gy-4m_6g\frac{y^2}{l}.$$

Потенциальная энергия пружины

$$U_{\text{пр}}=\frac{1}{2}c[(\lambda_{\text{ст}}+\lambda_{\text{кин}})^2-\lambda_{\text{ст}}{}^2)],$$

где $\lambda_{\text{ст}}$ – статическая деформация пружины в равновесном положении системы (т.е. при y = 0); $\lambda_{\text{кин}}$ – дополнительная деформация пружины при перемещении тела *1* на y. Анализируя рис. 19, нетрудно доказать, что $\lambda_{\text{кин}}=3y$.

Потенциальная энергия всей системы

$$U = U_{\text{т}} + U_{\text{пр}} = -m_1 g y - 4 m_6 g \frac{y^2}{l} + \frac{1}{2} c[(\lambda_{\text{ст}} + 3y)^2 - \lambda_{\text{ст}}{}^2)].$$

Статическую деформацию пружины определим из условия

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

Отсюда $\lambda_{\text{ст}} = \dfrac{m_1 g}{3c}$. Подставляя это значение в выражение для U, окончательно получим

$$U = \frac{1}{2} y^2 (9c - 8\frac{m_6 g}{l}).$$

Тогда

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -y\left(9c - 8\frac{m_6 g}{l}\right).$$

С другой стороны $Q^{\Pi} = -\tilde{c} y$. Приравнивая между собой правые части двух последних равенств, определяем коэффициент жесткости механической системы:

$$\tilde{c} = 9c - 8\frac{m_6 g}{l} = 17608 \text{ Н/м}.$$

При $\tilde{c} > 0$ положение равновесия механической системы устойчиво (в этом положении потенциальная энергия системы имеет минимум). Если $\tilde{c} < 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Обобщенная сила, соответствующая возмущающим силам

$$Q^{\text{в}} = \frac{\delta A^{\text{в}}}{\delta y} = \frac{H \sin pt \cdot \delta y}{\delta y} = H \sin pt.$$

Обобщенная сила, соответствующая силам сопротивления

$$Q^{\text{c}} = \frac{\delta A^{\text{c}}}{\delta y} = -\frac{b\dot{y} \cdot \delta y}{\delta y} = -b\dot{y}.$$

Подставляя выражения кинетической энергии и обобщенных сил в уравнение Лагранжа 2 рода, получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = h \sin pt, \text{ где}$$

$k = \sqrt{\dfrac{\tilde{c}}{a}} = 27{,}0863 \text{ c}^{-1}$ – собственная частота колебаний;

$n = \dfrac{b}{2a} = 4{,}1667 \text{ c}^{-1}$ – коэффициент затухания; $h = \dfrac{H}{a} = 2{,}0833 \text{ м/c}^2$ – относительная амплитуда возмущающей силы.

Частное решение полученного уравнения, которое описывает вынужденные колебания, имеет вид

$$y = B \sin(pt - \varepsilon),$$

где

$B = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$ – амплитуда; $\varepsilon = \operatorname{arctg} \dfrac{2np}{k^2 - p^2}$ – сдвиг по фазе вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы.

Так как параметры k и n найдены, величины B и ε являются функциями p – частоты возмущающей силы.

Максимальное значение амплитуды B достигается при значениях p, удовлетворяющих условиям

$$\frac{df}{dp} = 0, \frac{d^2 f}{dp^2} > 0,$$

где

$$f(p) = (k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 .$$

Определим критические точки функции $f(p)$:

$$f_p^{'} = -4p(k^2 - p^2) + 8n^2 p = 0 .$$

Отсюда $p_1 = 0,\ p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2} = 26{,}4376\ c^{-1}$ (значение p_2 имеет физический смысл при $k^2 - 2n^2 > 0$). Знаки второй производной:

$$f^{''}(p_1) = -4(k^2 - 2n^2) < 0,\ f^{''}(p_2) = 8(k^2 - 2n^2) > 0 .$$

Таким образом, функция $f(p)$ имеет максимальное значение при $p = p_1 = 0$ и минимальное значение при $p = p_2 = \ = \sqrt{k^2 - 2n^2}$. Тогда

$$B_{\max} = B(p_2) = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = 0{,}0093 \text{ м.}$$

При резонансе $p = k$, поэтому

$$B_{\text{рез}} = B(k) = \frac{h}{2np} = 0{,}0092 \text{ м.}$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что при малом сопротивлении $B_{\max} \approx B_{\text{рез}}$.

Распределение вариантов

Алексеев Вадим	1
Анисова Ксения	2
Анюрова Алина	3
Белов Евгений	4
Больнов Денис	5
Всеволодов Артур	6
Кабанов Александр	7
Калинина Кристина	8
Кошкин Владислав	9
Крыльцов Дмитрий	10
Луцевич Егор	11
Николаев Антон	12
Сабитов Альберт	13
Степанова Екатерина	14
Трофимов Владимир	15
Ясков Даниил	16