МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников технических факультетов

Чебоксары
2021

УДК 517
ББК В161.621я73+В161.5я+В161.913я73

С о с т а в и т е л и:
Е.В. Володина, Т.В. Картузова,
Л.В. Селиверстова, М.Е. Сироткина

Элементы теории функций комплексного переменного. Операционное исчисление: метод. указания и контрольные задания для студентов-заочников технических факультетов / сост. Е.В. Володина, Т.В. Картузова, Л.В. Селиверстова и др. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2021. 36 с.

Содержат краткий теоретический материал, решения типовых задач, а также задания для контрольной работы.
Для студентов-заочников I–II курсов технических факультетов.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук, доцент А.С. Сабиров

Утверждено Учебно-методическим советом университета

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

**Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников технических факультетов**

Редактор М.В. Перцева
Компьютерная верстка и правка Т.В. Картузовой

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 31.05.2021. Формат 60×84/16. Бумага газетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,98. Тираж 100 экз. Заказ № 611.

Издательство Чувашского университета
Типография университета. 428015 Чебоксары, Московский просп., 15

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящие методические указания составлены в соответствии с рабочей программой курса «Специальные главы математики» для студентов заочного отделения технических факультетов.

Работа состоит из двух разделов:

1) «Элементы теории функций комплексного переменного» (комплексные числа и действия над ними, основные геометрические понятия, функции комплексного переменного);

2) «Операционное исчисление» (интеграл Лапласа и его свойства, оригинал и изображение, основные свойства оригиналов и изображений, применение операционного исчисления для решения обыкновенных дифференциальных уравнений).

В начале каждого раздела кратко изложены основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), приведено большое количество разобранных задач. Представлено решение типовых задач контрольной работы, а также задания контрольной работы по вариантам.

При подборе задач были использованы различные сборники задач по высшей математике, список которых приведен в списке рекомендуемой литературы.

Предлагаемое издание может быть использовано как под руководством преподавателя, так и при самостоятельном изучении материала студентами.

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Комплексные числа и действия над ними

Определение 1. *Комплексным числом* z называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где x и y – любые действительные числа, а i – мнимая единица, удовлетворяющая условию

$$i^2 = -1. \tag{2}$$

Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями комплексного числа* z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Выражение (1) называется *алгебраической формой комплексного числа*.

Определение 2. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости OXY либо точкой $M(x,y)$, либо вектором $\overline{OM}$, проведенным из начала координат в точку $M(x,y)$.

Определение 3. Длина ρ вектора $\overline{OM}$ *называется модулем комплексного числа* и обозначается $|z|$, так что

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с осью OX, называется *аргументом комплексного числа* z ($-\pi < \arg z \le \pi$) и определяется следующим образом:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{при} \quad x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{при} \quad x < 0,\ y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{при} \quad x < 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Любое комплексное число $z = x + iy$ ($z \ne 0$) можно записать как в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{5}$$

так и в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \tag{6}$$

где r, φ – модуль и аргумент комплексного числа.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Разностью $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. Произведением $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

4. Частным $\dfrac{z_1}{z_2}$ от деления комплексного числа z_1 на $z_2 \ne 0$ называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_1 y_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

5. Возведение комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **в натуральную степень *n*** производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (7)$$

6. Корень *n*-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \qquad (8)$$

где $k = 1, 2, \ldots, n-1$, r, φ – модуль и аргумент комплексного числа.

Пример 1. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Имеем $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$,

$\varphi = -\frac{2\pi}{3}$.

Тогда

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Пример 2. Вычислить $(2 - 2i)^7$.

Решение. Имеем

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \ \varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$(2 - 2i)^7 = (2\sqrt{2})^7\left(\cos 7\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin 7\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (2\sqrt{2})^7\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = (2\sqrt{2})^7\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 2^7(\sqrt{2})^7\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = 2^{10}(1 + i).$$

Пример 3. Найти все значения корня $\sqrt[4]{1 - i}$.

Решение. Приведем комплексное число $1 - i$ к тригонометрическому виду

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right).$$

Полагая $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$, найдем

$$(k=0)\ \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(k=1)\ \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right),$$

$$(k=2)\ \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right),$$

$$(k=3)\ \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right).$$

1.2. Основные геометрические понятия

Определение 4. ε*-окрестностью точки* z_0 называется множество точек z комплексной плоскости, таких, что $|z-z_0|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – заданное число.

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z|>R$, где $R>0$, называется *R-окрестностью бесконечно удаленной точки*.

Следует помнить, что неравенство $|z-z_0|\le R$ задает круг с центром в точке z_0 и радиусом R. Неравенство $\operatorname{Re} z\ge a$ задает полуплоскость, расположенную правее прямой $x=a$, а неравенство $\operatorname{Im} z\ge b$ – полуплоскость, расположенную выше прямой $y=b$. Кроме того, система неравенств $\varphi_1\le\arg z\le\varphi_2$ задает угол между лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, выходящими из начала координат.

Пример 4. Нарисовать область, заданную неравенствами $|\operatorname{Re} z| \le 1,\quad |\operatorname{Im} z| < 2$ (рис. 1).

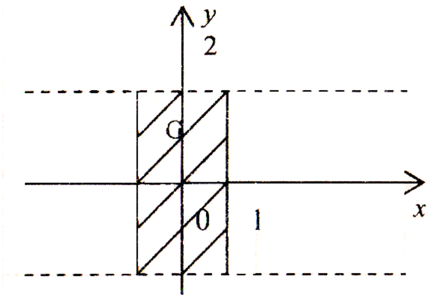


Рис. 1

Решение. Число $z = x + iy$ удовлетворяет условиям $|\operatorname{Re} z| \le 1,\quad |\operatorname{Im} z| < 2$ тогда и только тогда, когда $|x| \le 1, |y| < 2$, т.е. $-1 \le x \le 1, -2 < y < 2$. Этими неравенствами определяется заштрихованное на чертеже множество G.

Пример 5. Нарисовать область, заданную неравенством $\operatorname{Im} z^2 > 2$ (рис. 2).

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда $z^2 = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i2xy$. Следовательно, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию $2xy > 2$, т.е. $xy > 1$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах соответственно над и под гиперболой $xy = 1$.

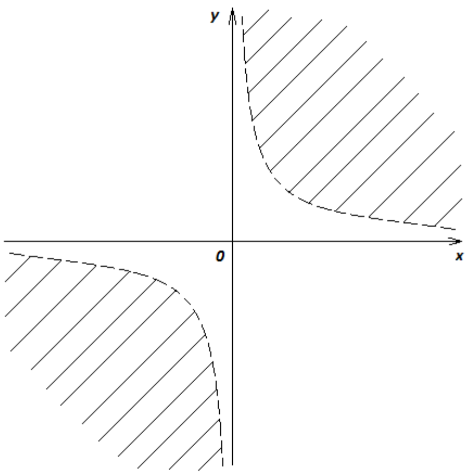


Рис. 2

1.3. Функции комплексного переменного

Определение 5. В области D определена функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений w.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух действительных функций u и v действительных переменных x и y.

Например, если $w = z^3 - i\bar{z}$, то, полагая $z = x + iy$, получим

$$u + iv = (x+iy)^3 - i(x - iy) = \left(x^3 - 3xy - y\right) + i\left(3x^2 y - y^3 - x\right),$$

где $u(x, y) = \left(x^3 - 3xy - y\right)$, $v(x, y) = \left(3x^2 y - y^3 - x\right)$.

Основные элементарные функции комплексного переменного

1. Рациональная функция – многочлен

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n. \quad (9)$$

2. Показательная функция e^z определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (10)$$

и обладает следующими свойствами:

а) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$,

б) $e^{z_1 + 2k\pi i} = e^z$, $k \in Z$; т. е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

3. Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определяются степенными рядами

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad (11)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n1}}{(2n)!} + \ldots, \tag{12}$$

абсолютно сходящимися при любом комплексном значении z. Функции (10) - (12) связаны формулами Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \tag{13}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{14}$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

причем все формулы тригонометрии остаются в силе.

4. Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \tag{15}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{16}$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой соотношениями:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

5. Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как многозначная функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i, \; k \in Z. \tag{17}$$

Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Очевидно, что $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$, $k \in Z$.

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \qquad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

6. Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные соответственно к функциям $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\\ \operatorname{Arccos} z &= -i \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\\ \operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\\ \operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Пример 6. Выделить действительную и мнимую части следующих функций: а) $w=2z-1$; б) $w=\sin z$.

Решение. а) $w=2z-1 \Leftrightarrow w=2(x+iy)-1 \Leftrightarrow$ $w=2(x-1)+i\,2y$, т. е. $u(x,y)=2x-1$, $v(x,y)=2y$;

б) $w=\sin z \Leftrightarrow w=\sin(x+iy) \Leftrightarrow$ $w=\sin x\cdot\cos iy+\cos x\cdot\sin iy \Leftrightarrow w=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$, т. е.

$$u(x,y)=\sin x\operatorname{ch} y,\quad v(x,y)=\cos x\operatorname{sh} y.$$

Пример 7. Найти значения модуля функции $w=\sin z$ в точке $z=\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Решение. Так как $w=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$, то

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x\operatorname{ch}^2 y+\operatorname{sh}^2 y\left(1-\sin^2 x\right)}=\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}.$$

Полагая $z=\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, найдем

$$\left|\sin\left(\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\right|=\operatorname{sh}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=$$

$$=\frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}-e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2}=\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}{2}=2.$$

РАЗДЕЛ 2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление – метод решения важных для приложений классов дифференциальных уравнений. Основная идея этого метода – сведение решения дифференциальных уравнений к алгебраическим операциям.

2.1. Интеграл Лапласа и его свойства. Оригинал и изображение

Пусть функция $f(t)$ – действительная или комплексная функция действительной переменной t:

$$f(t)=\begin{cases} f(t), & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases} \qquad (1)$$

Интегралом Лапласа для функции (1) называется несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,, \qquad (2)$$

где $p=\sigma+is$ – комплексное число.

Если множество значений p, при которых интеграл Лапласа (2) абсолютно сходится, не пусто, то этот интеграл является функцией комплексной переменной p. Эту функцию называют изображением функции $f(t)$ и обозначают $F(p)$:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,. \qquad (3)$$

Функцию $f(t)$ называют оригиналом. Применима следующая форма записи:

$$F(p)\risingdotseq f(t) \text{ или } f(t)\risingdotseq F(p)\,.$$

Употребляются и другие обозначения:

$$f(t)\leftrightarrow F(p) \text{ и } F(p)=L[f(t)].$$

Установим, какие функции $f(t)$ мы будем рассматривать и какие условия необходимо на них наложить, чтобы несобственный интеграл (2) сходился и действительно определял некоторую функцию $F(p)$. Будем предполагать следующее:

1) функция $f(t)$ локально интегрируема на любом конечном интервале оси *t*;
2) функция $f(t)$ равна нулю при отрицательных значениях *t*, т. е. $f(t)=0$ при $t<0$;
3) при возрастании *t* модуль функции $f(t)$ может возрастать, но не быстрее некоторой показательной функции, т. е. $|f(t)|<Me^{\sigma_0 t}$, где M и σ_0 – постоянные.

Любая функция $f(t)$, удовлетворяющая трем сформулированным выше условиям, называется оригиналом.

Пример 1. Рассмотрим единичную функцию Хевисайда $\sigma>0$

$$\chi(t)=\eta(t)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad t<0,\\ 1, & \text{если} \quad t>0.\end{cases}$$

Ее график приведен на рис. 1.

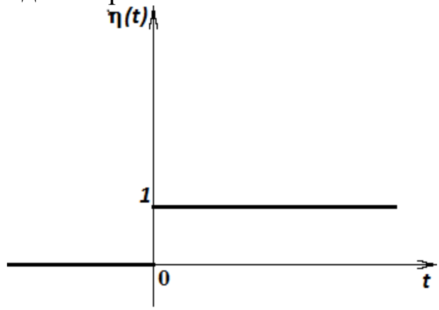


Рис. 1

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-pt}dt=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^N=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p},$$

так как

$$\lim_{N\to+\infty}e^{-pN}=\lim_{N\to+\infty}e^{-(\sigma+is)N}=\lim_{N\to+\infty}e^{-\sigma N}\cdot e^{-isN},$$

$$\left|e^{-isN}\right|=\left|\cos sN+i\sin sN\right|=1,\ \ \lim_{N\to+\infty}e^{-\sigma N}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{e^{\sigma N}}=0,\ \ \sigma>0.$$

Пример 2. Пользуясь определением, найти изображение функции $f(t)=e^t$.

Решение. Имеем

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^t e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{(1-p)t}dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{N} e^{(1-p)t}dt=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}e^{(1-p)t}\right)\Bigg|_0^N=\frac{1}{1-p}\lim_{N\to+\infty}\left(e^{(1-p)t}-1\right)=-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1},$$

так как

$$\lim_{N\to+\infty} e^{(1-p)N}=\lim_{N\to+\infty} e^{N}e^{-pN}=\lim_{N\to+\infty} e^{N}\frac{1}{e^{pN}}=0\,.$$

Пример 3. Пользуясь определением, также можно найти изображения функций $\sin t$ и $\cos t$, т. е.

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1} \text{ и } \cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}\,. \qquad (4)$$

2.2. Основные свойства оригиналов и изображений

Пусть $f(t)$ – функция-оригинал с индексом роста σ_0, а $F(p)$ – ее изображение по Лапласу.

Рассмотрим основные свойства функций $f(t)$ и $F(p)$, на которых основаны многие практические применения преобразования Лапласа.

Свойство 1 (линейность)

1. При умножении оригинала на число C (действительное или комплексное) изображение умножается на это число:

$$Cf(t)\doteqdot CF(p)\,.$$

2. Изображение суммы двух оригиналов равно сумме их изображений:

$$f_1(t)+f_2(t)\doteqdot F_1(p)+F_2(p)\,.$$

Следствие. Изображение линейной комбинации оригиналов равно соответствующей линейной комбинации изображений:

$$C_1f_1(t)+C_2f_2(t)+\ldots+C_nf_n(t)\doteqdot C_1F_1(p)+C_2F_2(p)+\ldots+C_nF_n(p)\,,$$

где C_i – числа, $f_i(t)$ – оригиналы, $F_i(p)$ – соответствующие изображения ($i=1, 2, \ldots, n$).

Пример 4. Найти изображения функций $\sin t$ и $\cos t$.

Решение. $\sin t=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, $\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$.

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\sin t e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}e^{(i-p)t}dt-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(i+p)t}dt=$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{(i-p)t}dt-\frac{1}{2i}\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-(i+p)t}dt=$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{i-p}e^{(i-p)t}\Big|_0^N+\frac{1}{i+p}e^{-(i+p)t}\Big|_0^N\right)=\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{i-p}-\frac{1}{p+i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)=\frac{2i}{2i\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p^2+1},$$

т.е. $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$.

Аналогично находится изображение для функции $\cos t$:

$$\cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}.$$

Свойство 2 (теорема подобия)

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $f(at)\risingdotseq\dfrac{1}{a}F(\dfrac{p}{a})$, где a – произвольная положительная постоянная.

Пример 5. Найти изображения функций $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

Решение. Из формул (4) получим:

$$\sin\omega t\risingdotseq\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}\quad\text{или}\quad\sin\omega t\risingdotseq\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega t\risingdotseq\frac{1}{\omega}\frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}\quad\text{или}\quad\cos\omega t\risingdotseq\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Свойство 3 (дифференцирование оригинала)

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$ ($\operatorname{Re} p > \sigma_0$).

Из теоремы следует, что

$$f''(t) \doteq p\bigl(pF(p) - f(0)\bigr) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \doteq p\bigl(p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)\bigr) - f''(0) =$$

$$= p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

и т. д. Вообще для производной *n*-го порядка справедливо соотношение

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p)$, т.е. дифференцирование оригинала соответствует умножению изображения на p^n.

Пример 6. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = t \sin \omega t$.

Решение. Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда

$$f'(t) \doteq p\,F(p) - f(0), \quad f''(t) \doteq p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0).$$

Но $f(0) = 0$, а $f'(t) = \sin \omega t + \omega t \cos \omega t$ и $f'(0) = 0$. Тогда

$$f''(t) = \omega \cos \omega t + \omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t \doteq$$

$$\doteq 2\omega \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \omega^2 F(p).$$

Следовательно,

$$p^2 F(p) = \frac{2\omega p}{p^2 + \omega^2} - \omega^2 F(p) \text{ или } F(p)\left(p^2 + \omega^2\right) = \frac{2p\omega}{p^2 + \omega^2},$$

откуда

$$F(p) = \frac{2p\omega}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}.$$

Свойство 4 (дифференцирование изображения)

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, n – натуральное число, то

$$(-1)^n t^n f(t) \doteqdot F^{(n)}(p).$$

Применяя теорему несколько раз, последовательно найдем оригиналы для высших производных изображения $F(p)$:

$$t^2 f(t) \doteqdot F''(p),\ -t^3 f(t) \doteqdot F(p),\ \ldots, (-1)^n t^n f(t) \doteqdot F^{(n)}(p).$$

Пример 7. Найти изображение функции $f(t) = t^2 \cos t$.

Решение. Имеем $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$. По теореме о дифференцировании изображения $\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)' \doteqdot -t\cos t$, откуда $\dfrac{1-p^2}{\left(p^2+1\right)^2} \doteqdot -t\cos t$.

Далее

$$\left(\frac{1-p^2}{\left(p^2+1\right)^2}\right)' \doteqdot -t\left(-t\cos t\right) \text{ или } \frac{2p^3-6p}{\left(p^2+1\right)^3} \doteqdot t^2\cos t.$$

Свойство 5 (интегрирование оригинала)

Пусть $f(t)$ непрерывна на $[0;t]$ и $f(t) \doteqdot F(p)$, тогда

$$\int_0^t f(z)dz. \doteqdot \frac{F(p)}{p},\ \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

Таким образом, изображение интеграла получается делением изображения подынтегральной функции на *p*.

Свойство 6 (интегрирование изображения)

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\dfrac{f(t)}{t}$ также функция-оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{+\infty} F(z)dz.$$

Свойство 7 (теорема смещения)

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то $e^{-\lambda t} f(t) \doteqdot F(p+\lambda)$, где λ – произвольное число.

Пример 8. Найти изображение функции $f(t) = e^{2t}\cos t$.

Решение. Имеем $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$. По теореме смещения ($\lambda = 2$)

$$e^{2t}\cos t \doteqdot \frac{p-2}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{p^2-4p+5}.$$

Пример 9. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p-3}{p^2-2p+5}$.

Решение.

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2-2p+5} = \frac{(p-1)-2}{(p-1)^2+4} = \frac{p-1}{(p-1)^2+4} - \frac{2}{(p-1)^2+4} \doteqdot$$

$$\doteqdot e^t\cos 2t - 2e^t \sin 2t.$$

Свойство 8 (теорема запаздывания)

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то $f(t-\tau) \doteqdot e^{-\tau p} F(p)$ при любом $\tau > 0$.

Выясним смысл термина «запаздывание». Пусть график функции $f(t)$ изображен на рис. 2. Тогда график функции $f(t-\tau)$, изображенный на рис. 3, будет сдвинут относительно графика $f(t)$ на τ, причем на участке $(0;\tau)$ график совпадает с осью *Ot*, так как на этом участке $t-\tau<0$ и функция $f(t-\tau)=0$.

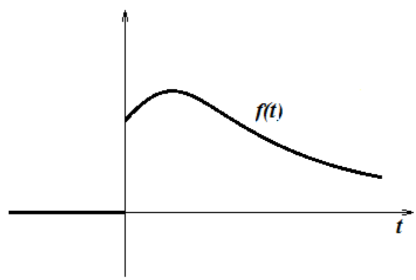


Рис. 2

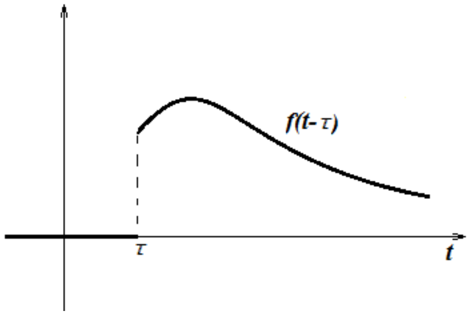


Рис. 3

Таким образом, процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается как бы с опозданием на τ относительно процесса описываемого функцией $f(t)$; отсюда термин «запаздывание».

Пример 10. Найти изображение функции

$$e^{t-2}\eta(t-2)=\begin{cases} e^{t-2}, & t\ge 2,\\ 0, & t<2.\end{cases}$$

Решение. Для функции $f(t)=e^{t}\eta(t)=\begin{cases} e^{t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ имеем $f(t)\doteqdot\dfrac{1}{p-1}$. По теореме запаздывания для функции $e^{t-2}\eta(t-2)$ получаем изображение

$$e^{t-2}\eta(t-2)\doteqdot\frac{e^{-2p}}{p-1}.$$

2.3. Таблица изображений простейших функций

Номер	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
5	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
6	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
7	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
8	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
9	$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
10	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
11	$\sin(t-\tau)\quad \tau>0$	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$
12	$\cos(t-\tau)$	$\frac{p\,e^{-\tau p}}{p^2+1}$

2.4. Применение операционного исчисления для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Схема решения дифференциальных уравнений операционным методом такова:

1) от исходного дифференциального уравнения переходим к уравнению относительно изображений, которое является алгебраическим уравнением;

2) решаем полученное алгебраическое уравнение;

3) от найденного изображения переходим к оригиналу – решению данного дифференциального уравнения.

Правомерность всех действий схемы вытекает из теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения и существования изображения этого решения, которое следует из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим приложения на примерах.

Пример 11. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' - 5x' + 6x = 4e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t)$ – искомая функция, обозначим ее изображение $X(p)$. По заданному дифференциальному уравнению можно составить уравнение, которому должна удовлетворять функция. Поскольку $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$ так как $x(0) = 0$,

$x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p)$, так как $x'(0) = 0$, то уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) - 5pX(p) + 6X(p) = \frac{4}{p-1},$$

где $\frac{4}{p-1} \risingdotseq 4e^t$. Разрешим полученное уравнение относительно изображения $X(p)$:

$$X(p) = \frac{4}{(p-1)\left(p^2 - 5p + 6\right)}.$$

Дробь в правой части равенства разложим на простейшие:

$$\frac{4}{(p-1)\left(p^2-5p+6\right)}=\frac{4}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, для неизвестных коэффициентов получим уравнение

$$4=A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p-2).$$

Полагая в этом уравнении $p=1$, получим $4=2A$ и $A=2$. При $p=2$ находим $B=-4$, при $p=3-C=2$. Следовательно, изображение

$$X(p)=\frac{2}{p-1}-\frac{4}{p-2}+\frac{2}{p-3}.$$

Используя таблицу изображений и свойство линейности, находим решение дифференциального уравнения $x(t)=2e^{t}-4e^{2t}+2e^{3t}$.

Пример 12. Решить дифференциальное уравнение $x''-2x'+x=0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

Решение. Уравнение для изображения $X(p)$ искомого решения $x(t)$ с учетом начальных условий имеет вид

$$p^2X(p)-1-2pX(p)=1.$$

Это уравнение может быть преобразовано к виду

$$(p^2-2p+1)X(p)=1,$$

откуда находим изображение

$$X(p)=\frac{1}{p^2-2p+1}=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

С помощью формулы 4 таблицы изображений возвращаемся к оригиналу $x(t)=te^{t}$.

Пример 13. Найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

Решение. Решением данной системы является пара функций $x=x(t)$, $y=y(t)$. Пусть функции $X(p)$, $Y(p)$ являются их изображениями. Для изображений с учетом начальных условий получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} pX(p) - x_0 = Y(p), \\ pY(p) - y_0 = -X(p). \end{cases}$$

Решениями последней системы являются функции

$$X(p) = \frac{px_0 + y_0}{p^2 + 1}, \ Y(p) = \frac{py_0 - x_0}{p^2 + 1}.$$

С помощью формул 5 и 6 таблицы изображений находим оригиналы:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \\ y(t) = y_0 \cos t - x_0 \sin t. \end{cases}$$

Пример 14. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 8y, \\ y' = -2z, \\ z' = 2x + 8y - 2z \end{cases} \quad \text{при начальных условиях:} \quad \begin{matrix} x(0) = 2, \\ y(0) = 2, \\ z(0) = -1. \end{matrix}$$

Решение. Пусть функции $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$ являются изображениями функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ соответственно. Для изображений с учетом начальных условий получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = 8Y(p), \\ pY(p) = -2Z(p), \\ pZ(p) + 1 = 2X(p) + 8Y(p) - 2Z(p) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} pX(p) - 8Y(p) = 2, \\ pY(p) + 2Z(p) = 0, \\ -2X(p) - 8Y(p) + (p+2)Z(p) = -1. \end{cases}$$

Полученную систему решим по правилу Крамера, тогда

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \ Z(p) = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -8 & 0 \\ 0 & p & 2 \\ -2 & -8 & p+2 \end{vmatrix} = (p+2)\left(p^2+16\right),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & p & 2 \\ -1 & -8 & p+2 \end{vmatrix} = 2p^2+4p+48\,,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & p+2 \end{vmatrix} = -8+2p\,, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} p & -8 & 2 \\ 0 & p & 0 \\ -2 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -p^2+4p\,.$$

Следовательно, $X(p)=\dfrac{2p^2+4p+48}{(p+2)\left(p^2+16\right)}$, $Y(p)=\dfrac{2p-8}{(p+2)\left(p^2+16\right)}$,

$Z(p)=\dfrac{-p^2+4p}{(p+2)\left(p^2+16\right)}$.

Восстановим оригиналы, разлагая $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$ на сумму простых дробей.

$$X(p)=\frac{2p^2+4p+48}{(p+2)\left(p^2+16\right)}=\frac{A}{p+2}+\frac{Bp+C}{p^2+16}\,.$$

Находим коэффициенты $A=\dfrac{12}{5}$, $B=-\dfrac{2}{5}$, $C=\dfrac{24}{5}$. Получим

$$X(p)=\frac{12}{5}\,\frac{1}{p+2}-\frac{2}{5}\,\frac{p-12}{p^2+16}=\frac{12}{5}\,\frac{1}{p+2}-\frac{2}{5}\,\frac{p}{p^2+16}+\frac{6}{5}\,\frac{4}{p^2+16}\doteq$$

$$\doteq\frac{12}{5}e^{-2t}-\frac{2}{5}\cos 4t+\frac{6}{5}\sin 4t=x(t).$$

Аналогично

$$Y(p)=\frac{2p-8}{(p+2)\left(p^2+16\right)}=\frac{A}{p+2}+\frac{Bp+C}{p^2+16}\,,$$

где $A=-\dfrac{3}{5}$, $B=\dfrac{3}{5}$, $C=\dfrac{4}{5}$.

$$Y(p) = -\frac{3}{5}\,\frac{1}{p+2} + \frac{3}{5}\,\frac{p+\frac{4}{3}}{p^2+16} = -\frac{3}{5}\,\frac{1}{p+2} + \frac{3}{5}\,\frac{p}{p^2+16} + \frac{1}{5}\,\frac{4}{p^2+16} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{=}}$$

$$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{=}} -\frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{3}{5}\cos 4t + \frac{1}{5}\sin 4t = y(t).$$

Аналогично

$$Z(p) = \frac{-p^2+4p}{(p+2)\left(p^2+16\right)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+16},$$

где $A = -\frac{3}{5}$, $B = -\frac{32}{5}$, $C = \frac{24}{5}$.

$$Z(p) = -\frac{3}{5}\,\frac{1}{p+2} - \frac{2}{5}\,\frac{p-12}{p^2+16} = -\frac{3}{5}\,\frac{1}{p+2} - \frac{2}{5}\,\frac{p}{p^2+16} + \frac{6}{5}\,\frac{4}{p^2+16} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{=}}$$

$$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{=}} -\frac{3}{5}e^{-2t} - \frac{2}{5}\cos 4t + \frac{6}{5}\sin 4t = z(t).$$

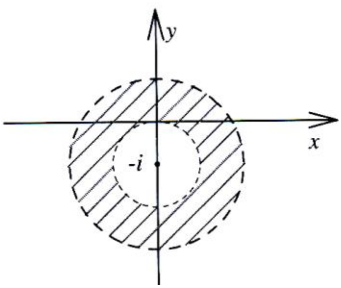
Решение типовых задач

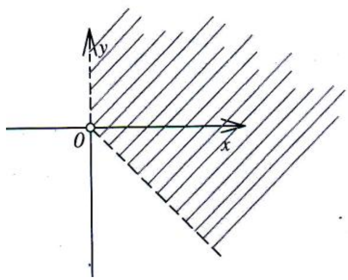
Задача 1. Нарисовать область, заданную неравенствами:

$$\begin{cases} 1 < |z + i| < 2, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

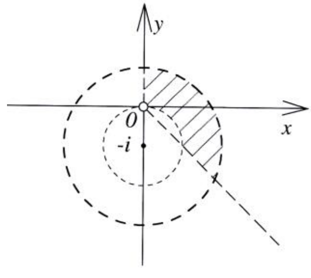
Решение. Первому неравенству соответствует кольцо с центром в точке $-i$ и двумя радиусами 1 и 2. Точки, лежащие на окружностях, в область не входят.

Второму неравенству соответствует угол между лучами $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ (биссектриса четвертого координатного угла) и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (положительное направление оси OY). Сами лучи в область не входят.





Искомая область является пересечением двух полученных областей.



Задача 2. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Запишем число -1 в тригонометрической форме записи

$$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}, \qquad k=0,1,2,3.$$

Получим следующие значения корней:

$$(k=0) \qquad \sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(k=1) \qquad \sqrt[4]{-1}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(k=2) \qquad \sqrt[4]{-1}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(k=3) \qquad \sqrt[4]{-1}=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача 3. Пользуясь свойством линейности и теоремой подобия, найти изображение данной функции: $f(t)=\sin^2 t$.

Решение.

Преобразуем оригинал, используя формулу тригонометрии:

$$f(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t.$$

Тогда по таблице изображений простейших функций, имеем

$$\frac{1}{2}1 \doteqdot \frac{1}{2}\frac{1}{p} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\cos 2t \doteqdot \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}.$$

Итак, $f(t)=\sin^2 t \doteqdot \frac{1}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}$.

Задача 4. Найти оригинал, разлагая данное изображение на простейшие дроби $F(p)=\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.

Решение. Разлагаем $F(p)$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2-4p+5}.$$

Находя коэффициенты *A*, *B*, и *C*, т.е. $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, получаем $F(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\frac{p-1}{p^2-4p+5}=\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\frac{p-1}{(p-2)^2+1}=$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(p-2)^2+1}$.

Оригиналы для дробей находятся, используя свойство линейности и теорему смещения $f(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{2t}\sin t$.

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение при нулевых начальных условиях: $x''+x=e^{-t}$ $\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$.

Решение.

$$x(t)\doteqdot X(p),\qquad x'(t)\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-p\,x(0)-x'(0)=p^2X(p),\qquad e^{-t}\doteqdot\frac{1}{p+1}.$$

Тогда операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p)+X(p)=\frac{1}{p+1},$$

отсюда

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)(p^2+1)}.$$

Разлагаем $X(p)$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+1)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+1}.$$

Находя коэффициенты *A*, *B*, и *C*, т.е. $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, получаем

$$X(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}.$$

Оригиналы для дробей находятся, используя свойство линейности и таблицу изображений простейших функций:

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\ .$$

Задача 6. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y\\ \dot{y}=3x\end{cases},\qquad x(0)=0,\ y(0)=1.$$

Решение. Переходя к операторной системе, получим

$$\begin{cases}pX(p)=-2X(p)+Y(p)\\ pY(p)-1=3X(p)\end{cases},$$

где $x(t)\doteqdot X(p)$, $\dot{x}\doteqdot pX(p)$, $y(t)\doteqdot Y(p)$, $\dot{y}\doteqdot pY(p)-1$.

Решая последнюю систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$, получим $X(p)=\dfrac{1}{p^2+2p-3}$, $Y(p)=\dfrac{p+2}{p^2+2p-3}$.

Отсюда $X(p)=\dfrac{1}{4(p-1)}-\dfrac{1}{4(p+3)}$, $Y(p)=\dfrac{3}{4(p-1)}+\dfrac{1}{4(p+3)}$.

Находя оригиналы для $X(p)$ и $Y(p)$, получаем

$$x(t)=\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-3t},\ y(t)=\frac{3}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-3t}.$$

Контрольная работа

Задача 1. Нарисовать область, заданную неравенствами:

1. $\begin{cases} |z-1| \le 1, \\ |z+1| > 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} |z+i| \ge 1, \\ |z| < 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} |z-i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} |z+1| \ge 1, \\ |z+i| < 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} |z+1| < 1, \\ |z-i| \le 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} |z+i| \le 2, \\ |z-i| > 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} |z-1-i| \le 1, \\ \operatorname{Im} z > 1, \\ \operatorname{Re} z \ge 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} |z-1+i| \ge 1, \\ \operatorname{Re} z < 1, \\ \operatorname{Im} z \le -1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} |z-2-i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 3, \\ \operatorname{Im} z < 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} |z-1-i| \ge 1, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 2, \\ 0 < \operatorname{Im} z \le 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} |z+i| < 2, \\ 0 < \operatorname{Re} z \le 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} |z-i| \le 1, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} |z-i| \le 2, \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} |z+i| < 1, \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z < 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} |z-1-i| < 1, \\ 0 < \arg z \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} |z| < 2, \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$

17. $\begin{cases} |z| \le 1, \\ \arg(z+i) > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 1 < |z-1| \le 2, \\ \operatorname{Re} z < 1, \\ \operatorname{Im} z \ge 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 1 \le |z-i| < 2, \\ \operatorname{Re} z \le 0, \\ \operatorname{Im} z > 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} |z| < 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 1, \\ \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} |z| > 1, \\ -1 < \operatorname{Im} z \le 1, \\ 0 < \operatorname{Re} z \le 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} |z-1| > 1, \\ -1 \le \operatorname{Im} z < 0, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} |z+i| < 1, \\ -\dfrac{3}{4}\pi \le \arg z \le -\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} |z-i| \le 1, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \arg(z-i) \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

25. $\begin{cases} z\bar{z} < 2, \\ \operatorname{Re} z \le 1, \\ \operatorname{Im} z > -1. \end{cases}$

Задача 2. Найти все значения корня:

1. $\sqrt[3]{1+i}$
2. $\sqrt{8-8i}$
3. $\sqrt{1+i}$
4. $\sqrt[3]{1-i}$
5. $\sqrt{1-i}$
6. $\sqrt{-1+i}$
7. $\sqrt[3]{3+3i}$
8. $\sqrt[3]{i}$
9. $\sqrt{-16}$
10. $\sqrt{3+i\sqrt{3}}$
11. $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$
12. $\sqrt[3]{-1-i}$
13. $\sqrt[3]{3+i\sqrt{3}}$
14. $\sqrt[4]{-81}$
15. $\sqrt{-1-i}$
16. $\sqrt{-16i}$
17. $\sqrt[3]{-1+i}$
18. $\sqrt[3]{2+2i}$
19. $\sqrt[3]{-8+8i}$
20. $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$
21. $\sqrt[3]{4-4i}$
22. $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$
23. $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$
24. $\sqrt{4+4i}$
25. $\sqrt[3]{\sqrt{3}+3i}$

Задача 3. Пользуясь свойством линейности и теоремой подобия, найти изображение данной функции:

1. $f(t) = \sin^3 t$
2. $f(t) = \cos^3 t$
3. $f(t) = \sin^4 t$
4. $f(t) = \cos^4 t$
5. $f(t) = \sin mt \cdot \cos nt$
6. $f(t) = \sin mt \cdot \sin nt$
7. $f(t) = \cos mt \cdot \cos nt$
8. $f(t) = \sin^2 \dfrac{t}{4}$
9. $f(t) = \cos^2 \dfrac{t}{4}$
10. $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$
11. $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$
12. $f(t) = e^{2t} + 3e^{-2t} + t$
13. $f(t) = \dfrac{1}{3} t^3 + \cos 2t$
14. $f(t) = t + e^{i\omega t}$
15. $f(t) = 5t - 2t^2 + t^3$
16. $f(t) = \sin 2t \cdot \cos 6t$
17. $f(t) = \sin 2t \cdot \sin 6t$
18. $f(t) = \cos 2t \cdot \cos 6t$
19. $f(t) = e^{(2+i)t} + \sin \dfrac{t}{2}$
20. $f(t) = \sin(2t + \dfrac{\pi}{3})$
21. $f(t) = \cos(2t + \dfrac{\pi}{3})$
22. $f(t) = 2sh3t + ch3t$
23. $f(t) = e^{-7t} + 3t - 1$
24. $f(t) = \sin^2 2t$
25. $f(t) = \cos^2 4t$

Задача 4. Найти оригинал, разлагая данное изображение на простейшие дроби:

1. $\dfrac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$
2. $\dfrac{1}{p^2(p^2 + 1)}$
3. $\dfrac{p}{p^3 + 1}$
4. $\dfrac{1}{p(p+1)(p^2 + 4)}$
5. $\dfrac{p+1}{p^3 + 1}$
6. $\dfrac{p^2 + 2p - 1}{p^3 - 2p^2 + 2p - 1}$
7. $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2 + 4)}$
8. $\dfrac{2p+3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$
9. $\dfrac{p-1}{p(p^2 + 6p + 10)}$
10. $\dfrac{2p-1}{p^2(p^2 + 6p + 10)}$

11. $\dfrac{p+1}{p(p-1)(p^2+1)}$

12. $\dfrac{2p-1}{(p-1)(p+2)(p^2+9)}$

13. $\dfrac{3p-2}{p^3+p^2+p}$

14. $\dfrac{p^2+6}{(p^2+4)(p^2+9)}$

15. $\dfrac{2p-5}{(p^2+1)(p^2+4)}$

16. $\dfrac{p^2-p+4}{(p-2)^2(p^2+4)}$

17. $\dfrac{1}{(p+2)(p-3)(p^2+9)}$

18. $\dfrac{3p-4}{p^2(p^2+4p+5)}$

19. $\dfrac{3p^3-2p^2+p-1}{p(p-3)(p^2+4p+5)}$

20. $\dfrac{2p^2-3p+2}{(p-3)^2(p^2+6p+10)}$

21. $\dfrac{2p^2+1}{(p^2+1)(p^2+6p+10)}$

22. $\dfrac{3p^2-2p+1}{(p^2+4)(p^2+6p+10)}$

23. $\dfrac{5p+2}{(p+4)^2(p^2+4p+5)}$

24. $\dfrac{7p-3}{p(p^2+3p+4)}$

25. $\dfrac{p+7}{(p-5)^2(p^2+3p+4)}$

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение при нулевых начальных условиях:

1. $x''-4x'+4x=t+1$
2. $x''+8x'=8t$
3. $x''-2x'+x=e^t$
4. $x''+4x'+4x=8e^{-2t}$
5. $x''+4x'+3x=9e^{-3t}$
6. $7x''-x'=14t$
7. $x''+2x'+2x=t+1$
8. $x''-2x'+x=\sin t$
9. $x''+2x'+x=e^{2t}$
10. $x''-x=e^t$
11. $x''+x=\cos t$
12. $x''-7x'+12x=-e^{4t}$
13. $x''-2x'=t^2-1$
14. $x''-2x'+x=2e^t$
15. $x''-2x'=e^{2t}+5$
16. $x''+x'=2e^t+5t$
17. $x''-x'=2t-1$
18. $x''+2x'+x=e^t+e^{-t}$
19. $x''-2x'+10x=\sin 3t$
20. $x''-4x'+4x=2e^{2t}$
21. $x''-3x'=\cos t$
22. $x''-4x'+4x=\dfrac{t}{2}$
23. $x''-3x'=t$
24. $x''-2x'-3x=t$
25. $x''-2x'-8x=-8\cos 2t$

Задача 6. Решить систему дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} x' = -3x - 4y, \\ y' = -2x - 5y, \end{cases}$
$x(0) = 1,$
$y(0) = 4.$

2. $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 2.$

3. $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases}$
$x(0) = -2,\ y(0) = 1.$

4. $\begin{cases} x' = -x - 4y + 4t + 1, \\ y' = -x + y + 1{,}5t^2, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0.$

5. $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t, \\ x' + y = \cos t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0.$

6. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^{2t}, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

7. $\begin{cases} x' + y' + x = 0, \\ x' + 2y' = 0, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

8. $\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x + 1, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

9. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' + y - 2x = 7e^{2t}, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

14. $\begin{cases} x' - x + 2y - 3 = 0, \\ 3x' + y' - 4x + 2y = 0, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0.$

15. $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

16. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

17. $\begin{cases} x' = 8y - x, \\ y' = x + y, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - x, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

19. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x - 3y, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 2.$

20. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4y - 2x, \end{cases}$
$x(0) = 0,$
$y(0) = -1.$

21. $\begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = x, \end{cases}$
$x(0) = 0,$
$y(0) = 1.$

22. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases}$
$x(0) = 3,$
$y(0) = 15.$

10. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0.$

11. $\begin{cases} x' = 3x + 8y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases}$
$x(0) = 6,\ y(0) = -2.$

12. $\begin{cases} x' = -x + t, \\ y' = -2x + t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = 4.$

23. $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0.$

24. $\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^t, \\ y' - x + 6y = e^{-2t}, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0.$

25. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бараненков А. И., Богомолова А.И., Петрушко И. М.* Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике: учебное пособие [для вузов]. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 234 с. Текст: непосредственный.

2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: [учебное пособие для вузов]: в 2 частях. 6-е издание. Москва: Оникс, Мир и Образование, 2005. 304 с. Текст: непосредственный.

3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: [учебник для вузов по естественнонаучным и техническим специальностям]: [в 3 томах]. 5-е издание, переработанное и дополненное. Москва: Дрофа, 2004. 720 с. Текст: непосредственный.

4. *Лаврентьев М. А.* Методы теории функций комплексного переменного: учебник для вузов. 6-е издание, стереотипное. Москва: Лань, 2002. 688 с. Текст: непосредственный.

5. *Чудесенко В. Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики: типовые расчеты: [учебное пособие для вузов по направлению "Математика"]. 3-е издание, стереотипное. Санкт-Петербург: Лань, 2005. 126 с. Текст: непосредственный.

6. *Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление*: методические указания к выполнению типовых расчетов / А. Н. Быкова, Т. В. Картузова, О. И. Кирпикова и др. Чебоксары: Изда-

тельство Чувашского университета. 2013. 60 с. Текст: непосредственный.

7. *Уравнения математической физики. Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления*: конспект лекций / В. Г. Агаков, А. Н. Быкова, О. И. Кирпикова и др. Чебоксары: Издательство Чувашского университета. 2010. 104 с. Текст: непосредственный.

8. *Элементы линейной алгебры. Аналитическая геометрия. Комплексные числа*: учебное пособие / авторы-составители А. Н. Быкова, Т. В. Картузова, О. И. Кирпикова. Чебоксары: Издательство Чувашского университета. 2016. 136 с. Текст: непосредственный.

ОГЛАВЛЕНИЕ