МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ

Методические указания и контрольные задания

Чебоксары 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ

Методические указания и контрольные задания

Чебоксары 2011

УДК 51(075.8)
ББК В1я73

Составители: В. Г. Агаков
А. Н. Быкова
И. И. Ильина
Т. В. Картузова

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ: метод. указания и контр. задания / сост. В. Г. Агаков, А. Н. Быкова, И. И. Ильина, Т. В. Картузова; Чуваш. ун-т. — Чебоксары, 2011. — 64 с.

Содержат программу изучаемого материала, методику решения типовых задач, варианты контрольных работ.

При составлении контрольных заданий были использованы задачи из методических указаний «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ», 1999 (сост. А. Н. Быкова, Н. В. Григорьева, Р. И. Медведева, Н. Д. Поляков, Л. Б. Шитова).

Для студентов-заочников I курса технических факультетов.

Отв. редактор профессор В. Г. Агаков

Утверждено Учебно-методическим советом университета

Предисловие

Методические указания предназначены для студентов-заочников технических факультетов. Приведены основные теоретические сведения по вопросам, предусмотренным программой для технических специальностей по указанным разделам математики. Теоретические положения проиллюстрированы примерами. К каждому разделу приведены контрольные задания.

Предложенные контрольные работы могут быть использованы для проверки усвоения материала студентами дневного отделения.

1. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

Приступая к выполнению контрольной работы 1, студент должен изучить следующие вопросы:

1. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейно зависимые, независимые системы векторов. Базис. Координаты вектора в базисе.

[2. Гл. 1, §1, 2, 3; 3. §5; 5. Гл. 2, §1, 2]

2. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.

[2. Гл. 1, §4; 3. §6; 5. Гл. 2, §3]

3. Определители, их свойства.

[2. Гл. 5, §4; 3. §1, 2; 5. Гл. 1, §5]

4. Векторное и смешанное произведения. Свойства. Геометрический смысл.

[2. Гл. 1, §4; 3. §12, 13; 5. Гл. 2, §3].

5. Прямая на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

[2. Гл. 2, §2; 3. §8; 5. Гл. 1, §2].

6. Уравнения плоскости в пространстве. Расстояние от точки до плоскости.

[2. Гл. 2, §2, 3; 3. §9; 5. Гл. 3, §1].

7. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.

[2. Гл. 2, §2, 3; 3. §10; 5. Гл. 3, §1]

8. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

[2. Гл. 3, §1, 2; 3. §24; 5. Гл. 1, §3, 4]

9. Уравнения кривой в полярной системе координат.

[2. Гл. 1, §2]

10. Поверхности второго порядка.

[2. Гл. 3, §4; 3. §25; 5. Гл. 3, §2]

Краткие теоретические сведения

Вектор — направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ или $\mathbf{a}$, где A — начало вектора, B — его конец. Расстояние от начала до конца вектора называется его *длиной*. Длина вектора обозначается $|\mathbf{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*.

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$ называется вектор $\alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{a}_n$, где α_1, ..., α_n — действительные числа. Система векторов $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$ называется *линейно независимой*, если линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$ есть нулевой вектор только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. В противном случае система векторов $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$ называется *линейно зависимой*.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых (нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору). Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Линейно независимая система векторов $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ из множества V называется *базисом* V, если любой вектор $\mathbf{x} \in V$ представим в виде

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n,$$

где числа x_1, ..., x_n называются *координатами вектора* $\mathbf{x}$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$. Обозначение: $\mathbf{x}(x_1, ..., x_n)$. Примером базиса в пространстве является тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов (ортов) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ координатных осей декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению их длин и косинуса угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

Если заданы декартовы координаты векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Условие перпендикулярности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеет вид

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{или} \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Так как $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, то длина вектора $\mathbf{a}$ вычисляется по формуле

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Векторным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется третий вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, определяемый следующими условиями:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$;

2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

3) векторы ориентированы так же, как орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Из условия 1 следует, что длина вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, приведенных к одному началу: $S_{\text{пар}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое следующим равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Если известны декартовы координаты векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$, то справедлива формула

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Условие коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеет вид

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Модуль смешанного произведения векторов **a**, **b**, **c** равен объему V_1 параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки: $V_1 = |\mathbf{abc}|$. Объем V_2 треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V_2 = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}|\mathbf{abc}|$.

Если известны декартовы координаты векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{c}(x_3, y_3, z_3)$, то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности векторов **a**, **b**, **c** имеет вид

$$\mathbf{abc} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Всякое уравнение первой степени относительно x и y

$$Ax + By + C = 0,$$

где A и B одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Если $B \neq 0$, то уравнение можно привести к виду

$$y = kx + b,$$

где $b = -C/B$, *угловой коэффициент* $k = -A/B$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \text{или} \quad y - y_0 = k(x - x_0).$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Если $x_2 = x_1$, то уравнение $x = x_1$; если $y_2 = y_1$, то уравнение $y = y_1$.

Острый угол α между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|,$$

откуда $k_1 = k_2$ — *условие параллельности*; $k_1 = -1/k_2$ — *условие перпендикулярности* прямых.

Расстоянием от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C = 0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Она равна

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Всякое уравнение первой степени относительно x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где A, B, C одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением плоскости*. Вектор $\mathbf{N}(A, B, C)$, перпендикулярный к плоскости (1), называется *нормальным вектором* этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(A, B, C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение *плоскости, проходящей через три заданные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Острый угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнение вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{2}$$

называется *каноническим уравнением прямой в пространстве*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\mathbf{q}(m, n, p)$ (m, n, p одновременно не равны нулю). Вектор $\mathbf{q}(m, n, p)$ называется *направляющим вектором* прямой. Уравнение (2) можно записать в виде *параметрических уравнений*:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt,$$

где $t \in (-\infty; +\infty)$ — параметр.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Условие компланарности двух прямых (необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

нормальные векторы $\mathbf{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ которых неколлинеарны. Уравнения (3) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*. Чтобы перейти к каноническим уравнениям (2) этой прямой, полагают $\mathbf{q} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ и находят (x_0, y_0, z_0) — частное решение системы (3).

Углом α *между прямой* (2) *и плоскостью* $Ax + By + Cz + D = 0$ называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Так как этот угол всегда острый, то

$$\sin\alpha = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Всякое уравнение второй степени относительно x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4}$$

где A, B, C одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением кривой второго порядка*. Уравнение (4) определяет на плоскости либо эллипс, либо гиперболу, либо параболу, либо пару прямых.

В *полярной системе координат* положение точки плоскости определяется ее расстоянием $|\overrightarrow{OM}| = \rho$ от полюса и углом θ, который радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с полярной осью Ox. Если начало декартовой прямоугольной системы совместить с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то *полярные координаты* ρ и θ точки M будут связаны с ее декартовыми координатами x и y по формулам

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\theta = y/x$.

Всякое уравнение второй степени относительно x, y, z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Ky + 2Lz + M = 0, \qquad (5)$$

где A, B, C, D, E, F одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением поверхности второго порядка*. Уравнение (5) определяет в пространстве либо эллипсоид, либо гиперболоид, либо конус, либо параболоид, либо цилиндр, либо пару плоскостей.

Решение типовых задач

Задача 1. Показать, что векторы $\mathbf{a}(1;2;3)$, $\mathbf{b}(-1;1;0)$, $\mathbf{c}(2;1;5)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\mathbf{d}(-4;7;1)$ в этом базисе.

Решение. Обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ базис, в котором заданы координаты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Нужно показать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно независимы, т. е. что их линейная комбинация обращается в ноль только при нулевых коэффициентах. Составим линейную комбинацию

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = 0; \qquad (6)$$

в координатах

$$\lambda_1(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3) + \lambda_2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_3(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3) = 0;$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)\mathbf{e}_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{e}_2 + (3\lambda_1 + 5\lambda_3)\mathbf{e}_3 = 0.$$

Но векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ линейно независимы, т. к. образуют базис, поэтому должна выполняться следующая однородная система уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_3 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Вычислим определитель системы: $\det A = 6 \neq 0$. Это означает, что система (7) имеет только нулевое решение. Следовательно, равенство (6) выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, поэтому векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно независимы, т. е. образуют базис.

Найдем координаты α, β, γ вектора $\mathbf{d}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, представив

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c};$$

в координатах

$$-4\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 =$$

$$= \alpha(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3) + \beta(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \gamma(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3) =$$

$$= (\alpha - \beta + 2\gamma)\mathbf{e}_1 + (2\alpha + \beta + \gamma)\mathbf{e}_2 + (3\alpha + 5\gamma)\mathbf{e}_3,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = -4, \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 7, \\ 3\alpha + 5\gamma = 1, \end{cases}$$

решение которой $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = -1$ есть координаты вектора $\mathbf{d}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, т. е. $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

Ответ: $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

Задача 2. Даны вершина $C(-1; 3)$ прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника и уравнение его гипотенузы $3x - 4y - 12 = 0$. Составить уравнения катетов.

Решение. Выразим y через x в уравнении гипотенузы, найдем угловой коэффициент: $y = \frac{3}{4}x - 3$; $k_1 = 3/4$. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника наклонены к гипотенузе под углом $45°$. Тогда из формулы

$$\operatorname{tg} 45° = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|,$$

подставляя $k_1 = 3/4$, получим

$$1 = \left|\frac{k_2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}k_2}\right|, \quad 1 = \left|\frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2}\right|, \quad \pm 1 = \frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2}.$$

Решая это уравнение, получим для двух случаев

$$\frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2} = 1, \quad 4k_2 - 3 = 4 + 3k_2, \quad k_2 = 7;$$

$$\frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2} = -1, \quad 4k_2 - 3 = -4 - 3k_2, \quad k_2 = -\frac{1}{7}.$$

Зная уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ и учитывая, что катеты проходят через точку $C(-1;3)$, получим их уравнения:

$$y - 3 = 7(x+1), \quad 7x - y + 10 = 0;$$

$$y - 3 = -\frac{1}{7}(x+1), \quad x + 7y - 20 = 0.$$

Ответ: $7x - y + 10 = 0$, $x + 7y - 20 = 0$.

Задача 3. Найти точку B, симметричную точке $A(5;2;-1)$ относительно плоскости $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Решение. Вектор $\mathbf{N}(2;-1;3)$, перпендикулярный к данной плоскости, будет направляющим вектором перпендикуляра AB. Поэтому каноническое уравнение этого перпендикуляра имеет вид

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Параметрические уравнения прямой AB

$$x = 5 + 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = -1 + 3t.$$

Подставляя значения x, y, z из этих уравнений в данное уравнение плоскости, получим

$$2(5+2t) - (2-t) + 3(-1+3t) + 23 = 0.$$

Из этого уравнения найдем $t = -2$ — значение параметра, отвечающее точке $O(x_0, y_0, z_0)$ как точке пересечения прямой AB с данной плоскостью. Значит,

$$x_0 = 5+2(-2) = 1, \quad y_0 = 2-(-2) = 4, \quad z_0 = -1+3(-2) = -7,$$

т. е. $O(1;4;-7)$. Так как точка O — середина отрезка AB, то

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_0 = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_0 = \frac{z_A + z_B}{2},$$

откуда

$$x_B = 2x_0 - x_A, \quad y_B = 2y_0 - y_A, \quad z_B = 2z_0 - z_A.$$

Итак,

$$x_B = 2 \cdot 1 - 5 = -3, \quad y_B = 2 \cdot 4 - 2 = 6,$$

$$z_B = 2 \cdot (-7) - (-1) = -13,$$

т. е. $B(-3;6;-13)$.

Ответ: $B(-3;6;-13)$.

Задача 4. Найти точку пересечения поверхности и прямой, заданных уравнениями

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}.$$

Решение. Уравнение прямой запишем в параметрической форме:

$$x = 3 + 3t, \quad y = 4 - 6t, \quad z = -2 + 4t.$$

Подставим эти выражения в уравнение поверхности, чтобы найти параметр t:

$$\frac{(3+3t)^2}{81} + \frac{(4-6t)^2}{36} + \frac{(-2+4t)^2}{9} = 1.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $t = 0$ и $t = 1$. Подставив эти значения в параметрическое уравнение прямой, получим координаты точки пересечения прямой и поверхности:

$$x_1 = 3 + 3 \cdot 0 = 3, \quad y_1 = 4 - 6 \cdot 0 = 4, \quad z_1 = -2 + 4 \cdot 0 = -2;$$

$$x_2 = 3 + 3 \cdot 1 = 6, \quad y_2 = 4 - 6 \cdot 1 = -2, \quad z_2 = -2 + 4 \cdot 1.$$

Следовательно, $M_1(3; 4; -2)$ и $M_2(6; -2; 2)$.

Ответ: $M_1(3; 4; -2)$, $M_2(6; -2; 2)$.

Контрольная работа 1

Задача 1. Даны четыре вектора $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(a_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{d}(d_1, d_2, d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе.

1. $\mathbf{a}(4; 5; 2)$, $\mathbf{b}(3; 0; 1)$, $\mathbf{c}(-1; 4; 2)$, $\mathbf{d}(5; 7; 8)$.
2. $\mathbf{a}(3; -5; 2)$, $\mathbf{b}(4; 5; 1)$, $\mathbf{c}(-3; 0; -4)$, $\mathbf{d}(-4; 5; -16)$.
3. $\mathbf{a}(-2; 3; 5)$, $\mathbf{b}(1; -3; 4)$, $\mathbf{c}(7; 8; -1)$, $\mathbf{d}(1; 20; 1)$.
4. $\mathbf{a}(1; 3; 5)$, $\mathbf{b}(0; 2; 0)$, $\mathbf{c}(5; 7; 9)$, $\mathbf{d}(0; 4; 16)$.
5. $\mathbf{a}(2; 4; -6)$, $\mathbf{b}(1; 3; 5)$, $\mathbf{c}(0; -3; 7)$, $\mathbf{d}(3; 2; 52)$.
6. $\mathbf{a}(4; 3; -1)$, $\mathbf{b}(5; 0; 4)$, $\mathbf{c}(2; 1; 2)$, $\mathbf{d}(0; 12; -6)$.
7. $\mathbf{a}(3; 4; -3)$, $\mathbf{b}(-5; 5; 0)$, $\mathbf{c}(2; 1; -4)$, $\mathbf{d}(8; -16; 17)$.
8. $\mathbf{a}(-2; 1; 7)$, $\mathbf{b}(3; -3; 8)$, $\mathbf{c}(5; 4; -1)$, $\mathbf{d}(18; 25; 1)$.
9. $\mathbf{a}(1; 0; 5)$, $\mathbf{b}(3; 2; 7)$, $\mathbf{c}(5; 0; 9)$, $\mathbf{d}(-4; 2; -12)$.
10. $\mathbf{a}(2; 1; 0)$, $\mathbf{b}(4; 3; -3)$, $\mathbf{c}(-6; 5; 7)$, $\mathbf{d}(14; -5; -26)$.

11. $\mathbf{a}(1;2;3)$, $\mathbf{b}(-1;3;2)$, $\mathbf{c}(7;-3;5)$, $\mathbf{d}(6;10;17)$.
12. $\mathbf{a}(4;7;8)$, $\mathbf{b}(9;1;3)$, $\mathbf{c}(2;-4;1)$, $\mathbf{d}(1;-13;-13)$.
13. $\mathbf{a}(8;2;3)$, $\mathbf{b}(4;6;10)$, $\mathbf{c}(3;-2;1)$, $\mathbf{d}(7;4;11)$.
14. $\mathbf{a}(10;3;1)$, $\mathbf{b}(1;4;2)$, $\mathbf{c}(3;9;2)$, $\mathbf{d}(19;30;7)$.
15. $\mathbf{a}(2;4;1)$, $\mathbf{b}(1;3;6)$, $\mathbf{c}(5;3;1)$, $\mathbf{d}(24;20;6)$.
16. $\mathbf{a}(1;7;3)$, $\mathbf{b}(3;4;2)$, $\mathbf{c}(4;8;5)$, $\mathbf{d}(7;32;14)$.
17. $\mathbf{a}(1;-2;3)$, $\mathbf{b}(4;7;2)$, $\mathbf{c}(6;4;2)$, $\mathbf{d}(14;18;6)$.
18. $\mathbf{a}(1;4;3)$, $\mathbf{b}(6;8;5)$, $\mathbf{c}(3;1;4)$, $\mathbf{d}(21;18;33)$.
19. $\mathbf{a}(2;7;3)$, $\mathbf{b}(3;1;8)$, $\mathbf{c}(2;-7;4)$, $\mathbf{d}(16;14;27)$.
20. $\mathbf{a}(7;2;1)$, $\mathbf{b}(4;3;5)$, $\mathbf{c}(3;4;-2)$, $\mathbf{d}(14;9;4)$.
21. $\mathbf{a}(1;2;3)$, $\mathbf{b}(-2;3;-2)$, $\mathbf{c}(3;-4;-5)$, $\mathbf{d}(6;20;6)$.
22. $\mathbf{a}(-2;1;2)$, $\mathbf{b}(4;0;0)$, $\mathbf{c}(3;2;7)$, $\mathbf{d}(-3;3;9)$.
23. $\mathbf{a}(1;5;3)$, $\mathbf{b}(2;1;-1)$, $\mathbf{c}(4;2;1)$, $\mathbf{d}(31;29;10)$.
24. $\mathbf{a}(3;2;7)$, $\mathbf{b}(1;3;2)$, $\mathbf{c}(-2;1;2)$, $\mathbf{d}(8;3;12)$.
25. $\mathbf{a}(3;1;-2)$, $\mathbf{b}(1;-2;1)$, $\mathbf{c}(-2;1;0)$, $\mathbf{d}(-11;7;5)$.

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Пользуясь методами векторной алгебры, найти: 1) площадь грани $A_1A_2A_3$; 2) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$; 3) длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

1. $A_1(4;0;0)$, $A_2(-2;1;2)$, $A_3(1;3;2)$, $A_4(3;2;7)$.
2. $A_1(-2;1;2)$, $A_2(4;0;0)$, $A_3(3;2;7)$, $A_4(1;3;2)$.
3. $A_1(1;3;2)$, $A_2(3;2;7)$, $A_3(4;0;0)$, $A_4(-2;1;2)$.
4. $A_1(3;2;7)$, $A_2(1;3;2)$, $A_3(-2;1;2)$, $A_4(4;0;0)$.
5. $A_1(3;1;-2)$, $A_2(1;-2;1)$, $A_3(-2;1;0)$, $A_4(2;2;5)$.
6. $A_1(1;-2;1)$, $A_2(3;-2;1)$, $A_3(-2;1;0)$, $A_4(2;2;5)$.
7. $A_1(-2;1;0)$, $A_2(2;2;5)$, $A_3(3;1;2)$, $A_4(1;-2;1)$.
8. $A_1(2;2;5)$, $A_2(-2;1;0)$, $A_3(1;-2;1)$, $A_4(3;1;2)$.
9. $A_1(1;-1;6)$, $A_2(4;5;-2)$, $A_3(-1;3;0)$, $A_4(6;1;5)$.
10. $A_1(6;1;5)$, $A_2(-1;3;0)$, $A_3(4;5;-2)$, $A_4(1;-1;6)$.
11. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.
12. $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;9)$.
13. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.

14. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.

15. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.

16. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.

17. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.

18. $A_1(7;2;2)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(5;3;1)$, $A_4(2;3;7)$.

19. $A_1(8;6;4)$, $A_2(10;5;5)$, $A_3(5;6;8)$, $A_4(8;10;7)$.

20. $A_1(7;7;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.

21. $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$.

22. $A_1(3;3;9)$, $A_2(6;9;0)$, $A_3(1;7;3)$, $A_4(8;5;8)$.

23. $A_1(3;5;4)$, $A_2(5;8;5)$, $A_3(1;8;7)$, $A_4(6;5;9)$.

24. $A_1(2;3;1)$, $A_2(7;6;2)$, $A_3(4;3;2)$, $A_4(3;6;7)$.

25. $A_1(9;5;5)$, $A_2(-3;5;2)$, $A_3(5;6;6)$, $A_4(6;9;5)$.

Задача 3

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

2. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудаленную от двух данных точек $A(1;1)$ и $B(3;0)$.

3. Найти координаты точки, симметричной точке $A(5;2)$ относительно прямой $4x+2y+1=0$.

4. Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Вычислить его площадь S.

5. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2;1)$ параллельно и перпендикулярно к данной прямой.

6. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

7. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $2x-y+4=0$, $2x-y+10=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+y+2=0$.

8. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x+y-15=0$. Найти вершины прямоугольника.

9. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

10. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

11. Дан треугольник с вершинами $A(4;6)$, $B(-3;0)$, $C(2;-3)$. Найти уравнение высоты CE и угол A треугольника.

12. Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(10;13)$, $C(13;6)$. Составить уравнение биссектрисы угла A.

13. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;3)$ и $C(6;2)$. Составить уравнения его сторон.

14. Даны уравнения высот треугольника $x+y=4$, $y=2x$ и одна из его вершин $A(0;2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

15. Даны вершины треугольника $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$, $C(2;1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.

16. Даны вершины треугольника $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$ и $M_3(3;2)$. Составить уравнения его высот.

17. Две стороны треугольника заданы уравнениями $5x-2y-8=0$, $3x-2y-8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение третьей стороны.

18. Даны уравнение одной из сторон угла $4x-3y+9=0$ и уравнение его биссектрисы $x-7y+21=0$. Написать уравнение другой стороны угла.

19. Даны уравнения двух сторон квадрата $4x-3y+3=0$, $4x-3y-17=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого квадрата.

20. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2;3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5;-1)$ и $B(3;7)$.

21. На прямой $2x+3y-18=0$ найти точку, которая отстоит от оси Oy в три раза дальше, чем от оси Ox.

22. Стороны треугольника даны уравнениями $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$ и $x+5y-7=0$. Определить точку пересечения его высот.

23. Две стороны, исходящие из одной вершины параллелограмма, заданы уравнениями $5x-3y+28=0$, $x-3y-4=0$; координаты противоположной вершины параллелограмма $(10;6)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

24. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(-1;1)$, $C(5;3)$. Составить уравнения сторон и диагоналей этого квадрата.

25. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если уравнение его гипотенузы $x-2y-3=0$, а вершиной прямого угла служит точка $C(1;6)$.

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1–15) или плоскости (для вариантов 16–25).

1. $M(0;-3;2)$, $\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

2. $M(2;-1;1)$, $\quad \dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{-0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}$.

3. $M(1;1;1)$, $\quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

4. $M(1;2;3)$, $\quad \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$.

5. $M(1;0;-1)$, $\quad \dfrac{x-3{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0}$.

6. $M(2;1;0)$, $\quad \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z+0{,}5}{1}$.

7. $M(-2;-3;0)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{0}=\dfrac{z-0{,}5}{1}$.

8. $M(-1;0;1)$, $\quad \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-2}{1}$.

9. $M(0;2;1)$, $\quad \dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

10. $M(3;-3;-1)$, $\quad \dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3{,}5}{4}=\dfrac{z+0{,}5}{0}$.

11. $M(3;3;3)$, $\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-3}{1}$.

12. $M(-1;2;0)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\dfrac{z-2}{2}$.

13. $M(2;-2;-3)$, $\quad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0{,}5}{0}=\dfrac{z+1{,}5}{0}$.

14. $M(-1;0;1)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}$.

15. $M(0;-3;-2)$, $\quad \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$.

16. $M(1;0;1)$, $\quad 4x+6y+4z-25=0$.

17. $M(-1;0;-1)$, $\quad 2x+6y-2z+11=0$.

18. $M(0;2;1)$, $\quad 2x+4y-3=0$.

19. $M(2;1;0)$, $\quad y+z+2=0$.

20. $M(-1;2;0)$, $\quad 4x-5y-z-7=0$.

21. $M(2;-1;1)$, $\quad x-y+2z-2=0$.

22. $M(1;1;1)$, $\quad x+4y+3z+5=0$.

23. $M(1;2;3)$, $\quad 2x+10y+10z-1=0$.

24. $M(0;-3;-2)$, $\quad 2x+10y+10z-1=0$.

25. $M(1;0;-1)$, $\quad 2y+4z-1=0$.

Задача 5. Найти точки пересечения поверхности и прямой.

1. $9-z^2=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$, $\quad \begin{cases} 2x+y-10=0, \\ 2x+3y+3z-12=0. \end{cases}$

2. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$, $\quad \begin{cases} 5x+4y-2z-4=0, \\ 4x+4y-z-2=0. \end{cases}$

3. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=z$, $\quad \begin{cases} 2x+4y+z-7=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$

4. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1$, $\quad \begin{cases} 4x+2y+z-2=0, \\ 2x+2y-z+2=0. \end{cases}$

5. $\dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=-1$, $\quad \begin{cases} 2x-5y+z-7=0, \\ x-y-2=0. \end{cases}$

6. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-z^2=1$, $\quad \begin{cases} y+3=0, \\ x+y-4z+3=0. \end{cases}$

7. $9 - z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, $\begin{cases} 2x - y - 3z - 8 = 0, \\ 4x + 4y + 3z - 22 = 0. \end{cases}$

8. $4z = x^2 - 4y^2$, $\begin{cases} 2y + z - 5 = 0, \\ x + z - 7 = 0. \end{cases}$

9. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$, $\begin{cases} 2x + 2y - z - 5 = 0, \\ 4x + 7y + z - 13 = 0. \end{cases}$

10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $\begin{cases} x - z - 2 = 0, \\ 7x + 8y - z - 2 = 0. \end{cases}$

11. $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$, $\begin{cases} 3y - z + 3 = 0, \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$

12. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$, $\begin{cases} x - 2y + 4z - 8 = 0, \\ x + z - 2 = 0. \end{cases}$

13. $9 - z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, $\begin{cases} 6x + 5y + 3z - 32 = 0, \\ 2y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

14. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$, $\begin{cases} 4x + 3y - 3z - 3 = 0, \\ 2x - 3y - 6z = 0. \end{cases}$

15. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$, $\begin{cases} 3x + 2y - 12z + 6 = 0, \\ x - 4z = 0. \end{cases}$

16. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 9x + 8y - 3z - 6 = 0. \end{cases}$

17. $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$, $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - 5y + z - 7 = 0. \end{cases}$

18. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$, $\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 2x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

19. $9 - z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, $\begin{cases} 4x + 4y + 3z - 22 = 0, \\ 2x + y - 10 = 0. \end{cases}$

20. $4z = x^2 - 4y^2$, $\begin{cases} 2x - 2y + z - 9 = 0, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

21. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$, $\begin{cases} 2x - 3y - 6z = 0, \\ 2x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

22. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} = -1, \quad \begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ 3x - z + 1 = 0. \end{cases}$

23. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \quad \begin{cases} 6x + 4y - 3z - 6 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$

24. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 1, \quad \begin{cases} 2x - y - 8z - 3 = 0, \\ x + 2y - 4z + 6 = 0. \end{cases}$

25. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \quad \begin{cases} x + z - 2 = 0, \\ 4x + 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$

2. Элементы линейной алгебры

Перед выполнением контрольной работы 2 студент должен изучить следующие вопросы:

1. Линейное пространство. Базис. Координаты. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

[2. Гл. 4, §1; 5. Гл. 5, §1–3; 7. Гл. 3, §17]

2. Линейный оператор. Матрица оператора. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.

[7. Гл. 3, §12–22; 2. Гл. 6, §3, 4; 3. §15–21; 5. Гл. 4, §2; Гл. 5, §4]

3. Действия над линейными операторами.

[7. Гл. 3, §12, 13]

4. Собственные векторы и собственные значения.

[2. Гл. 6, §4]

5. Евклидово пространство. Неравенство Коши–Буняковского.

[2. Гл. 7, §1; 5. Гл. 5, §5; 3. §6, 17]

6. Ортогональное преобразование, свойства, матрица.

[2. Гл. 7, §2; 5. Гл. 5, §6]

7. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

[7. Гл.3, §23–25; 2. Гл.6, §6; Гл.8, §2; 3. §22–26; 5. Гл.5, §7]

Краткие теоретические сведения

Пусть на множестве L определены две операции: сложение элементов множества и умножение элементов множества на действительное число. Множество L называется *линейным пространством*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

3) $\exists\ 0 \in L\colon \mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$;

4) $\exists\ (-\mathbf{x}) \in L\colon \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$;

5) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

6) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;

7) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;

8) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

Примерами линейных пространств являются множество всех геометрических векторов и множество

$$R^n = \{\boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \colon \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\},$$

в котором определены следующие операции:

— сложение $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$;

— умножение на число μ: $\mu\boldsymbol{\alpha} = (\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \dots, \mu\alpha_n)$.

Базис L и линейная зависимость элементов из L определяются по аналогии с этими понятиями для геометрических векторов. Все базисы линейного пространства L содержат одинаковое число элементов, которое называется *размерностью линейного пространства*. Обозначение: L^n, где n — размерность.

Пусть $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ — базис L^n. Тогда любой элемент $\mathbf{x} \in L^n$ представим в виде

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

где

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

является столбцом координат элемента x относительно B.

Если заданы базисы $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ и $B' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ из L^n, причем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= C_{11}\mathbf{e}_1 + C_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + C_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 &= C_{12}\mathbf{e}_1 + C_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + C_{n2}\mathbf{e}_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}'_n &= C_{1n}\mathbf{e}_1 + C_{2n}\mathbf{e}_2 + \dots + C_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

то невырожденная матрица

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса B к базису B'. Обозначение: $C_{B\to B'}$. Переход от базиса B' к B происходит с помощью обратной матрицы $C^{-1}_{B'\to B}$.

Справедливы равенства: $X_B = CX_{B'}$ или $X_{B'} = C^{-1}X_B$.

Линейное пространство L^n называется *евклидовым*, если любым элементам $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^n$ ставится в соответствие число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемое *скалярным произведением*, удовлетворяющее следующим условиям: для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L^n$ и любых $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

2) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3) $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$;

4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

Евклидово пространство обозначается E^n. Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Длиной элемента $\mathbf{x} \in E^n$ называется величина $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, которая удовлетворяет условиям: для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $|\mathbf{x}| \geqslant 0$, причем $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;

2) $|\lambda\mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{x}|$;

3) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ — неравенство треугольника.

Элемент, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Если $|\mathbf{x}| \neq 0$, то $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ — нормированный элемент.

Ортогональными называются элементы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, для которых $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Базис $B = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ пространства E^n называется *ортонормированным*, если

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

соответственно матрица и расширенная матрица системы (1).

Справедлива *теорема Кронекера–Капелли*: система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг $r(A)$ матрицы системы равен рангу $r(\bar{A})$ расширенной матрицы системы: $r(A) = r(\bar{A})$.

Правило Крамера при $m = n$ в (1): если определитель $\Delta = \det A$ матрицы системы n уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_i — определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$AX = B, \quad \text{где } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Если $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}: $A^{-1}A = E$ и $X = A^{-1}B$ — столбец решений (1).

Рассмотрим *метод Гаусса* для решения системы (1) (m, n — любые числа).

Предположим, что в первом уравнении $a_{11} \neq 0$. С помощью элементарных преобразований системы (1) исключим переменную x_1 из всех уравнений, кроме первого. Система примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{s2}x_2 + \ldots + a'_{sn}x_n = b'_s. \end{cases}$$

Осталось s уравнений ($s \leqslant m$), так как возможно, что $m - s$ уравнений системы (1) приняли вид $0 = 0$ и удалены из системы. Аналогично исключим x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, и т.д. В результате система (1) примет вид

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots \ldots + d_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\qquad d_{22}x_2 + \ldots \ldots + d_{2n}x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad + d_{rr}x_r + \ldots + d_{rn}x_n = \beta_r. \end{cases} \tag{3}$$

В случае $r = n$ система имеет единственное решение, которое легко найти: из последнего уравнения (3) находим значение неизвестного x_n; подставив это значение в предпоследнее уравнение, найдем значение x_{n-1}, и т.д. до получения из первого уравнения значения x_1.

В случае $r < n$ из (3) найдем выражения неизвестных x_1, ..., x_r через x_{r+1}, ..., x_n:

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + C_{1,r+1}x_{r+1} + C_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + C_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 + C_{2,r+1}x_{r+1} + C_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + C_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_r + C_{r,r+1}x_{r+1} + C_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + C_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4}$$

Неизвестные x_{r+1}, ..., x_n называются *свободными*, а x_1, ..., x_r — *базисными*. Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя по формулам (4) значения базисных переменных, получим решение системы (1).

Если в (1) $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Множество решений системы (5) является линейным подпространством R_0 пространства R^n. Размерность $\dim R_0 = (n - r)$, где $r = r(A)$. Если $r = n$, то система (2) имеет только тривиальное (нулевое) решение.

Пусть $r < n$. Согласно методу Гаусса система (5) приводится к виду

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots \ \ldots + d_{1n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad d_{22}x_2 + \ldots \ \ldots + d_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +d_{rr}x_r + \ldots + d_{rn}x_n = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = C_{1,r+1}x_{r+1} + C_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + C_{1n}x_n, \\ x_2 = C_{2,r+1}x_{r+1} + C_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + C_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = C_{r,r+1}x_{r+1} + C_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + C_{rn}x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Придавая свободным неизвестным $x_{r+1}, \ \ldots, \ x_n$ следующие $(n-r)$ наборов значений: $(1; 0; \ldots; 0)$, $(0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $(0; 0; \ldots; 1)$, получим $(n - r)$ решений системы (5), которые называются *фундаментальной системой решений*:

$$X_1 = \begin{bmatrix} C_{1,r+1} \\ C_{2,r+1} \\ \ldots \\ C_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X_2 = \begin{bmatrix} C_{1,r+2} \\ C_{2,r+2} \\ \ldots \\ C_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X_{n-r} = \begin{bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ \ldots \\ C_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Совокупность (7) задает базис пространства R_0 решений системы (5). Общее решение (5) есть линейная комбинация решений (7) с произвольными коэффициентами λ_i $(i = 1, \ldots, n - r)$:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_{n-r} X_{n-r}.$$

Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon L^n \to L^n$ линейного пространства L^n в себя называется *линейным преобразованием* (*оператором*), если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^n$ и любого числа λ выполняются условия:

1) $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$;

2) $\boldsymbol{\varphi}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$.

Элемент $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in L^n$ называется *образом* $\mathbf{x}$.

Пусть $B = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — базис L^n, $\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — образы элементов базиса. Так как $\mathbf{y}_i \in L^n$, то

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{y}_2 = \alpha_{12}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_{n2}\mathbf{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{y}_n = \alpha_{1n}\mathbf{e}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_{nn}\mathbf{e}_n. \end{cases}$$

Квадратная матрица $A = (\alpha_{ij})$, столбцами которой являются координаты образов базисных элементов, называется *матрицей линейного преобразования* $\boldsymbol{\varphi}$ в базисе B. Учитывая связь между двумя базисами B и B' пространства L^n, получим, что относительно B' преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ будет иметь матрицу $C^{-1}AC$, где $C = C_{B\to B'}$ — матрица перехода от B к B'.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — линейный оператор L^n. Ненулевой элемент $\mathbf{x} \in L^n$, для которого выполняется условие

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}, \tag{8}$$

где λ — число, называется *собственным вектором линейного оператора* $\boldsymbol{\varphi}$, соответствующим *собственному значению* λ.

Запишем (8) в матричном виде:

$$AX = \lambda\mathbf{x} \quad \text{или} \quad (A - \lambda E)\mathbf{x} = 0.$$

Следовательно, собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ (матрицы A) являются корнями характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Если матрица A — симметрическая $(a_{ij} = a_{ji})$, то все корни характеристического уравнения действительные.

Собственным вектором оператора $\boldsymbol{\varphi}$, соответствующим собственному значению λ_i, является общее решение однородной системы

$$(A - \lambda_i E)X = 0.$$

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Выражение вида

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots$$
$$\ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \tag{9}$$

называется *квадратичной формой* переменных $x_1, \ldots, x_n$ в ортонормированном базисе $B = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы*. Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то A — симметрическая. Следовательно, все собственные числа λ_i матрицы A действительны.

Если все λ_i различны, то соответствующие собственные векторы образуют ортогональный базис, от которого перейдем к ортонормированному $B' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$. Пусть $C_{B \to B'}$ — матрица перехода. Тогда преобразование переменных по формуле $X = CX'$ приводит квадратичную форму (9) к *каноническому виду*

$$f = \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 + \ldots + \lambda_n {x'_n}^2,$$

где λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — собственные значения матрицы A. Если среди λ_i есть кратные, то ортонормируем базис подпространства собственных векторов, соответствующих кратному собственному значению. Совокупность всех этих ортонормируемых базисов есть базис $B' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$.

Решение типовых задач

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить систему двумя способами: 1) по правилу Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

Решение. Через A обозначим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных данной системы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если определитель этой матрицы отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система линейных уравнений имеет единственное решение. Вычислим определитель Δ матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 48 + 36 - 12 - 36 + 4 = -55.$$

Так как $\Delta = -55 \neq 0$, то система линейных уравнений совместна и имеет единственное решение.

1. Решим систему по правилу Крамера. Согласно этому правилу единственное решение системы находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где определители Δ_i ($i = 1, 2, 3$) получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов. Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -165, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -110,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -55.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{-165}{-55} = 3, \quad x_2 = \frac{-110}{-55} = 2, \quad x_3 = \frac{-55}{-55} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

2. Решим систему средствами матричного исчисления. Систему линейных уравнений запишем в виде матричного урав-

нения $AX = B$,

$$\text{где} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица A имеет обратную матрицу, то решение уравнения $AX = B$ имеет вид $X = A^{-1}B$. Найдем матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Вычислив алгебраические дополнения, имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{-55} \begin{bmatrix} -35 & -22 & 8 \\ -20 & -11 & 14 \\ -15 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{55} \begin{bmatrix} -35 & -22 & 8 \\ -20 & -11 & 14 \\ -15 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{55} \begin{bmatrix} -165 \\ -110 \\ -55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Задача 2. Решить данную систему линейных уравнений методом Гаусса. Найти общее решение и одно частное решение системы:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 16x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение. Данной системе соответствует расширенная матрица

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 2 & 16 & 10 \end{array}\right].$$

Для удобства столбец свободных членов отделен вертикальной чертой. С помощью элементарных преобразований системы (строк матрицы $\bar{A}$) имеем

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 2 & 16 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & -8 & -13 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 8 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует следующая система:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ \qquad -4x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -4, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + 12x_4 = 8. \end{cases}$$

Из последней системы видно, что переменные x_1, x_2, x_3 являются главными (базисными) неизвестными, а переменная x_4 — свободной.

Найдем общее решение. Из третьего уравнения определим неизвестную x_3: $x_3 = 8 - 12x_4$. Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = 1 - \frac{7}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 = 1 - \frac{7}{4}(8 - 12x_4) - \frac{3}{4}x_4 =$$

$$= 1 - 14 + 21x_4 - \frac{3}{4}x_4 = -13 + \frac{81}{4}x_4.$$

Из первого уравнения найдем x_1:

$$x_1 = -2 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 + 3\left(-13 + \frac{81}{4}x_4\right) +$$

$$+3(8 - 12x_4) + 2x_4 = -2 - 39 + \frac{243}{4}x_4 + 24 - 36x_4 + 2x_4 =$$

$$= -17 + \frac{107}{4}x_4.$$

Следовательно, общее решение системы линейных уравнений примет вид

$$X = \left(-17 + \frac{107}{4}C;\ -13 + \frac{81}{4}C;\ 8 - 12C;\ C\right)^{\top},$$

где $x_4 = C$, C — произвольное действительное число.

Придадим свободной переменной произвольное числовое значение, например, $x_4 = 4$. Тогда из общего решения найдем частное решение $(90; 68; -40; 4)^\top$.

Ответ: общее решение:

$$X = \left(-17 + \frac{107}{4}C;\ -13 + \frac{81}{4}C;\ 8 - 12C;\ C\right)^\top,$$

где C — произвольное действительное число; частное решение: $(90; 68; -40; 4)^\top$.

Задача 3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение. Решая систему методом Гаусса, получим

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad\qquad 7x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Главными (базисными) переменными являются переменные x_1, x_3, а свободными — переменные x_2, x_4. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4, \\ x_3 = -\dfrac{5}{7}x_4. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = \left(2C_1 + \frac{2}{7}C_2;\ C_1;\ -\frac{5}{7}C_2;\ C_2\right)^\top,$$

где $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, C_1, C_2 — произвольные действительные числа.

Фундаментальная система решений состоит из двух решений. Если $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ и $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, то решения $(2; 1; 0; 0)^\top$, $\left(\frac{2}{7}; 0; -\frac{5}{7}; 1\right)^\top$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений.

Ответ: общее решение системы:

$$X = \left(2C_1 + \frac{2}{7}C_2;\ C_1;\ -\frac{5}{7}C_2;\ C_2\right)^\top,$$

где C_1, C_2 — любые действительные числа; фундаментальная система решений: $(2; 1; 0; 0)^\top$, $\left(\frac{2}{7}; 0; -\frac{5}{7}; 1\right)^\top$.

Задача 4. Используя теорию квадратичных форм, привести уравнение линии второго порядка $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 3$ к каноническому виду. Найти каноническую систему координат. Построить кривую.

Решение. С помощью ортогонального преобразования квадратичную форму $5x^2 + 8xy + 5y^2$ приведем к каноническому виду. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

является матрицей этой квадратичной формы. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются собственные числа $\lambda = 1$, $\lambda = 9$. Следовательно, квадратичная форма имеет канонический вид $x'^2 + 9y'^2$.

Для определения координатных векторов $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ новой прямоугольной декартовой системы найдем собственные векторы линейного оператора, имеющего ту же матрицу, что и данная квадратичная форма. Координаты этих собственных векторов удовлетворяют системе уравнений

$$(A - \lambda E)X = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая в этой системе сначала $\lambda = 1$, а затем $\lambda = 9$, найдем собственные векторы:

$$\mathbf{E}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где c_1, c_2 — произвольные ненулевые числа. Нормируя полученные собственные векторы, получим

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2.$$

Ортогональное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду, имеет вид

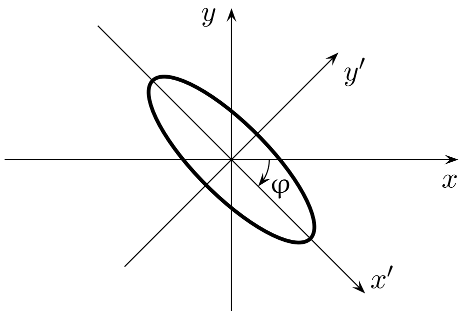
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y').$$

В новой системе координат уравнение кривой примет вид

$$x'^2 + 9y'^2 = 3 \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, кривая является эллипсом.

Для графического изображения этой кривой построим новую систему координат. Угол поворота осей координат находим по формулам $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$, $\sin\varphi = -\sqrt{2}/2$. Следовательно, угол поворота $\varphi = -\pi/4$.



Контрольная работа 2

Задача 1. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить систему двумя способами: 1) по правилу Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -6, \\ x_1 - 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 14, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 29, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

Задача 2. Исследовать совместность системы линейных уравнений по теореме Кронекера–Капелли. Решить систему методом Гаусса. Найти общее и одно частное решение системы линейных уравнений.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 21. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 10. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 11, \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 8x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 12x_4 = 6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3, \\ 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

19. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -32. \end{cases}$$

Задача 3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений.

1. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Задача 4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

7. $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

12. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{bmatrix}$.

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

16. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

18. $A = \begin{bmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

19. $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

20. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

21. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

22. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

23. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

24. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

25. $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Задача 5. Используя теорию квадратичных форм, привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Найти каноническую систему координат. Построить кривую.

1. $15x^2 - 2\sqrt{55}xy + 9y^2 = 20$.
2. $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 12$.
3. $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 = 22$.
4. $2x^2 - 6xy + 2y^2 = 15$.
5. $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 10$.
6. $4xy + 3y^2 = 36$.
7. $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.
8. $13x^2 - 48xy + 27y^2 = 45$.
9. $4x^2 + 24xy + 11y^2 = 20$.
10. $3x^2 - 2\sqrt{5}xy - y^2 = 8$.
11. $6x^2 - 4\sqrt{14}xy + 5y^2 = 26$.
12. $x^2 - 2\sqrt{21}xy + 5y^2 = 24$.
13. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$.
14. $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 = 24$.
15. $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21$.
16. $5x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2 = 14$.
17. $7x^2 + 2\sqrt{18}xy + 4y^2 = 15$.
18. $3x^2 + 2\sqrt{14}xy + 8y^2 = 10$.
19. $7x^2 + 2\sqrt{6}xy + 2y^2 = 24$.
20. $9x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = 20$.
21. $6x^2 + 2\sqrt{10}xy + 3y^2 = 16$.
22. $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 5y^2 = 40$.
23. $x^2 - xy + y^2 = 4$.
24. $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 24$.
25. $8x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$.

3. Введение в математический анализ

Перед выполнением контрольной работы 3 студент должен изучить следующие вопросы:

1. Понятие функции. Свойства функции. Элементарные функции и их графики.

[5. Гл. 5, §2, 3; 10. Гл. 1, §6–9]

2. Числовая последовательность и ее предел.

[5. Гл. 5, §4]

3. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

[5. Гл. 5, §4, 5; 10. Гл. 2, §1–7]

4. Непрерывность и точки разрыва функций.

[5. Гл. 5, §6; 10. Гл. 2, §9]

Краткие теоретические сведения

Если каждому значению x из множества X поставлено в соответствие одно определенное значение y, то y называется *функцией* от x. Обозначение: $y = f(x)$. Символом $f(a)$ представлено значение, которое принимает функция $y = f(x)$ при $x = a$. Множество X называется *областью определения функции*. Множество значений y, которые принимает функция, называется *областью значений функции* и обозначается Y.

Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек $M(x, f(x))$.

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Она записывается в виде $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Число A называется *пределом последовательности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Для сходящихся последовательностей (a_n) и (b_n) имеют место следующие свойства:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n \quad (c = \mathrm{const});$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \left(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right).$$

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x| < M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Если $x < a$ и $x \to a$, то пишут $x \to a - 0$; аналогично, если $x > a$ и $x \to a$, то $x \to a + 0$. Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называются соответственно *пределом слева функции* $f(x)$ в точке a и *пределом справа функции* $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $f(a-0) = f(a+0)$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{C}{f(x)} = \infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{C}{f(x)} = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным значениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Нахождение предела в этих случаях называют *раскрытием неопределенностей*. Для раскрытия неопределенности преобразуют данное выражение и применяют первый или второй замечательный предел и следствия из них.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Следствия:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0,\ a\neq 1);$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0);$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

Функция $y(x)$ с областью определения X называется *непрерывной в точке* x_0, если выполнены следующие условия:

1) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0\in X$;
2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Последнее условие равносильно

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то x_0 называется *точкой разрыва функции* $y=f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или нарушено условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. В этом случае x_0 называется *точкой устранимого разрыва функции*;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует. Если существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (но не равны между собой), то x_0 называется *точкой разрыва I рода*;

в) в остальных случаях x_0 называется *точкой разрыва II рода*.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* ($\alpha(x) \sim \beta(x)$), если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

При вычислении пределов бесконечно малые функции заменяют эквивалентными, пользуясь следующей таблицей эквивалентных бесконечно малых функций. Если при $x \to a$ выполняется $\alpha(x) \to 0$, то:

1) $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

2) $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

3) $\mathrm{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

4) $\mathrm{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

5) $1 - \cos(\alpha(x)) \sim \frac{1}{2}(\alpha(x))^2$;

6) $\log_b(1 + \alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln b}$;

7) $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

8) $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln b$;

9) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

10) $(1 + \alpha(x))^b - 1 \sim b\alpha(x)$;

11) $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 2 + 3 - 4 + ... + (2n-1) - 2n}{n}$.

Решение: а) имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на выражение $\sqrt{n(n+5)} + n$:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+5) - n^2}{\sqrt{n(n+5)} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}} + 1\right)} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\frac{5}{2}$;

б) преобразуем числитель выражения, стоящего под знаком предела, по формуле суммы членов арифметической прогрессии:

$$1-2+3-4+...+(2n-1)-2n = (1+3+...+2n-1)-(2+4+...+2n) =$$

$$= \frac{1+(2n-1)}{2}\,n - \frac{2+2n}{2}\,n = n^2 - n(n+1) = -n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+...+(2n-1)-2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n} = -1.$$

Ответ: -1.

Задача 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{3}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное с числителем. После этого можно сократить на x^3 и воспользоваться теоремой о пределе дроби:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^3}-1)(\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3(\sqrt{1+x^3}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^3-1}{x^3(\sqrt{1+x^3}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x^5 числитель и знаменатель дроби, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5}}{\dfrac{x^5+5}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)^3\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^2}{1-\dfrac{5}{x^5}}=\frac{8\cdot 9}{1}=72.$$

Ответ: 72.

Задача 4. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Положим $x-\pi/2=y$, $x=\pi/2+y$, тогда $y\to 0$ при $x\to\pi/2$.

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x=\lim_{y\to 0}(-y)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}y\operatorname{ctg}y=\lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{\sin y}=1\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Ответ: 1.

Задача 5. Найти $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{2}{x+2}}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида 1^∞. Положим $y=x+2$, $x=y-2$, тогда $y\to 0$ при $x\to -2$.

$$\lim_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{2}{x+2}}=\lim_{y\to 0}(1+2y)^{\frac{2}{y}}=\lim_{y\to 0}\left[(1+2y)^{\frac{1}{2y}}\right]^{2y\cdot\frac{2}{y}}=e^4.$$

Ответ: e^4.

Задача 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида 1^∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1\right)^{8x^2+3}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1 - \frac{2}{2x^2+5}\right)^{\frac{2x^2+5}{-2}}\right)^{\frac{-2(8x^2+3)}{2x^2+5}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2(8x^2+3)}{2x^2+5}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2(8+3/x^2)}{2+5/x^2}\right)} = e^{\frac{-2\cdot 8}{2}} = e^{-8}.$$

Ответ: e^{-8}.

Задача 7. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2+1, & \text{если } 0 < x < 2, \\ 2x+1, & \text{если } x \geqslant 2 \end{cases}$$

и сделать схематический чертеж.

Решение. Заданная функция меняет свое аналитическое выражение при переходе через точки $x = 0$, $x = 2$, где и возможен разрыв. Проверим непрерывность функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(x-3) = -3,$$

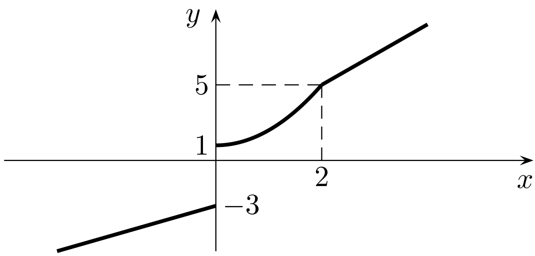
$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(x^2+1) = 1.$$

Таким образом, в точке $x = 0$ исследуемая функция терпит разрыв I рода. Проверим ее непрерывность в точке $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x^2+1) = 5,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(2x+1) = 5.$$

Следовательно, в точке $x = 2$ функция непрерывна.



Контрольная работа 3

Задача 1. Найти пределы числовых последовательностей.

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2n-1}}{n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n-2}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+3n+5}}{n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+3)!+(n+2)!}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{-n^2}$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sqrt[3]{4-n^3}}{n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+3)!-(n+2)!}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n-1}{4n+1}\right)^{n+1}$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{5+8n^3}-2n}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n-2}$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{n^{10}+3n-5}}{3n^2-7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+3}-\sqrt[5]{n^3+4}}{\sqrt[3]{n^7+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^3+(n-1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+a}-\sqrt{n})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2-3n}{5-3n}\right)^{n-4}$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{2n+1}\right)^{2n-5}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1-n}{2-n}\right)^{3-n}$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n(\sqrt{n^2+1}-n)\right]$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)^3+(n-1)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-n\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3n^2}{2n+1}-\dfrac{(2n-1)(3n^2+n+2)}{4n^2}\right]$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+7}\right)^{\frac{n}{6}+1}$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})\right]$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+3n+1}}{n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n+5)^2}{2n^3-3n+7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}}$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{n^3+8}-\sqrt{n^3-2}\right)\right]$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^3+39n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n+1}\right)^{-n^2}$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+cn+d}\right)$ $(a,b,c,d=\text{const})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n-5}{2^n-3^n+9}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+7n+1}}{2n+9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{2n-7}$.

25. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+2^n+5^n}{1+2^n-5^n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{n}$.

Задача 2. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 2/7}\dfrac{7x^2-9x+2}{7x^2+12x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7x-5}}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg}(x/2)}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{2x+x^2-2}}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 1/5}\dfrac{5x^2+9x-2}{5x^2-6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1-3x)}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 3/2}\dfrac{-2x^2+x+3}{2x^2-5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-2}-\sqrt{3}}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{e^{-x^2}-1}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 4/3} \dfrac{9x^2-9x-4}{9x^2-6x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to -2/3} \dfrac{3x^2-x-2}{3x^2+8x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x^2-3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x - \sin^2 5x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to -5/2} \dfrac{2x^2+7x+5}{2x^2+3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to -1} (3+2x)^{\frac{5}{x+1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+x)}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{-2x^2+x+3}{2x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 3x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 3/5} \dfrac{10x^2-x-3}{10x^2-11x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} (5-x)^{\frac{-2}{x-4}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{\sin x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -1/4} \dfrac{-4x^2-9x-2}{4x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to -3} (7+2x)^{\frac{4}{x+3}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 5x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 1/7} \dfrac{7x^2+13x-2}{7x^2-8x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2+2x}}{x-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{-3}{4-2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin 4x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to -4/3} \dfrac{3x^2+7x+4}{3x^2+x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to -4} (9+2x)^{\frac{6}{x+4}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 6x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 5/2} \dfrac{2x^2-x-10}{4x^2-8x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to -2} (-3-2x)^{-\frac{2}{x+2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln(1+5\sin x^2)}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to -3/2} \dfrac{-2x^2-5x-3}{4x^2+8x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{-3}{x-1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to -1/3} \dfrac{3x^2+10x+3}{3x^2-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} (4-x)^{\frac{1}{6-2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg} 2x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to -6/5} \dfrac{-5x^2+4x+12}{10x^2+17x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{6x+1}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} (5-x)^{\frac{2}{x-4}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln(1+4x)}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 3/4} \dfrac{4x^2-11x+6}{4x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin^4 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to -3} (7+2x)^{\frac{-4}{x+3}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{\sin 6x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 6/5} \dfrac{5x^2-x-6}{5x^2-11x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 3} (10-3x)^{\frac{1}{3(3-x)}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\ln(1+3x^2)}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{7x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to -2} (5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{3x}-1}{\operatorname{tg} 5x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to -4} (9+2x)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{2^x-1}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-7x+12}{\sqrt{6x+1}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to -1} (4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 2x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+13}}{x^2+2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} (2x-5)^{\frac{6}{3-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{\ln(1+5x^2)}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{x^2-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} (5-x)^{\frac{2}{x-4}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{\sin 2x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x^2+4x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-1}{x\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{3}{1-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\ln(x+1)}$.

Задача 3. Заданы функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x. Требуется: 1) найти пределы функции при приближении к каждому из заданных значений x слева и справа; 2) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x; 3) сделать схематический чертеж.

1. $y = 2^{\frac{1}{x-5}}$; $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.
2. $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
3. $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
4. $y = 5^{\frac{1}{1-x}}$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
5. $y = 4^{\frac{1}{x-3}}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
6. $y = 2^{\frac{1}{x+3}}$; $x_1 = -3$, $x_2 = 0$.
7. $y = 9^{\frac{1}{x+2}}$; $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.
8. $y = 3^{\frac{1}{x+1}}$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
9. $y = 9^{\frac{1}{x+3}}$; $x_1 = -5$, $x_2 = -3$.
10. $y = 5^{\frac{2}{x+5}}$; $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.
11. $y = 5^{\frac{1}{x-4}}$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
12. $y = 6^{\frac{1}{x-3}}$; $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.
13. $y = 7^{\frac{1}{x-5}}$; $x_1 = 7$, $x_2 = 5$.
14. $y = 10^{\frac{1}{x-6}}$; $x_1 = 8$, $x_2 = 6$.
15. $y = 25^{\frac{1}{x-8}}$; $x_1 = 10$, $x_2 = 8$.
16. $y = 9^{\frac{1}{x-7}}$; $x_1 = 9$, $x_2 = 7$.
17. $y = 4^{\frac{1}{x-1}}$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.
18. $y = 16^{\frac{1}{x-4}}$; $x_1 = 6$, $x_2 = 4$.
19. $y = 8^{\frac{1}{x-2}}$; $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.
20. $y = 9^{\frac{1}{2-x}}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
21. $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
22. $y = 12^{\frac{1}{x}}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
23. $y = 3^{\frac{1}{4-x}}$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
24. $y = 8^{\frac{1}{5-x}}$; $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.
25. $y = 10^{\frac{1}{7-x}}$; $x_1 = 5$, $x_2 = 7$.

Задача 4. Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

1. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leqslant x < 1, \\ 2x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ -(x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x \geqslant 2. \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0, \\ x^2+1, & 0<x<1, \\ x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ x^2, & 0<x \leqslant 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$ 6. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ \sin x, & 0<x \leqslant \pi, \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x \leqslant \pi/4, \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$ 8. $f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leqslant -1, \\ (x+1)^2, & -1<x \leqslant 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 0, \\ x^2+1, & 0<x \leqslant 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$ 10. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & 0<x<4, \\ 1, & x \geqslant 4. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leqslant 1, \\ 2x, & 1<x \leqslant 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$ 12. $f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$ 14. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x \geqslant 2. \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leqslant 0, \\ 1, & 0<x \leqslant 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$ 16. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0, \\ 1-x, & 0<x \leqslant 2, \\ x^2, & x > 2. \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ 18. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x \leqslant \pi/4, \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\pi/2, \\ x, & x \geqslant \pi/2. \end{cases}$ 20. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant \pi/2, \\ 0, & \pi/2<x<\pi, \\ \pi/2, & x \geqslant \pi. \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ -\cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \pi/2+x, & x > \pi/2. \end{cases}$ 22. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leqslant -1, \\ 2x, & 1<x \leqslant 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\leqslant -2,\\ 2-x, & -2<x<0,\\ x^2+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 24. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x<0,\\ x^2+1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$

Список рекомендуемой литературы

1. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ : метод. указания и контр. задания для студентов-заочников / сост. А. Н. Быкова, Н. В. Григорьева, Р. И. Медведева, Н. Д. Поляков, Л. Б. Шитова. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1999. — 56 с.

2. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учеб. для вузов / Д. В. Беклемишев. — 8-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 2000. — 375 с.

3. *Бугров Я. С.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. — 385 с.

4. *Бугров Я. С.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1988. — 431 с.

5. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — Ч. 1. — М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 2003. — 304 с.

6. *Ефимов А. В.* Сборник задач по математике для вузов : учеб. пособие : в 4 ч. / А. В. Ефимов и др. — Ч. 1. — М.: Наука, 2004. — 288 с.

7. *Ефимов Н. В.* Квадратичные формы и матрицы : учеб. пособие для вузов / Н. В. Ефимов. — 6-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1975. — 159 с.

8. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии для вузов / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. — 13-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1980. — 240 с.

9. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике: типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. — 5-е изд., стереотип. — СПб.: Лань, 2005. — 239 с.

10. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для вузов / Н. С. Пискунов. — 2-е изд. стереотип. — Т. 1. — М.: Интеграл-Пресс, 2001. — 415 с.

Оглавление

Учебное издание

АГАКОВ Всеволод Георгиевич
БЫКОВА Алевтина Николаевна
ИЛЬИНА Ирина Игоревна
КАРТУЗОВА Татьяна Вячеславовна

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания и контрольные задания

Редактор Н. А. Романова
Компьютерный набор и верстка в пакете LaTeX 2_ε В. Г. Сытина

Подписано в печать 3.11.11. Формат $60\times84/16$.
Бумага газетная. Гарнитура Антиква. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,21. Тираж 500 экз. Заказ № 674.

Чувашский государственный университет
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15