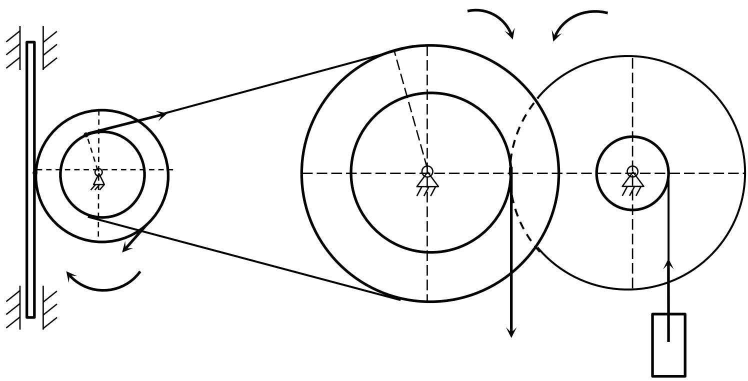
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебная программа и контрольные задания
для студентов заочного отделения



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебная программа и контрольные задания
для студентов заочного отделения

Чебоксары
2018

УДК
ББК

Составитель: Л.А. Яковлева

Теоретическая механика: учеб. программа и контрольные задания для студентов заочного отделения/ сост. Л.А. Яковлева. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2018. 48 с.

Составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Содержат варианты задач по различным темам (две по статике, три по кинематике и три по динамике и аналитической механике).

Для студентов I-II курса технических специальностей.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук А.С. Сабиров

Утверждено Учебно-методическим советом университета

Общие сведения

Теоретическая механика – это наука о механическом движении и механическом взаимодействии тел. Курс механики состоит из трех разделов: статики, кинематики, динамики.

Теоретическая механика – одна из основных естественнонаучных дисциплин, которую в том или ином объеме изучают студенты всех технических специальностей. Методы решения задач теоретической механики используются во многих общеинженерных дисциплинах, практических приложениях и научных исследованиях.

Для закрепления теоретических знаний и практических навыков, прежде чем сдать зачет или экзамен, студенты выполняют расчетно-графические работы.

Основные требования к выполнению работ

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клетку. Решение каждой задачи необходимо начинать на развороте тетради. Номера рисунка и условия задачи студенту устанавливает преподаватель.

Перед выполнением задачи необходимо аккуратно и точно начертить рисунок в соответствии с условиями варианта. При оформлении работы необходимо начертить свой вариант рисунка и записать данные своего варианта. Исходный рисунок можно не перерисовывать. Все рисунки должны соответствовать масштабу.

Решение должно сопровождаться краткими пояснениями. Все обозначения, линии, оси координат и вектора, используемые в решении, должны быть нанесены на рисунок. В ходе решения приводятся числовые значения с указанием единиц измерения полученных величин, а в конце приводится ответ.

Некоторые из заданных в условии величин при решении ряда вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов данной задачи.

Сроки выполнения, сдачи на проверку, собеседования и защиты по каждому заданию устанавливает преподаватель, ведущий практические занятия.

Работы, не отвечающие вышеперечисленным требованиям, будут возвращены студенту на доработку. Студенты, не сдавшие и не защитившие контрольные работы, к сдаче зачетов или экзаменов по курсу теоретической механики не допускаются.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе (рис. 1*).

Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

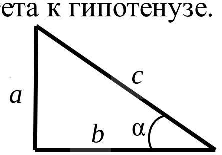


Рис. 1*

$$\sin x = \frac{a}{c},\ \cos x = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}.$$

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок, имеющий точку приложения, направление и величину.

Вектор силы можно спроецировать на оси координат. Тогда *проекциями силы* $\vec{F}$ на оси x и y будут соответственно (рис. 2*):

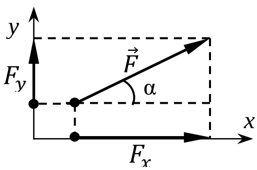


Рис. 2*

$$F_x = F \cos \alpha,$$

$$F_y = F \sin \alpha.$$

Модуль вектора силы

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Для произвольного треугольника выполнимы теоремы синусов и косинусов (рис. 3*):

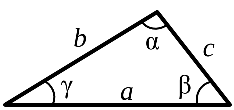


Рис. 3*

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$ – теорема косинусов,

$\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$ – теорема синусов.

СТАТИКА

Основные виды связей и их реакции

При рассмотрении задач *статики* на равновесие твердого тела необходимо указать направление сил реакций связей, а затем определить их величины в ходе решения задачи. Ниже приводятся основные виды реакций связей.

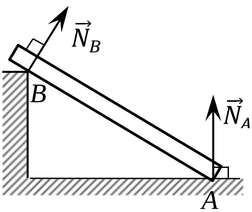


Рис. 4*

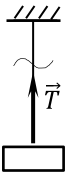


Рис. 5*

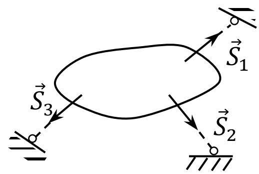


Рис. 6*

1. *Гладкая поверхность, острый выступ* (рис. 4*).

Реакция опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания.

В точке A балка AB лежит на гладкой поверхности, реакция направлена перпендикулярно опоре. В точке B балка опирается на острый выступ и реакция в этой точке перпендикулярна балке AB.

2. *Нерастяжимая гибкая нить* (рис. 5*).

Реакция связи приложена к точке сечения нити, направлена вдоль нити в сторону отброшенной части.

3. *Невесомый стержень* (рис. 6*).

Стержни шарнирно соединены одним концом с телом. Реакции направлены вдоль стержней. Если значения алгебраических величин S_1, S_2, S_3 положительные, то стержни испытывают растягивающие усилия, иначе – сжимающие.

4. *Подвижный шарнир* в точке A и *неподвижный шарнир* в точке B (рис. 7*).

Направление реакции в точке B можно разложить на две составляющие $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, причем $\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Y}_B$. Реакция $\vec{R}_A$ направлена перпендикулярно опоре.

5. *Жесткая заделка (защемление) балки* (рис. 8*).

Реакция жесткой заделки эквивалентна паре сил с моментом $\vec{M}_A$ и силе $\vec{R}_A$, которая раскладывается на две составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленные по осям координат.

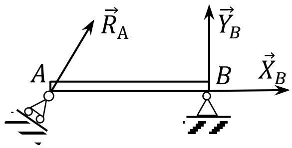


Рис. 7*

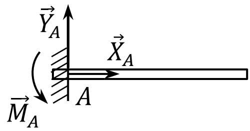


Рис. 8*

6. *Подшипник* и *подпятник* (рис. 9*).

В случае подпятника в точке A направление реакции $\vec{R}_A$ заранее неизвестно, поэтому ее раскладывают на три составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, причем $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$. Реакция цилиндрической неподвижной опоры (подшипника) в точке B направлена перпендикулярно оси опоры. $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ – составляющие реакции.

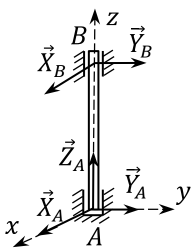


Рис. 9*

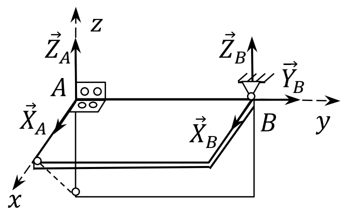


Рис. 10*

7. *Петля и сферический шарнир* (рис. 10*).

В случае петли в точке A реакция связи направлена перпендикулярно оси петли, $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции опоры. Реакция сферической неподвижной опоры в точке B раскладывается на три составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$.

Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки равна произведению интенсивности q на длину нагрузки AB (рис. 11*).

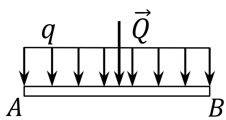


Рис. 11*

$$Q = q\ AB.$$

Задача 1
Определение реакций опор плоской конструкции

Жесткая рама находится в покое под действием внешних нагрузок: сосредоточенных сил $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 20$ кН, пары сил с моментом $M = 50$ кН · м, равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = 0{,}2$ кН/м.

Точки приложения сил F_1 и F_2, угол наклона γ силы F_1 к положительному направлению горизонтальной оси, участок равномерно распределенной нагрузки приведены в табл. 1.1. Сила F_2 приложена перпендикулярно стержню. Направление равномерно распределенной нагрузки на различных участках приведено в табл. 1.2.

К раме в точке D (рис. 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10) привязан трос, перекинутый через блок и несущий груз веса P = 4 кН. При подсчетах принять a = 0,2 м.

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые данными нагрузками.

Таблица 1.1

Условие	α, град	β, град	γ, град	Точка приложения силы		Нагруженный участок
				F_1	F_2	
1	30	60	45	N	K	CL
2	45	30	60	K	L	DN
3	60	45	60	K	N	CL
4	45	30	30	L	K	DN
5	45	60	30	N	K	CL
6	60	45	30	K	L	DN
7	60	30	45	K	N	CL
8	30	45	45	L	K	DN
9	45	60	60	K	N	CL
10	30	45	60	L	K	DN

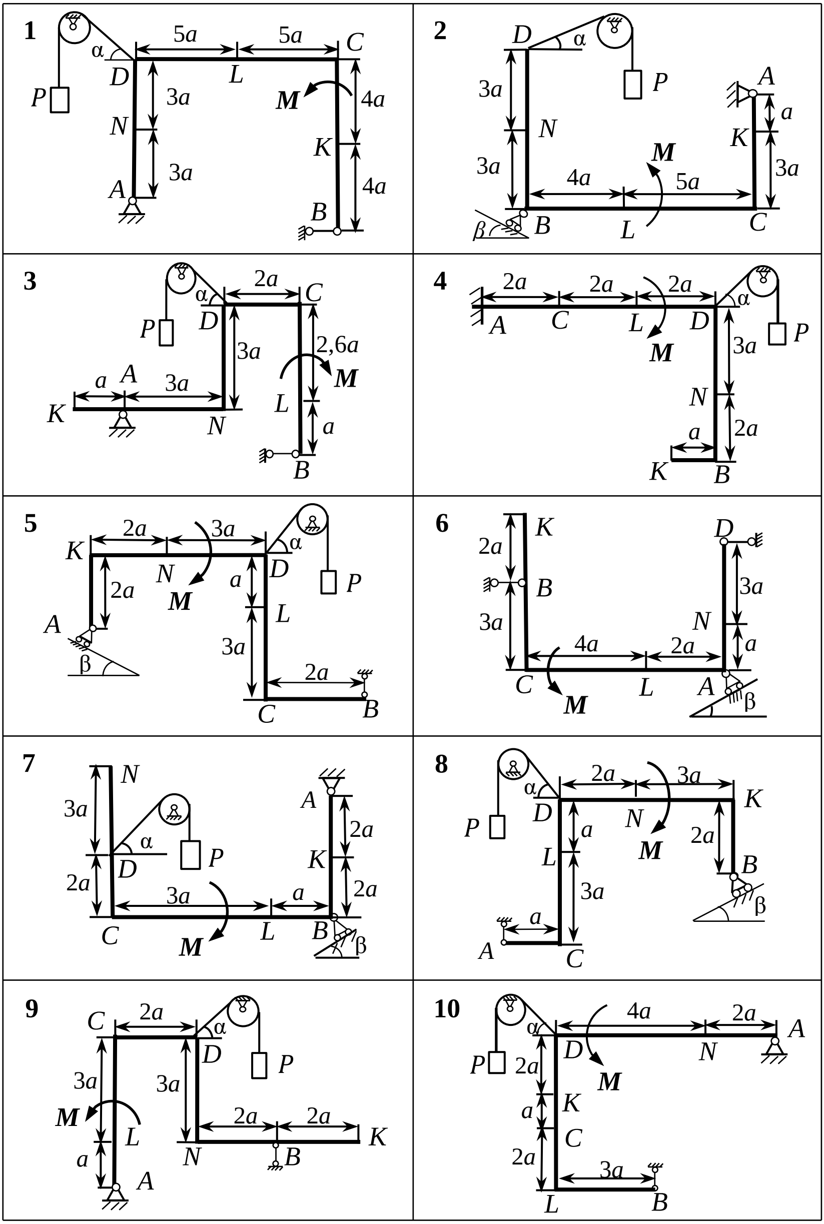
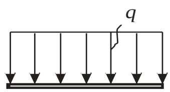
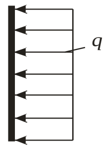


Рис. к задаче 1

Таблица 1.2





Указания к решению задачи 1

В задаче рассматривается равновесие твердого тела под действием плоской системы сил.

Алгебраическим моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 12*) называется произведение величины силы на плечо, взятое с определенным знаком $M_O(\vec{F}) = \pm F\,d$.

Плечом силы $\vec{F}$ называется кратчайшее расстояние d от линии действия силы до моментной точки O.

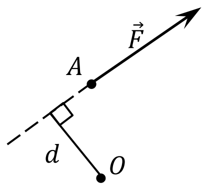


Рис. 12*

Знак «$+$» берется в случае, если сила способствует повороту тела вокруг точки O против хода часовой стрелки, «$-$» – по ходу часовой стрелки.

Алгебраический момент силы $\vec{F}$ равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку (или точка лежит на линии действия силы).

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} M_o(\vec{F}_i) = 0.$$

При составлении уравнений равновесия в качестве моментной точки удобнее взять точку, через которую проходит наибольшее число неизвестных реакций связи. Для определения момента силы удобно разложить ее на составляющие вдоль осей координат и далее определить момент каждой проекции. По теореме Вариньона:

$$M_O(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2).$$

Последовательность решения задачи:

1) прикладываем к раме все активные силы, заданные по условию задачи;

2) заменяем равномерно распределенную нагрузку ее равнодействующей, расположенной в середине участка нагрузки;

3) отбрасываем связи, заменяя их действие реакциями;

4) проецируем на оси координат силы, расположенные под углом, учитывая, что проекции должны быть приложены к точкам жесткой рамы;

5) составляя уравнения равновесия, находим неизвестные реакции.

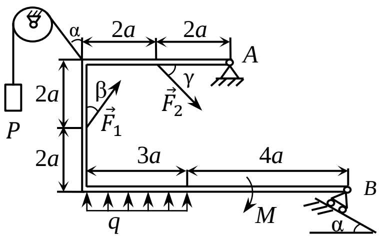


Рис. 13*

Пример 1. Жесткая рама закреплена шарнирно в точке A и опирается на шарнирную опору на катках в точке C (рис. 13*). К раме в точке B привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P.

На раму действуют две сосредоточенные силы $F_1 = 12$ кН ($\alpha = 30°$), $F_2 = 16$ кН ($\beta = 30°$); пара сил с моментом $M = 30$ кН $\cdot$ м; равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 0{,}4$ кН/м. Определить реакции связей, вызванные данными нагрузками.

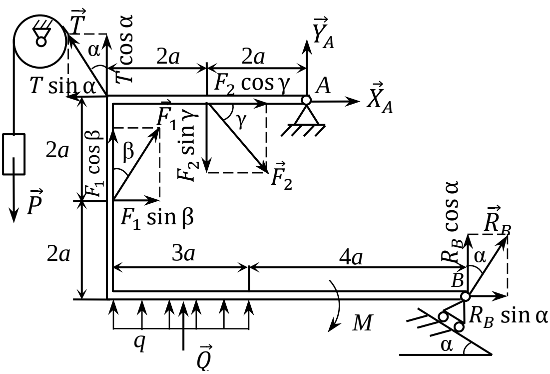


Рис. 14*

Решение

Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки приложена в середине нагрузки (рис. 14*) и равна: $Q = q\,3a$.

Нить невесома и нерастяжима, поэтому натяжение нити равно весу груза P: $T = P$.

$$\begin{cases} \Sigma F_{xi}: X_A + F_2\cos\gamma - T\sin\alpha + F_1\sin\beta + R_B\sin\alpha = 0; \\ \Sigma F_{yi}: Y_A - F_2\sin\gamma + T\cos\alpha + F_1\cos\beta + Q + R_B\cos\alpha = 0; \\ \Sigma M_A(F_i): F_2\sin\gamma\cdot 2a - T\cos\alpha\cdot 4a - F_1\cos\beta\cdot 4a - Q\cdot 3{,}5a + \\ +F_1\sin\beta\cdot 2a - M + R_B\cos\alpha\cdot 3a + R_B\sin\alpha\cdot 4a = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим неизвестные реакции сил X_A, Y_A, R_B. Убедимся в точности решения, подставив найденные значения в проверочное уравнение

$$\Sigma M_B(F_i): -X_A\cdot 4a - Y_A\cdot 3a - F_2\cos\gamma\cdot 4a + F_2\sin\gamma\cdot 5a +$$
$$+T\sin\alpha\cdot 4a - T\cos\alpha\cdot 7a - F_1\sin\beta\cdot 2a - F_2\cos\beta\cdot 7a - M -$$
$$-Q\cdot 5{,}5a = 0.$$

Задача 2
Определение реакций опор пространственной конструкции

Пространственная конструкция состоит из двух взаимно перпендикулярных плит, жестко соединенных друг с другом и находится в покое под действием заданных сил F_1, F_2, F_3, F_4. Силы F_1 и F_4 лежат в плоскости, параллельной плоскости xy; F_2 – в плоскости, параллельной xz; F_3 – в плоскости, параллельной yz.

Значения сил F_1, F_2, F_3, F_4, их углы наклона (в градусах) приведены в табл. 2.1. Размеры и вес каждой плиты указаны в табл. 2.2, где P_1 – вес большей плиты, P_2 – вес меньшей плиты. На большую плиту действует пара сил с моментом $M = 6$ кН · м.

Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются: неподвижный шарнир, цилиндрический шарнир (подшипник), невесомый стержень 1. Точки *E, К, H, D* – середины соответствующих сторон.

Определить реакции связей конструкции. При подсчетах принять a = 0,2 м.

Таблица 2.1

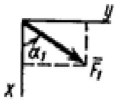
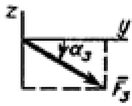
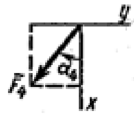
Сила								
	$F_1 = 6$ кН		$F_2 = 8$ кН		$F_3 = 10$ кН		$F_4 = 12$ кН	
Условие	Точка приложения	α_1	Точка приложения	α_2	Точка приложения	α_3	Точка приложения	α_4
1	*E*	60	*H*	30	-	-	-	-
2	-	-	*D*	60	*E*	30	-	-
3	-	-	-	-	*K*	60	*E*	30
4	*K*	30	-	-	*D*	45	-	-
5	-	-	*E*	30	-	-	*D*	60
6	*H*	45	*K*	60	-	-	-	-
7	-	-	*H*	45	*D*	30	-	-
8	-	-	-	-	*H*	60	*K*	45
9	*D*	30	-	-	*K*	45	-	-
10	-	-	*D*	45	-	-	*H*	60

Таблица 2.2

Условие	*AB*, м	*BC*, м	*CL*, м	α, град	P_1, кН	P_2, кН
1	3*a*	2*a*	3*a*	45	10	8
2	5*a*	3*a*	2*a*	60	6	4
3	8*a*	4*a*	6*a*	30	7	3
4	4*a*	3*a*	6*a*	30	12	10
5	4*a*	2*a*	5*a*	45	9	6
6	2*a*	6*a*	5*a*	60	4	2
7	3*a*	3*a*	3*a*	60	9	8
8	8*a*	8*a*	6*a*	45	5	4
9	2*a*	6*a*	4*a*	30	10	8
10	5*a*	4*a*	6*a*	60	6	4

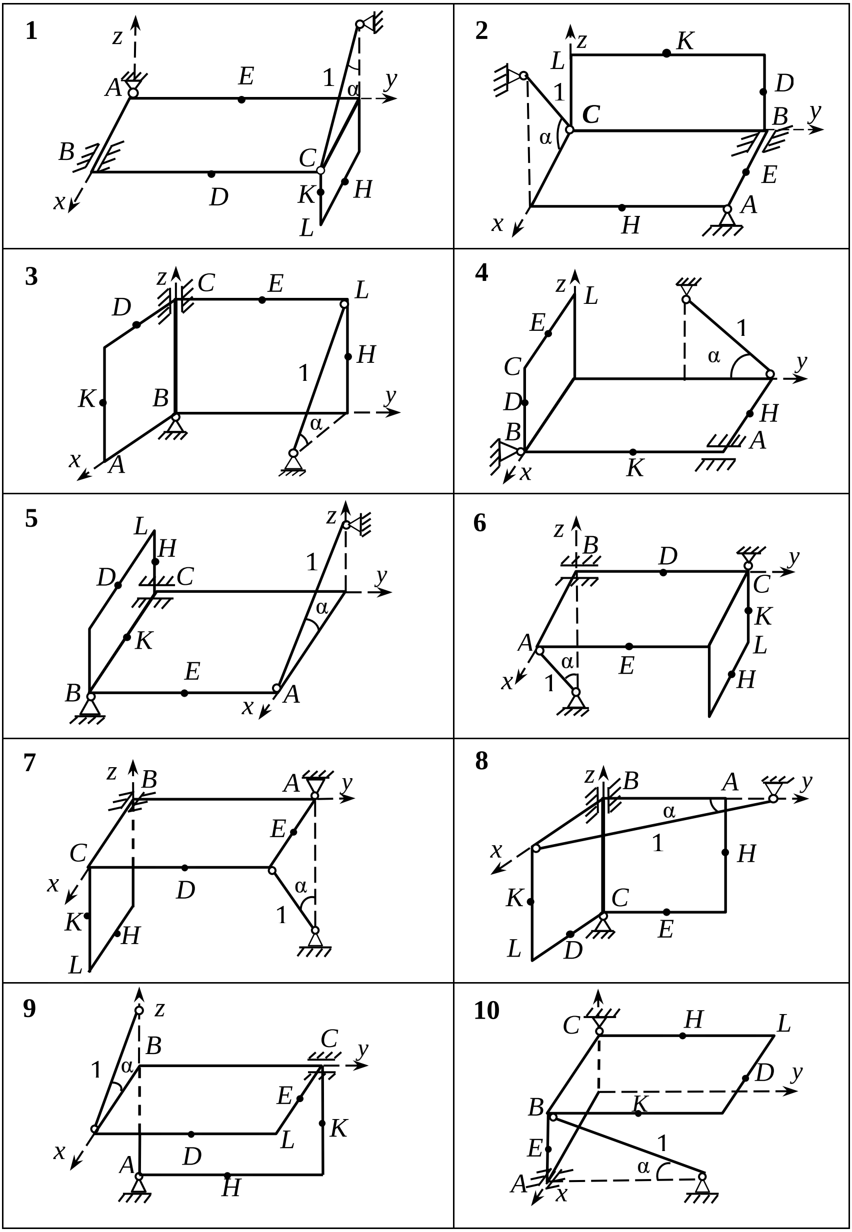


Рис. к задаче 2

Указания к решению задачи 2

В задаче рассматривается равновесие твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил.
Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0\,. \end{cases}$$

Момент силы относительно оси равен 0, если:

1) линия действия силы параллельна оси;

2) линия действия силы пересекает ось,

3) линия действия силы лежит на оси.

При нахождении момента силы $\vec{F}$ относительно оси можно разложить ее на составляющие, параллельные осям координат. Момент от суммы сил относительно любой оси равен сумме моментов каждой силы относительно той же оси.

Последовательность решения задачи:

1) прикладываем к твердому телу все силы, заданные по условию задачи (заданные силы и силы тяжести);

2) освобождаем механическую систему от связей, заменяя их действие реакциями связей;

3) спроецируем силы, расположенные под углом, на оси координат, учитывая, что проекции должны быть приложены к точкам пластины;

4) составляя уравнения равновесия, находим неизвестные реакции.

Пример 2. Определить реакции связей пространственной конструкции, на которую действуют силы $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 16$ кН, если вес большей плиты $P_1 = 20$ кН, меньшей – $P_2 = 30$ кН. Длины отрезков: $AB = 10$ м, $BC = 8$ м, $CD = 6$ м.

Решение. Рассмотрим равновесие конструкции. Заменим реакцию петли в точке A на составляющие X_A и Z_A; реакцию неподвижного сферического шарнира в точке B разложим на три составляющие X_B, Y_B Z_B. Реакцию невесомого стержня в точке C заменим усилием стержня S, предполагая, что он растянут.

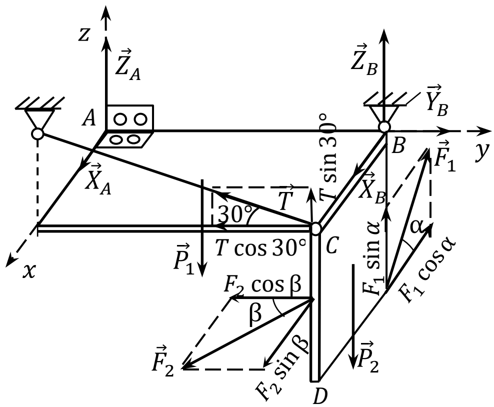


Рис. 15*

На конструкцию действуют заданные силы F_1 и F_2. Применим теорему Вариньона, разложив силы на проекции параллельные осям координат: $F_{1x} = F_1 \cos\alpha$ и $F_{1z} = F_1 \sin\alpha$; $F_{2x} = F_2 \sin\beta$ и $F_{2y} = F_2 \cos\beta$. Аналогично для силы T: $T_y = T\cos 30°$, $T_z = \sin 30°$. Приложим силы тяжести пластин P_1 и P_2.

Для определения шести неизвестных реакций X_A, Z_A, X_B, Y_B Z_B, S составим шесть уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma F_{xi}: X_A + X_B - F_1\cos\alpha + F_2\sin\beta = 0; \\ \Sigma F_{yi}: Y_B - T\cos 30° - F_2\cos\beta = 0; \\ \Sigma F_{zi}: Z_A + Z_B - P_1 - P_2 + F_1\sin\alpha + T\sin 30° = 0; \\ \Sigma M_x(\vec{F}_i): Z_B \cdot 4a + T\sin 30° \cdot 4a + F_1\sin\alpha \cdot 4a - P_1 2a - P_2 4a - \\ -F_2\cos\beta \dfrac{3a}{2} = 0; \\ \Sigma M_y(\vec{F}_i): -T\sin 30° \cdot 2a + P_1 \cdot a + P_2 \cdot a - F_2 \sin\beta \cdot \dfrac{3a}{2} + \\ +F_1\cos\alpha \cdot 3a = 0; \\ \Sigma M_z(\vec{F}_i): -X_B \cdot 4a - T\cos 30° \cdot 2a + F_1\cos\alpha \cdot 4a - F_2\cos\beta \cdot 2a - \\ -F_2\sin\beta \cdot 4a = 0. \end{cases}$$

Решая совместно уравнения системы, найдем искомые реакции: $T \cong 48{,}2$ кН, $X_A \cong= 68{,}6$ кН, $Z_A \cong 5{,}8$ кН, $X_B \cong -29{,}8$ кН, $Y_B \cong 52{,}18$ кН, $Z_B \cong 11{,}6$ кН.

КИНЕМАТИКА

Решая задачи *кинематики*, необходимо уметь четко определять вид движения каждого тела (поступательное, вращательное, плоскопараллельное).

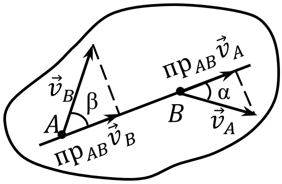


Рис. 16*

При любом движении твердого тела проекции скоростей двух точек тела (рис. 16*) на прямую, их соединяющую, равны между собой:

$$\text{пр}_{AB}\vec{v}_A = \text{пр}_{AB}\vec{v}_B;$$
$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta.$$

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, движется параллельно самой себе.

Вращательным движением твердого тела называют движение, при котором две точки этого тела остаются неподвижными. Прямая проходящая через эти точки называется осью вращения.

Угловой скоростью твердого тела называется первая производная по времени от угла поворота $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$. *Угловым ускорением* твердого тела называется первая производная по времени от угловой скорости:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Скорость и ускорения точки при вращательном движении:

$v = \omega \cdot R$ – скорость точки.

$W^\tau = \varepsilon\, r$ – касательное ускорение точки.

$W^n = \omega^2\, r$ – нормальное ускорение точки.

$W_A = \sqrt{(W^\tau)^2 + (W^n)^2}$ – полное ускорение точки.

Задача 3
Передача вращений твердых тел

Механическая передача состоит из шкивов 1, 2, 3 и грузов 4 и 5. Шкив 1 соединен ременной передачей со шкивом 2 и с помощью зубчатой передачи – со шкивом 3. Грузы 4, 5 привязаны к концу нити, намотанной на соответствующий диск.

Закон вращения ведущего колеса 1 - $\varphi_1(t)$, радиусы колес заданы в табл. 3. Положительным направлением вращения шкива 1 считать поворот против хода часовой стрелки.

В момент времени $t = 1$ с определить величины, указанные в табл. 3, а также передаточное отношение колес, находящихся в зацеплении. $R_2 = r_2/2$, $R_3 = r_3/3$.

Таблица 3

Условие	φ_1, рад	Радиус, см			Найти	
		R_1	R_2	R_3	скорость	ускорение
1	$4t^2 - 2t$	6	12	8	υ_A, υ_4	$W_B, W_5,\ \varepsilon_3$
2	$3t^2 - 2t$	12	6	10	$\upsilon_B,\ \upsilon_4$	$W_C, W_5,\ \varepsilon_2$
3	$t^2 - 2t$	12	18	16	$\upsilon_C,\ \upsilon_4$	$W_A, W_5,\ \varepsilon_3$
4	$3t^2 - 4t$	8	9	6	$\upsilon_A,\ \upsilon_5$	$W_B, W_5,\ \varepsilon_2$
5	$t^2 + 3t$	4	6	8	$\upsilon_B,\ \upsilon_5$	$W_C, W_5,\ \varepsilon_3$
6	$4t^2 - 6t$	8	6	4	$\upsilon_C,\ \upsilon_5$	$W_A, W_5,\ \varepsilon_2$
7	$t^2 + 3t$	4	6	8	$\upsilon_A,\ \upsilon_4$	$W_B, W_5,\ \varepsilon_3$
8	$2t^2 - 3t$	8	12	10	$\upsilon_B,\ \upsilon_4$	$W_C, W_5,\ \varepsilon_2$
9	$t^2 + 5t$	6	9	8	$\upsilon_C,\ \upsilon_4$	$W_A, W_5,\ \varepsilon_3$
10	$4t^2 - 2t$	10	12	6	$\upsilon_A,\ \upsilon_5$	$W_B, W_5,\ \varepsilon_2$

Указания к решению задачи 3

Задача 3 на тему «Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси». При решении следует учесть: если два зубчатых колеса находятся в зацеплении, то скорость в точке сцепления одинакова, т.е.

$$v_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости, а R_1, R_2 – радиусы ведущего и ведомого валов.

Передаточное число: $i_{12} = {}^{\omega_1}/_{\omega_2} = {}^{R_1}/_{R_2} = {}^{z_1}/_{z_2}$,

где z_1 и z_2 – число зубьев ведущего и ведомого валов.

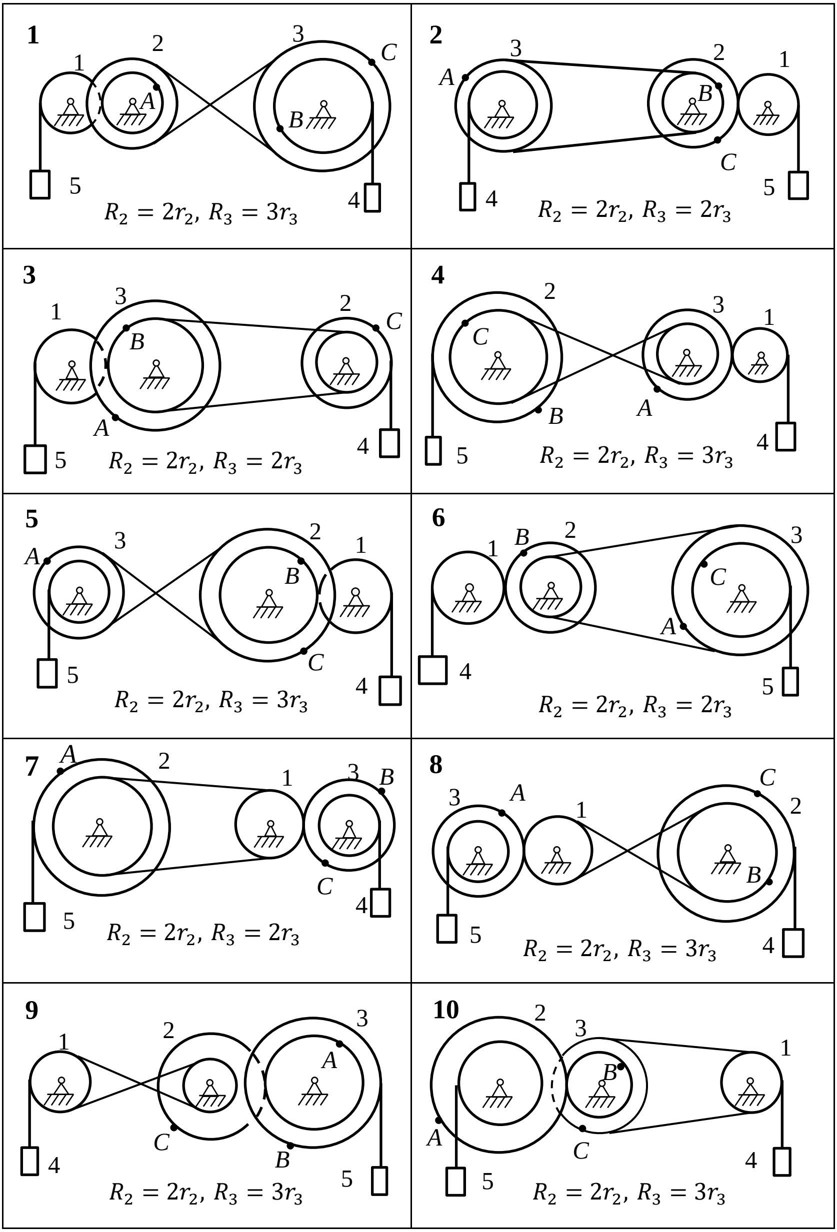


Рис. к задаче 3

Если два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно равны; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример 3. Механизм состоит из ступенчатых колес 1, 2, 3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 5 и груза 4, привязного к концу нити, намотанной на колесо 3. Радиусы ступеней равны: колеса 1 – $r_1 = 8$ см, $R_1 = 12$ см; колеса 2 – $r_2 = 10$ см, $R_2 = 20$ см; колеса 3 – $r_3 = 5$ см, $R_3 = 16$ см.

Закон движения зубчатой рейки 5: $S_5 = 2t^2 - 5t$. Положительным направлением для рейки считать движение вниз. В момент $t = 1\,c$ определить: скорость точки B (v_B), угловую скорость колеса 2 (ω_2), угловое ускорение колеса 3 (ε_3), ускорения точки A (W_A) и груза 4 (W_4).

Решение

1. Определим величину скорости рейки 5 как производную по времени от перемещения: $v_5(t) = \acute{S}_5(t) = (2t^2 - 5t)' = 4t - 5$.

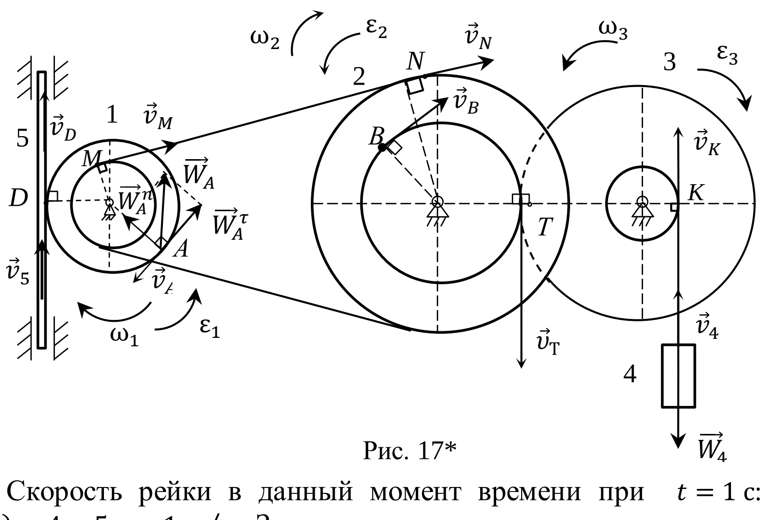


Рис. 17*

Скорость рейки в данный момент времени при $t = 1$ с: $v_5(1) = 4 - 5 = -1$ м/с. Значение скорости отрицательно, значит, движение рейки направлено вверх.

Рейка 5 и колесо 1 находятся в сцеплении, следовательно, скорости в точке сцепления равны: $v_D(t) = v_5(t) = 4t - 5$.

Точки D, E, A лежат на диске 1, значит,

$$\omega_1 = \frac{v_D}{R_1} = \frac{4t-5}{12}, \qquad \omega_1 = \frac{v_A}{R_1} = \frac{v_M}{r_1}.$$

Откуда находим, $v_A = 4t - 5$, $v_M = (4t-5)\frac{r_1}{R_1} = \frac{2}{3}(4t-5)$.

Вектор скорости в точке A направлен перпендикулярно радиусу в сторону поворота угловой скорости ω_1.

2. Определим ускорение в точке A.

Колесо 1 совершает вращательное движение, поэтому полное ускорение точки A, лежащей на колесе, находится по формуле

$$W_A = \sqrt{(W_{\text{A}}^{\tau})^2 + (W_A^n)^2},$$

где W_{A}^{τ} – касательное ускорение, W_A^n – нормальное ускорение точки A.

Определим угловую скорость колеса 1 в данный момент времени: $\omega_1(1) = -\frac{1}{12}$ рад/с.

$W_A^n = \omega_1^2 R_1 = \left(-\frac{1}{12}\right)^2 12 = \frac{1}{12}$ см/с^2 – нормальное ускорение точки A в момент $t = 1$ с. Вектор нормального ускорения направлен вдоль радиуса R_1 к оси вращения.

Определим угловое ускорение колеса 1

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \left(\frac{4t-5}{12}\right)' = \frac{1}{3}\ \text{рад/с}.$$

Знаки величин угловой скорости и углового ускорения колеса 1 противоположны, значит, вращение является замедленным и дуги ω_1 и ε_1 направлены в разные стороны.

$W_{\text{A}}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot R_1 = 4$ см/с^2 – касательное ускорение точки A.

Вектор касательного ускорения направлен перпендикулярно радиусу, по касательной к траектории движения в сторону поворота углового ускорения ε_1.

Подставив полученные значения в формулу, получим

$$W_A = \sqrt{(W_{\text{A}}^{\tau})^2 + (W_A^n)^2} = \sqrt{(4)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2} = 4{,}001\ \text{см/с}^2.$$

3. Колеса 1 и 2 связаны ременной передачей, значит, скорости в точках M и N равны: $v_M = v_N = \omega_1 r_1 = \omega_2 \mathrm{R}_2$. Откуда

$$\omega_2 = \frac{\omega_1\, r_1}{R_2} = \frac{4t-5}{30}.$$

Тогда для данного момента времени $\omega_2 = -0{,}33$ рад/с.

Скорость в точки B: $v_B(1) = \omega_2\, r_2 = \frac{1}{3}(4-5) = -\frac{1}{3}$ см/с.

4. Колеса 2 и 3 находятся в зацеплении, в точке сцепления:

$$v_T = \omega_2\, r_2 = \omega_3\, R_3, \Rightarrow\ \omega_3 = \frac{\omega_2\, r_2}{R_3} = \frac{4t-5}{15}.$$

Угловое ускорение колеса 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \left(\frac{4t-5}{15}\right)' = \frac{4}{15}\ \text{рад/с}.$$

Скорость точки K

$$v_K = \omega_3\, r_3 = \frac{4t-5}{15}\cdot 5 = \frac{4t-5}{3}.$$

5. Груз 4 подвешен на нити к точке K, поэтому

$$v_4 = v_K = \frac{4t-5}{3}.$$

Груз 4 совершает поступательное прямолинейное движение, поэтому его ускорение

$$W_4 = \frac{dv_4}{dt} = \left(\frac{4t-5}{3}\right)' = \frac{4}{3} = 1{,}33\ \text{м/с}^2.$$

Движение груза 4 является замедленным, поэтому вектора скорости и ускорения направлены в противоположные стороны.

Ответ: $v_B = 0{,}33$ см/с, $W_4 = 1{,}33$ см/с^2, $\omega_2 = -0{,}33$ рад/с, $W_\text{A} = 4{,}001$ см/с, $\varepsilon_3 = 0{,}27$ рад/с^2.

Задача 4
Определение скоростей точек твердого тела при плоском движении

Плоский механизм состоит из стержней и ползунов (рис. 2, 4, 5, 9) или системы блоков (рис. 1, 3, 6, 8, 10). Движение механизма задается углом поворота кривошипа или звена *OA*.

Для рисунков 1, 3, 6, 9 радиус $r = O_1A + 2\cdot(-1)^N$ м; для рисунков 1, 6 $\omega_2 = (-1)^N \times t^3$, рад, где N – номер условия. Качение колес происходит без скольжения. Нити нерастяжимы. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 4.

Для данного положения механизма определить:
1) скорости точек A, B, C;
2) угловые скорости звеньев.

Таблица 4

Условие	ω_1, рад	t, с	O_1A, см	BD, см	α, град
1	$-3t^2+4t$	1	12	8	$\pi/3$
2	$3t^2-4t$	1,2	6	4	$\pi/6$
3	$-2t^2+3t$	1	5	2	$\pi/3$
4	t^2+4t	0,4	8	6	$\pi/6$
5	t^2+3t	1	7	4	$\pi/3$
6	$2t^2-3t$	2	11	6	$\pi/6$
7	$3t^2-4t$	2	6	4	$\pi/6$
8	$-2t^2+3t$	1	8	6	$\pi/3$
9	$-t^2+t$	0,8	9	6	$\pi/6$
10	$4t^2-t$	0,5	10	4	$\pi/3$

Указания к решению задачи 4

Задача 4 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. *Плоскопараллельным (плоским)* называется движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных одной неподвижной плоскости.

Для определения скоростей точек можно использовать теорему о проекциях скоростей двух точек твердого тела или с помощью мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, или плоскости, жестко связанной с плоской фигурой, скорость которой в данный момент равна нулю.

Величины скоростей точек плоской фигуры прямо пропорциональны длинам отрезков, соединяющим эти точки с МЦС:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP}.$$

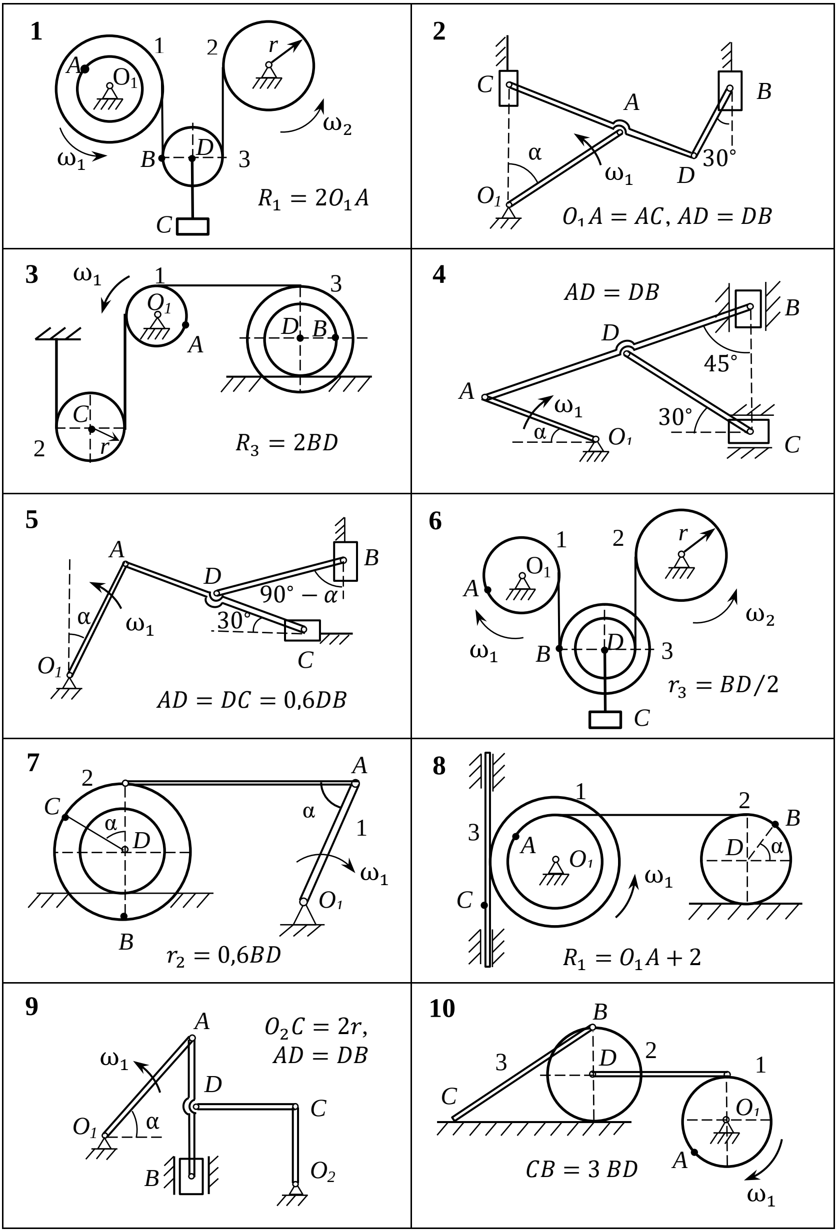


Рис. к задаче 4

Способы определения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям этих точек (рис. 18*).

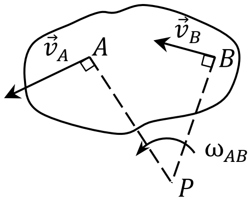


Рис. 18*

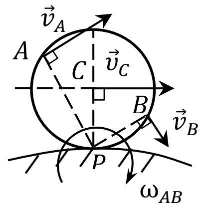


Рис. 19*

2. Качение круглого диска без проскальзывания по неподвижной поверхности (рис. 19*). МЦС находится в точке соприкосновения диска с неподвижной кривой.

3. Точки плоской фигуры лежат на общем перпендикуляре к их скоростям, скорости точек параллельны и направлены в одну сторону (рис. 20*). МЦС находится в точке пересечения линий, соединяющих начало и концы векторов скоростей.

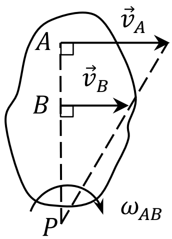


Рис. 20*

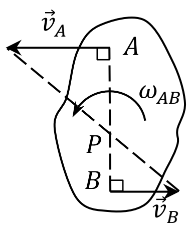


Рис. 21*

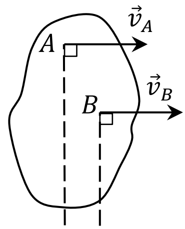


Рис. 22*

4. Точки плоской фигуры лежат на общем перпендикуляре к их скоростям, скорости точек параллельны и направлены в разные стороны (рис. 21*). МЦС находится в точке пересечения линий, соединяющих начало и концы векторов скоростей.

5. Вектора скоростей точек параллельны, направлены в одну сторону и не лежат на общем перпендикуляре (рис. 22*). МЦС находится в бесконечности, скорости равны между собой. Случай мгновенного поступательного движения:

$$\omega_{AB} = 0,\ v_A = v_B = v_C.$$

Пример 4. Плоский механизм состоит из стержней OA, AB и CD (рис. 23*). Положение механизма определяется углами, указанными на рисунке. Направление движения механизма задается углом поворота стержня OA: $\varphi_1 = 4t^2 - 5t$. Положительным считать поворот против часовой стрелки. Длины стержней: $OA = 1{,}2$ м; $AB = 1{,}6$ м; $CD = 1{,}5$ м; $AC = BC$. Определить скорости точек A, B, D и угловые скорости звеньев в момент времени $t = 1\ c$.

Решение

1. Стержень OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси. Угловая скорость тела равна производной по времени от угла поворота, т.е $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$.

$$\omega_1(t) = (4t^2 - 5t)' = 8t - 5,\ \omega_1(1) = 3c^{-1}.$$

Скорость точки A: $v_A = \omega_1 \cdot OA = 1{,}2(8t - 5)$, $v_A(1) = 3{,}6$ м/с.

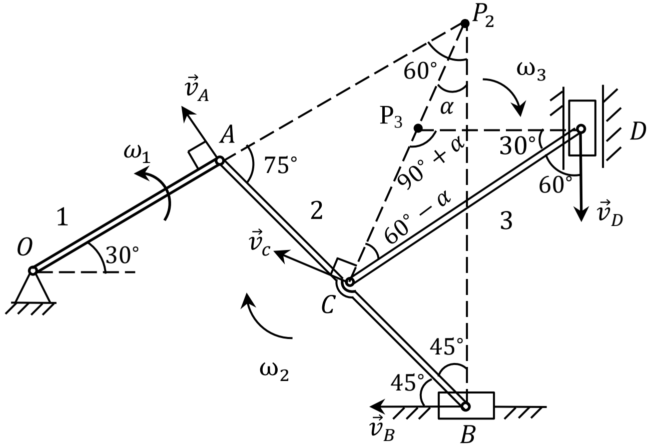


Рис. 23*

Вектор скорости в точке A перпендикулярен стержню OA и направлен в сторону поворота угловой скорости ω_1.

2. Стержень AB совершает плоское движение. Ползун B движется по горизонтали. Мгновенный центр скоростей P_2 стержня AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к скоростям точек A и B.

Угловая скорость стержня AB:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_C}{CP_2},$$

где AP_2, BP_2, CP_2 – расстояние от соответствующих точек до мгновенного центра скоростей.

Определим отрезки AP_2, BP_2, CP_2.

По теореме синусов из $\Delta\ ABP_2$:

$$\frac{BP_2}{\sin 75°} = \frac{AB}{\sin 60°} = \frac{AP_2}{\sin 45°},$$

$$BP_2 = \frac{AB \cdot \sin 75°}{\sin 60°} = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}96}{0{,}86} = 1{,}78 \text{ м},$$

$$\text{А}P_2 = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 60°} = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}7}{0.86} = 1{,}30 \text{ м}.$$

По теореме косинусов из $\Delta\ ACP_2$:

$$CP_2 = \sqrt{AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP \cdot \cos 75°},$$

$$CP_2 = \sqrt{0{,}8^2 + 1{,}31^2 - 2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}31 \cdot 0{,}25} = 1{,}35 \text{ м}.$$

Подставив найденные значения, получим

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{(8t-5) \cdot 1{,}2}{1{,}31} = 0{,}92 \cdot (8t-5); \quad \omega_2(1) = 2{,}74 \text{ рад/с};$$

$$v_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 1{,}63 \cdot (8t-5); \quad v_B(1) = 4{,}87 \text{ м/с};$$

$$v_C = \omega_2 \cdot CP_2 = 1{,}24 \cdot (8t-5); \quad v_C(1) = 3{,}69 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости v_C направлен перпендикулярно отрезку CP_2 в сторону поворота ω_2.

3. Стержень CD совершает плоскопараллельное движение

$$\omega_3 = \frac{v_C}{CP_3} = \frac{v_D}{DP_3}.$$

Определим угол CP_2B по теореме косинусов из $\Delta\ ACP_2$

$$BC^2 = BP_2^2 + CP_2^2 - 2BP_2 \cdot CP_2 \cdot \cos\angle CP_2B;$$

$$\cos\angle CP_2B = \cos\alpha = 0{,}91,$$

$$\sin\angle CP_2B = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}81^2} = 0{,}42.$$

По теореме синусов из $\Delta\ CDP_3$ определим CP_3 и DP_3:

$$\frac{CD}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{DP_3}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{CP_3}{\sin 30°},$$

$$CP_3 = \frac{CD \cdot \sin 30°}{\sin(90° + \alpha)} = 0{,}92 \text{ м},$$

$$DP_3 = \frac{CD \cdot \sin(60° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}42}{0{,}8} = 0{,}78 \text{ м}.$$

$$\omega_3 = \frac{v_c}{CP_3} = \frac{3{,}69}{0{,}92} = 4{,}01 \text{ с}^{-1}.$$

$$v_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 3{,}12 \text{ м/с}$$

Ответ: $v_A = 3{,}6$ м/с, $v_B = 4{,}87$ м/с, $v_D = 3{,}12$ м/с.

Задача 5
Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Точка M совершает движение по закону $OM = S_r(t)$ вдоль желоба пластины, имеющей форму прямоугольника или круга радиусом R. Пластина вместе с жёлобом вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi_e = \varphi(t)$. Положительное направление отсчёта угла φ на рисунках к задаче 5 показано дуговой стрелкой.

Таблица 5

Условие	$OM = S_r(t)$, м	$\varphi = \varphi_e(t)$, рад	β град	R, см	t, с
1	$4\pi\sin(\pi t/4)$	$-3t^2+2$	30	6	2/3
2	$2\pi\cos(\pi t/6)$	$-t^2+1{,}2t$	45	4	2
3	$5\pi(2t^2-t^3)$	$2t^3-t^2$	60	4	1
4	$2{,}5\pi t^2$	$-2t^2+5t$	-45	2,5	1/2
5	$\pi\sin(\pi t/4)$	$4t^2-t$	-60	$3\sqrt{2}$	3
6	$7{,}5\pi(0{,}1t+0{,}3t^3)$	$2+\sqrt{2}\cos(\pi t/3)$	60	18	1
7	$10\sqrt{2}\pi\cos(2\pi t)$	$-4t^2+8t$	-30	12	1/8
8	$25\pi(t-3t^2)$	$-t^3+2t$	60	5	1/2
9	$3\pi(t^2/2-t)$	$2+6\sin(2\pi t/9)$	-45	6	3
10	$20\pi\cos(\pi t/4)$	$-0{,}5t^2+t$	30	60	4/3

На рис. 3, 7, 9 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины (пластина вращается в своей плоскости), на рис. 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10 ось вращения лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). Во всех вариантах положение точки M соответствует положительному значению дуги OM. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 5.

Вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t.

Указания к решению задачи 5

Относительным движением называется движение точки относительно подвижной системы отсчета.

Переносным движением точки называется движение подвижной системы отсчета, связанной с телом относительно неподвижной системы отсчета.

Сложным движением называется движение точки относительно неподвижной системы отсчета.

Скорость и ускорение точки при сложном движении называются абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.

Абсолютная скорость равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей, т.е. $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Величина скорости равна $v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r\, v_e \cos\left(\widehat{\vec{v}_r; \vec{v}_e}\right)}$.

Ускорение Кориолиса: $W_k = 2|\omega_e|\,|v_r|\,\sin(\widehat{\overline{\omega}_e; \overline{v}_r})$, где $\vec{\omega}_e$ – скользящий вектор, лежащий на оси переносного вращения и направленный так, что с конца этого вектора вращение видно против часовой стрелки.

Правило Жуковского построения вектора ускорения Кориолиса: к оси переносного вращения в данной точке ставится перпендикулярная плоскость; на эту плоскость проецируется вектор относительной скорости $\vec{v}_r$; полученную проекцию поворачивают на 90° в построенной плоскости в сторону ω_e.

Кинематическая теорема Кориолиса: абсолютное ускорение точки при сложном движении равна геометрической сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса, т.е. $\vec{W} = \vec{W}_r^{n} + \vec{W}_r^{\tau} + \vec{W}_e^{n} + \vec{W}_r^{\tau} + \vec{W}_k$.

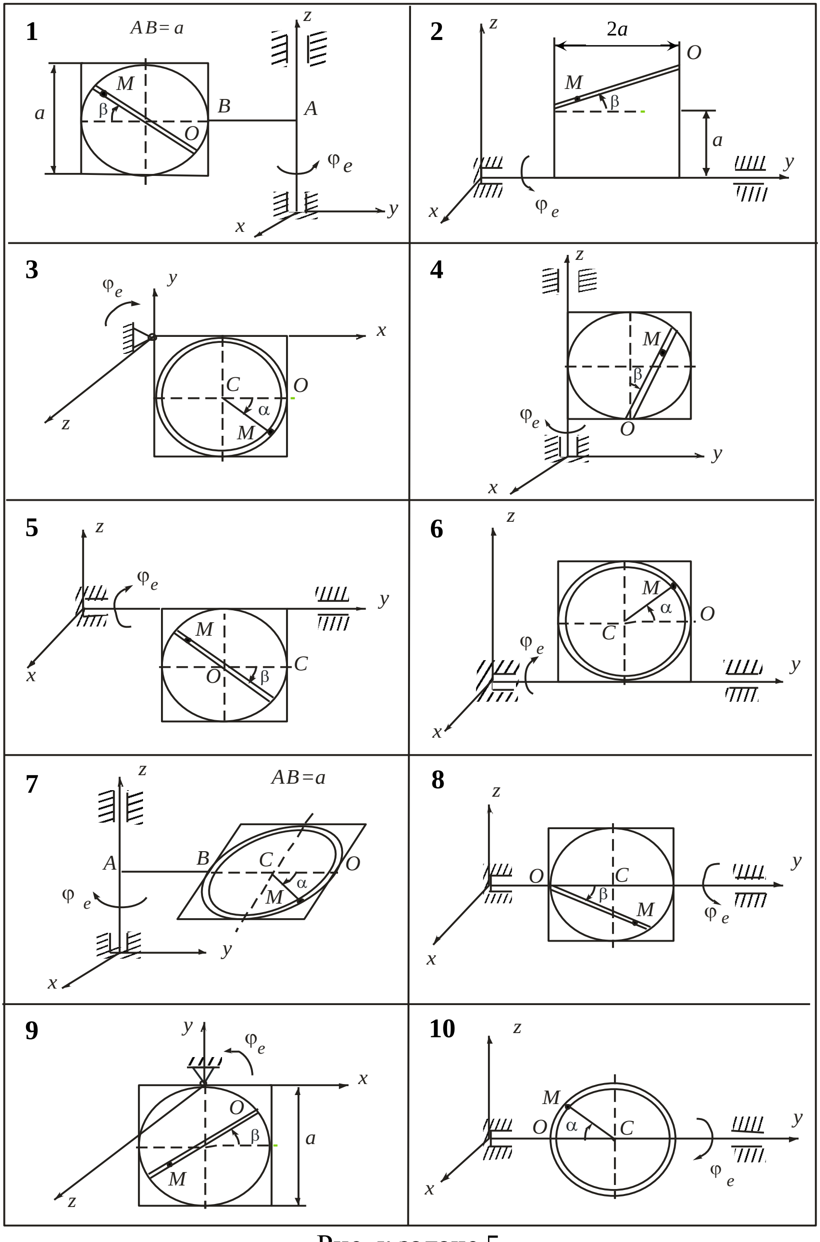


Рис. к задаче 5

Пример 5. Круглая пластина радиуса $R = 6$ см (рис. 25*) вращается вокруг оси O_1O_2 по закону $\varphi_e = 8t - 3t^2$ рад. Вдоль пластины по закону: $\breve{OM} = S_r(t) = \frac{\pi}{3}R(4t^2 - 3t^3)$ см движется точка M. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с.

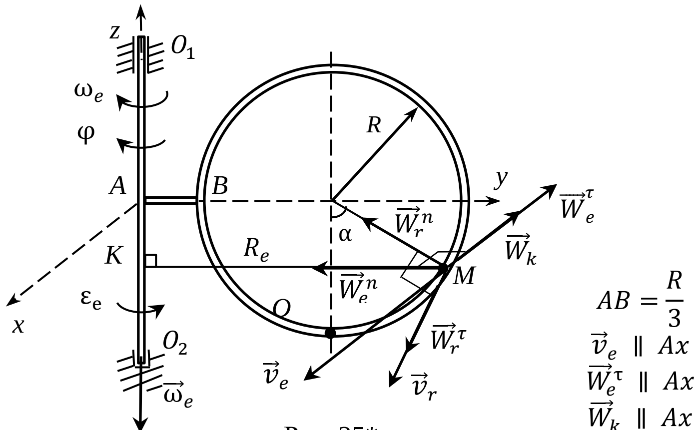


Рис. 25*

Решение

1. Определим положение точки M в данный момент:

$$\breve{OM} = S_r(1) = \frac{\pi}{3}R, \qquad \alpha = \frac{\breve{OM}}{R} = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{3}.$$

2. Относительным движением является движение точки по желобу:

$$v_r = \dot{S}_r = \frac{\pi}{3}R(8t - 9t^2),$$

при $t = 1$ с $v_r(1) = -\frac{\pi}{3}R = -2\pi = -6{,}28$ см/с.

Направление от точки O к точке M является положительным. Отрицательный знак v_r показывает, что вектор $\vec{v}_r$ направлен в противоположную сторону. Определим касательное ускорение

$$W_r^\tau = \dot{v}_r = \frac{\pi}{3}R(8 - 18t),$$

$$W_r^\tau(1) = \frac{\pi}{3}R\,(8 - 18 \cdot 1) = -\frac{10\pi R}{3} = -62{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Знаки W_r^τ и v_r одинаковы, следовательно, векторы $\vec{W}_r^\tau$ и $\vec{v}_r$ направлены в одну сторону по касательной к окружности.

$$W_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(-2\pi)^2}{6} = \frac{4\pi^2}{6} = 6{,}57 \text{ см/с}^2;$$

Вектор нормального ускорения направлен от точки M к центру окружности, перпендикулярно $\vec{W}_r^\tau$.

3. Переносным движением точки является вращение пластины вместе с точкой относительно неподвижной оси O_1O_2.

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 8 - 6t, \text{ при } t = 1 \text{ с } \omega_e(1) = 8 - 6 = 2 \text{ с}^{-1}$$

$$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = (8 - 6t)' = -6 \text{ с}^{-2}.$$

Знаки ω_e и ε_e различны, следовательно, дуги ω_e и ε_e направлены противоположно.

$R_e = KM$ – радиус переносного вращения, кратчайшее расстояние от точки M до неподвижной оси O_1O_2.

$$R_e = KM = AB + R + R \cdot \sin\alpha = \frac{R}{3} + R + R\sin 60° = 13{,}2 \text{ см}.$$

Скорость точки M в переносном движении:

$$v_e = |\omega_e|\, R_e = 2R_e = 2 \cdot 13{,}2 = 26{,}4 \text{ см/с}.$$

$$W_e^\tau = |\varepsilon_e|\, R_e = 6 \cdot 13{,}2 = 79{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{v}_e$ направлен перпендикулярно радиусу в сторону поворота дуги ω_e. Вектор $\vec{W}_e^\tau$ направлен перпендикулярно радиусу в сторону поворота дуги ε_e.

$$W_e^n = \omega_e^2\, R_e = 4 \cdot 13{,}2 = 52{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{W}_e^n$ направлен по R_e, перпендикулярно $\vec{W}_e^\tau$.

4. Ускорение Кориолиса:

$$W_k = 2|\omega_e|\,|v_r|\sin(\widehat{\vec{\omega}_e; \vec{v}_r}) = 2 \cdot 2 \cdot 6{,}28 \cdot \sin 30° = 12{,}56 \text{ см/с}^2.$$

5. Вычислим абсолютную скорость:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\left(\widehat{\vec{v}_r; \vec{v}_e}\right)} = \left|\widehat{\vec{v}_r; \vec{v}_e} = 90°\right| = 27{,}2 \text{ см/с}.$$

Найдем абсолютное ускорение точки

$$\vec{W} = \vec{W}_r^n + \vec{W}_r^\tau + \vec{W}_e^n + \vec{W}_r^\tau + \vec{W}_k.$$

Проецируем найденные ускорения на оси координат:

x: $W_x = -W_e^\tau - W_k = -79{,}2 - 12{,}56 = -91{,}76 \text{ см/с}^2$;

y: $W_y = -W_e^n - W_r^\tau\cos 60° - W_r^n\cos 30° = -89{,}89 \text{ см/с}^2$;

z: $W_z = -W_r^\tau\cos 30° + W_r^n\cos 60° = -51{,}1 \text{ см/с}^2$.

Итак, $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = 138{,}24 \text{ см/с}^2$.

Ответ: $v = 27{,}2$ см/с; $W = 138{,}24 \text{ см/с}^2$.

ДИНАМИКА

Задача 6
Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система приходит в движение из состояния покоя. Тела системы соединены друг с другом невесомыми, нерастяжимыми нитями, перекинутыми через блоки. Катки катятся по наклонным плоскостям без скольжения, при этом коэффициент трения качения $\delta = 0{,}05$ см, $r = 0{,}2$ м. Блоки и катки, радиусы инерции которых не указаны на рисунке к задаче 6, считать однородными сплошными.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*, её начальное удлинение равно λ_0. Грузы, массы которых равны нулю, на чертеже можно не изображать.

Определить скорость тела большей массы, когда его перемещение станет равным *S*. Данные для расчета приведены в табл. 6.1 и 6.2.

Таблица 6.1

Условие	Масса, кг					
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
1	10	0	12	16	18	0
2	0	15	0	14	20	10
3	0	4	2	6	8	0
4	3	0	2	4	0	7
5	0	20	25	32	0	12
6	30	0	15	0	12	18
7	40	0	20	30	15	0
8	0	50	60	0	80	40
9	8	0	0	10	12	14
10	0	12	0	10	8	14

Таблица 6.2

Условие	c_1, Н/м	c_2, Н/м	α, град	λ_0, м	R, *м*	S, м
1	200	0	30	-0,05	0,2	0,1
2	0	200	60	0,01	0,4	0,2
3	0	300	30	-0,02	0,1	1
4	300	0	45	0,015	0,2	1,5
5	0	400	30	-0,02	0,1	3
6	400	0	60	0,03	0, 4	1,2
7	400	0	45	-0,03	0,2	1,8
8	0	500	30	-0,01	0,5	3,2
9	200	0	60	0,02	0,2	2,5
10	0	100	45	0,05	0,3	2

Указания к решению задачи 6

Теорема об изменении кинетической энергии имеет вид:

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)},$$

где $T,\ T_0$ – кинетическая энергия системы в данный и начальный момент времени, $\sum A_k^{(e)}, \sum A_k^{(i)}$ – сумма работ внешних и внутренних сил.

Кинетическая энергия твердого тела:

- при поступательном движении

$$T = \frac{m\,v^2}{2};$$

- при вращательном движении

$$T = \frac{I\,\omega^2}{2}$$

- при плоскопараллельном движении

$$T = \frac{m\,v_\text{c}^2}{2} + \frac{I_\text{c}\,\omega^2}{2}.$$

Работа силы $A(\vec{F}) = F\,S\,\cos\left(\widehat{\vec{F}\,\vec{S}}\right)$.

Работа момента пары сил $A(\vec{M}) = \pm M\,\varphi$.

Работа силы упругости пружины:

$$A(\vec{F}_\text{тр}) = \frac{\text{c}}{2}(\lambda_0^2 - \lambda^2)$$

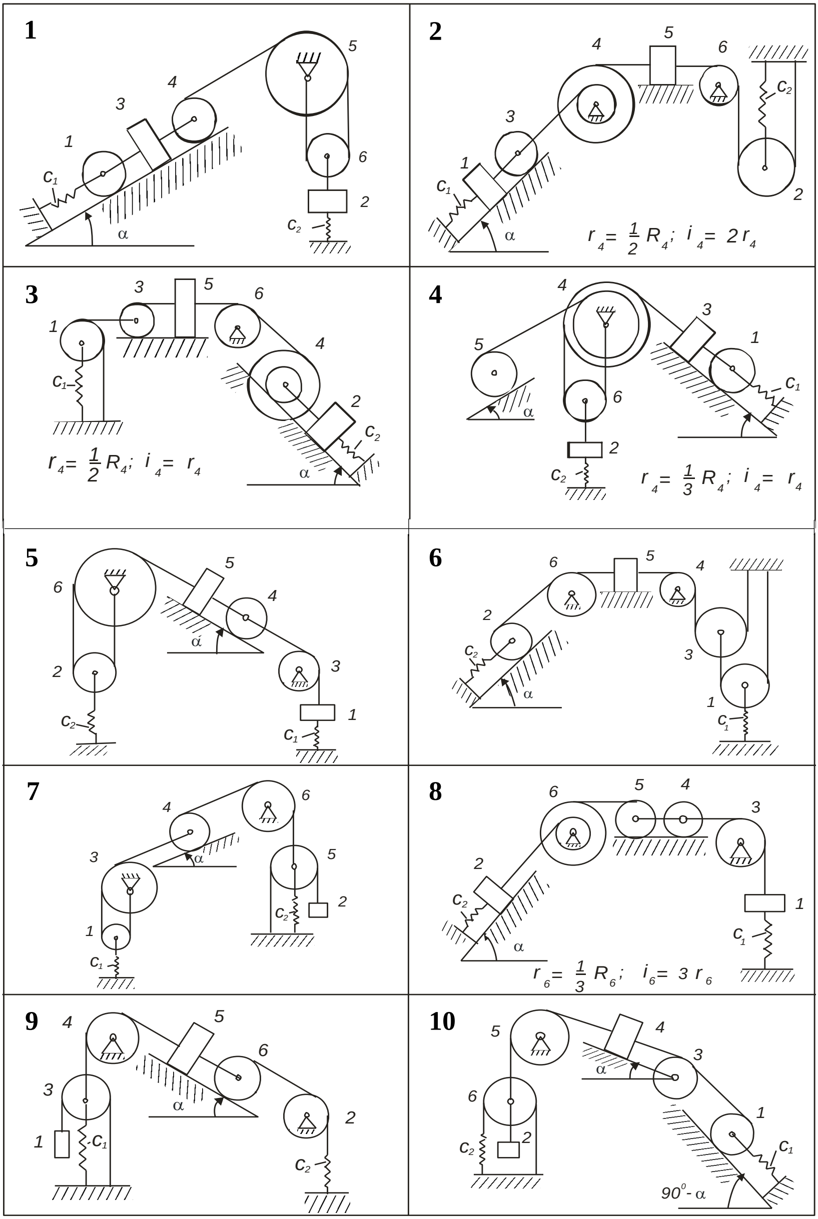


Рис. к задаче 6

Пример 6. Механическая система приходит в движение из состояния покоя (рис. 26*). Массы тел: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 3$ кг, $m_3 = 2$ кг, $m_4 = 1$ кг. К телу 1 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости $c = 200$ Н/м, начальная деформация которой $\lambda_0 = -0{,}04$ м. Учитывая трение скольжения тела 1, определить его скорость в момент, когда $S = 0{,}1$ м. Коэффициент трения скольжения: $f_1 = 0{,}1$. Блок 3 считать однородным сплошным. Нити предполагаются невесомыми и нерастяжимыми, $\alpha = 30°$.

Решение

1. Выразим скорости всех точек и угловые скорости всех тел через скорость 1 тела. $v_A = v_1$,

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{v_1}{r_2} = \frac{v_B}{R_2}, \qquad v_B = \frac{v_1\, R_2}{r_2} = 3v_1, \qquad v_D = v_B = 3v_1,$$

$$\omega_3 = \frac{v_D}{2R_3} = \frac{3v_1}{2R_3} = \frac{v_{c3}}{R_3}, \quad v_{c_3} = \frac{3v_1\, R_3}{2R_3} = \frac{3v_1}{2}, \qquad v_4 = v_{c_3} = \frac{3v_1}{2}.$$

2. Определим кинетическую энергию системы.

Тело 1 совершает поступательное движение, поэтому

$$T_1 = \frac{m_1\, v_1^2}{2} = \frac{v_1^2}{2}.$$

Блок 2 совершает вращательное движение. Момент инерции неоднородного блока: $I_2 = m_2 i_2^2 = m_2\left(\sqrt{3}\, r_2\right)^2 =$ $= 3 \cdot 3r_2^2 = 9r_2^2$,

угловая скорость блока

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2},$$

значит, кинетическая энергия:

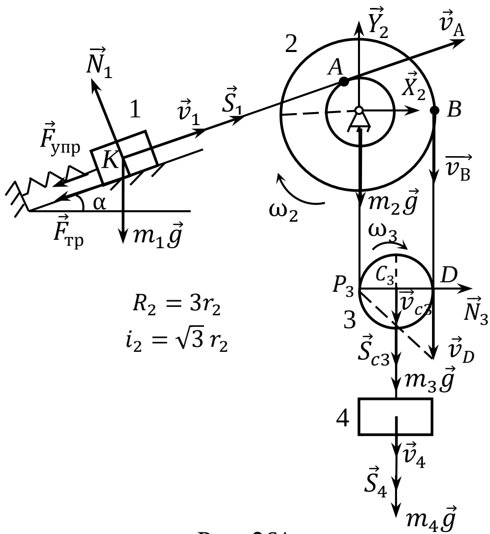


Рис. 26*

$$T_2 = \frac{I_2\ \omega_2^2}{2} = \frac{9r_2^2\ v_1^2}{2\ r_2^2} = \frac{9v_1^2}{2}.$$

Подвижный блок 3 совершает плоскопараллельное движение. Момент инерции однородного блока: $I_3 = \frac{m_3\ R_3^2}{2}$, его угловая скорость $\omega_3 = \frac{3v_1}{2R_3}$, тогда кинетическая энергия равна:

$$T_3 = \frac{m_3\ v_{c_3}^2}{2} + \frac{I_3\ \omega_3^2}{2} = \frac{m_3\ 9v_1^2}{8} + \frac{m_3\ R_3^2\ 9\ v_1^2}{16R_3^2} = \frac{27v_1^2}{8}.$$

Брус 4 совершает поступательное движение.

$$T_4 = \frac{m_4\ v_4^2}{2} = \frac{m_4\ 9v_1^2}{8} = \frac{9v_1^2}{8}.$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{9v_1^2}{2} + \frac{27v_1^2}{8} + \frac{9v_1^2}{8} = \frac{19v_1^2}{2}.$$

3. Вычислим работу внешних сил.

Работа реакций связи:

$A(\vec{N}_1) = N_1\ S\ \cos 90° = 0;$

$A(\vec{X}_2) = A(\vec{Y}_2) = 0$, так как точка приложения сил не перемещается,

$A(\vec{N}_3) = 0$, так как сила приложена к мгновенному центру скоростей (P_3).

Работа заданных сил:

$A(m_1\vec{g}) = m_1 g \cdot S_1 \cos(90° + \alpha) = \ = -g \cdot S_1 \cdot \sin\alpha = -\,gS_1/2;$

$A(\vec{F}_{тр}) = -F_{тр} \cdot S_1 \cos 180° = -fN_1 \cdot S_1.$

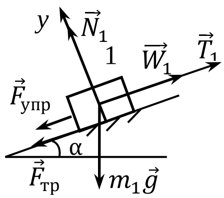


Рис. 27*

Для определения реакции опоры N_1 рассмотрим уравнение движения тела 1. Освобождаем брус от связи с системой (рис. 27*), заменяя ее действие натяжением нити $\vec{T}_1$.

$$m_1\vec{W}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{тр} + \vec{T}_1.$$

Проецируем уравнение на ось y, на которой лежит $\vec{N}_1$:

$$y\colon\ 0 = -m_1 g\ \cos\alpha + N_1,$$

откуда $N_1 = m_1 g\ \cos\alpha = \sqrt{3}g/2$.

$A(\vec{F}_{тр}) = -fN_1\,S_1 = -\sqrt{3}gfS_1/2 = -0{,}05\sqrt{3}\ gS_1.$

$A(m_2\vec{g}) = m_2 g\ 0 = 0$, точка приложения силы неподвижна.

$$A(m_3\vec{g}) = m_3 g S_{c3}\cos 0^\circ = \left|S_{c3} = \frac{3S_1}{2}\right| = m_3 g \frac{3}{2} S_1 = 3gS_1;$$

$$A(m_4\vec{g}) = m_4 g S_4 \cos 0^\circ = \left|S_{c3} = \frac{3S_1}{2}\right| = m_4 g \frac{3S_1}{2} = 3gS_1/2\,.$$

Первоначально пружина была сжата, затем – растягивается. Работа силы упругости пружины:

$$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda^2) = |\lambda_0 = -0{,}04\text{ м};\ \lambda = \lambda_0 + S_1| =$$

$$= \frac{c}{2}({\lambda_0}^2 - {\lambda_0}^2 - 2\lambda_0 S_1 - S_1^2) = -\frac{c}{2}(2\lambda_0 S_1 + S_1^2) = 8S_1 - 100S_1^2.$$

Таким образом, сумма работ внешних сил

$$\sum A_k^{(e)} = A(m_1\vec{g}) + A(\vec{F}_{\text{тр}}) + A(m_2\vec{g}) + A(m_3\vec{g}) + A(m_4\vec{g}) + A(\vec{F}_{\text{упр}}),$$

$$A(\vec{F}_{\text{упр}}) = \left(-1 - 0{,}05\sqrt{3} + 6 + 3\right) gS_1/2 + 8S_1 - 100S_1^2 = 2{,}88\text{ Дж.}$$

4. По теореме об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)},$$

где $T_0 = 0$, так как в начальный момент система тел находится в покое.

$\sum A_k^{(i)} = 0$ – сумма работ внутренних сил равна нулю, так как тела системы являются абсолютно твердыми, нити – нерастяжимыми. Откуда $T = \sum A_k^e$. Подставим найденные значения:

$$\frac{19v_1^2}{2} = 2{,}88, \Rightarrow\ v_1 = 0{,}55\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Задача 7
Применение общего уравнения динамики к изучению движения механической системы

Механическая система состоит из ступенчатых шкивов или однородных дисков, обмотанных нитями, и грузов. Система приходит в движение под действием силы тяжести и пары сил с моментом *M*, приложенным к одному из шкивов, радиус которого r = 0,1 м. Положительное направление вращения указано на рисунках к задаче 7.

Учитывая скольжение тела 1 (рис. 2, 6, 8, 10) и сопротивление качению тела 4 (рис. 1, 3, 5 ,7, 9), катящегося без скольжения, (r_4 = 0,2 м), определить ускорение центра масс тела 1.

Коэффициент трения скольжения грузов о плоскость f, коэффициент трения качения катков δ и все необходимые для решения данные приведены в табл. 7.1, 7.2.

Таблица 7.1

Условие	Масса, кг			
	m_1	m_2	m_3	m_4,
1	8	8	6	12
2	10	9	18	10
3	13	12	8	14
4	12	16	18	20
5	15	18	12	16
6	17	20	15	32
7	20	30	40	50
8	30	35	20	36
9	42	36	72	80
10	60	45	36	60

Таблица 7.2

Условие	α, град	r, см	δ, см	f	M, Н · м
1	30	20	0,05	0,1	34
2	45	50	0,04	0,12	26
3	60	25	0,01	0,2	50
4	30	45	0,02	0,11	20
5	45	30	0,03	0,3	16
6	60	32	0,01	0,15	10
7	45	20	0,02	0,18	42
8	60	36	0,03	0,17	24
9	30	52	0,01	0,1	32
10	60	48	0,06	0,12	25

Блоки и катки, радиусы инерции которых не указаны на рисунках к задаче, считать однородными сплошными. Нити предполагаются невесомыми и нерастяжимыми. Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

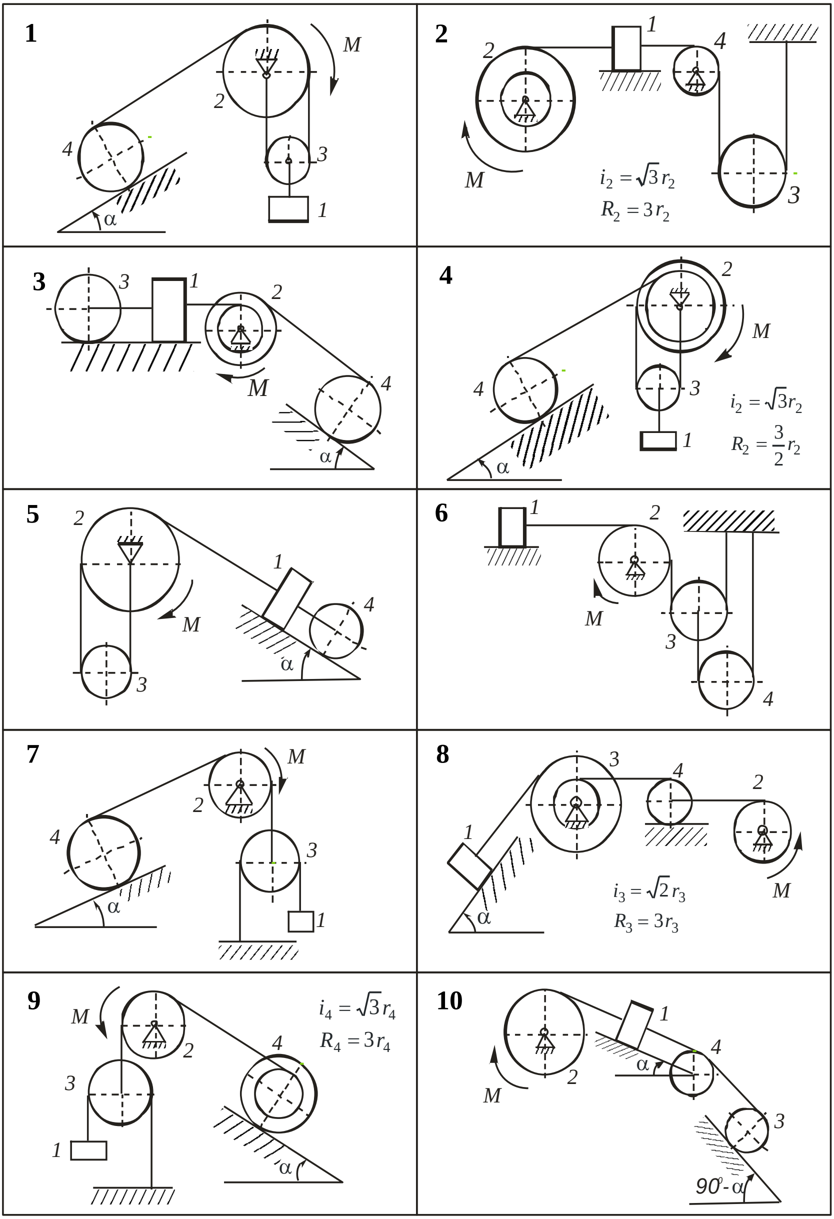


Рис. к задаче 7, 8

Указания к решению задачи 7

Общее уравнение динамики используется для определения ускорений точек системы тел, для составления дифференциальных уравнений движения механических систем и имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) + \sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{ин}}),$$

где $\sum \delta A(\vec{F}_k)$ и $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{ин}})$– суммы элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении.

Общее уравнение динамики, как правило, применяется в следующем порядке:

1) определяется число степеней свободы механической системы и выбираются независимые перемещения, число которых равно числу степеней свободы;

2) находятся зависимости остальных возможных перемещений через независимые; при помощи полученных отношений устанавливается связь возможных ускорений точек и угловых ускорений тел;

3) вычисляются силы инерции и моменты сил инерции Даламбера, их вектора расставляются на рисунке;

4) вычисляется сумма работ сил инерции Даламбера и моментов инерции Даламбера на возможном перемещении;

5) вычисляется сумма работ активных сил на возможном перемещении;

6) записывается общее уравнение динамики и определяются искомые величины.

Общее уравнение динамики можно использовать для определения реакций связей системы тел. Это возможно в случае, когда ускорения точек системы уже известны.

Пример 7. Механическая система состоит из однородных дисков и груза, прикреплённого к диску 2 (рис. 28*). Система приходит в движение под действием силы тяжести и пары сил с моментом $\text{М} = 16\ \text{Н} \cdot \text{м}$, приложенным к шкиву 2, радиус которого равен $r = 0{,}2$ м. Массы тел: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = 8$ кг. Коэффициент трения скольжения тела 1 равен 0,1. Определить ускорение тела 1, используя общее уравнение динамики. Блоки считать однородными сплошными. Нити предполагаются невесомыми и нерастяжимыми.

Решение

1. Число степеней данной механической системы равно единице. Направим движение механической системы в сторону поворота момента M.

2. Система приходит в движение из состояния покоя, поэтому направления ускорений тел соответствуют направлению движения этих тел. Определим зависимости между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел, выражая их значения через ускорение тела 1:

$$\varepsilon_2 = \frac{W_1}{r_2},\ W_A = W_1 = W_B,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{W_B}{2r_3} = \frac{W_1}{2r_3},$$

$$W_{c3} = \frac{W_B}{2} = \frac{W_1}{2}, W_{c4} = \frac{W_D}{2} = \frac{W_1}{4}\ ,\quad \varepsilon_4 = \frac{W_D}{2r_4} = \frac{W_1}{4r_4}.$$

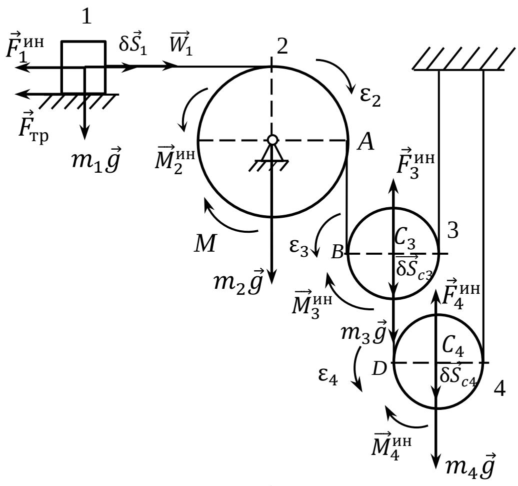


Рис. 28*

3. Вектора сил инерции тел системы направлены в сторону, противоположную соответствующим ускорениям.

Силы инерции тел системы

$$F_1^{\text{ин}} = m_1 W_1,\ F_3^{\text{ин}} = m_3 W_{c3} = \frac{m_3 W_1}{2}, F_4^{\text{ин}} = m_4 W_{c4} = \frac{m_4 W_1}{4}.$$

Найдем моменты сил инерции блоков 2, 3, 4:

$$M_2^{\text{ин}} = I_2\ \varepsilon_2 = \left| I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \right| = \frac{m_2 r_2 W_1}{2},$$

$$M_3^{\text{ин}} = I_3\ \varepsilon_3 = \left| I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} \right| = \frac{m_3 r_3 W_1}{4},$$

$$M_4^{\text{ин}} = I_4\ \varepsilon_4 = \left| I_4 = \frac{m_4 r_2^2}{2} \right| = \frac{m_4 r_2 W_1}{8}.$$

4. Работа сил инерции на возможном перемещении примет вид:

$$\sum_k \delta A(F_k^{\text{ин}}) = F_1^{\text{ин}} \delta S_1 \cos 180° - M_2^{\text{ин}} \delta\varphi_2 + F_3^{\text{ин}} \delta S_{c3} \cos 180° -$$

$$-M_3^{\text{ин}} \delta\varphi_3 + F_4^{\text{ин}} \delta S_{c4} \cos 180° - M_4^{\text{ин}} \delta\varphi_4\,.$$

Учитывая, что

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1}{r_2},\ \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{2 r_3},\ \delta\varphi_4 = \frac{\delta S_1}{4 r_4}\ ,\ \delta S_{c3} = \frac{\delta S_1}{2},\ \delta S_{c4} = \frac{\delta S_1}{4},$$

получим

$$\sum_k \delta A(F_k^{\text{ин}}) = -\,W_1 \delta S_1 \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8} m_3 + \frac{3}{32} m_4 \right) = -\,16\ W_1 \delta S_1.$$

5. Элементарная работа приложенных активных сил равна:

$$\sum_k \delta A(F_k) = m_3 g \delta S_{c3} cos 0° + m_4 g \delta S_{c4} \cos 0° - F_{\text{тр}} \delta S_1 + M \delta\varphi_2 =$$

$$= 16 \frac{\delta S_1}{r_2} + 10 \cdot 9{,}8 \frac{\delta S_1}{2} + 8 \cdot 9{,}8 \frac{\delta S_4}{4} - 0{,}1 \cdot 8 \cdot 9{,}8 \delta S_1 \cong 60{,}76\ \delta S_1.$$

Подставим суммы элементарных работ инерционных сил и сил инерции в общее уравнение динамики:

$$-\,16\ W_1 \delta S_1 + 60{,}76\ \delta S_1 = 0, \quad (-\,16\ W_1 + 60{,}76) \cdot\ \delta S_1 = 0,$$

$$\delta S_1 \neq 0,\ \ W_1 \cong 3{,}8\ \text{м/с}^2\ .$$

Ответ: $W_1 \cong 3{,}8\ \text{м/с}^2$.

Задача 8
Применение уравнения Лагранжа второго рода к изучению движения механической системы

Механическая система состоит из однородных дисков или ступенчатых шкивов, обмотанных нитями, и грузов, прикреплённых к этим нитям. Система приходит в движение под действием силы тяжести и пары сил с моментом M, приложенным к одному из шкивов, радиус которого r = 0,1м. Положительное направление вращения указано на рисунках к задаче 8. Учитывая трение скольжения тела 1 (рис. 2, 4, 6, 8, 10) и качение тела 3 (рис. 2, 3, 5, 7, 9), катящегося без скольжения (r_3 = 0,6 м), определить ускорение центра масс тела 1.

Массы тел заданы в табл. 7.1, коэффициенты трения скольжения грузов о плоскость f и трения качения катков δ заданы в табл. 7.2. Блоки и катки, радиусы инерции которых не указаны на рисунках к задаче 8, считать однородными сплошными цилиндрами. Нити предполагаются невесомыми и нерастяжимыми.

Указания к решению задачи 8

Уравнение Лагранжа II рода используется для определения ускорений точек системы тел, для составления дифференциальных уравнений движения механических систем и имеет вид

$$\frac{d}{d}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где T – кинетическая энергия системы, q – обобщенная координата, $\dot{q}$ – обобщенная скорость, Q – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q.

Уравнение Лагранжа II рода можно применять в следующем порядке:

1) определяется число степеней свободы механической системы и выбираются S независимых обобщенных координат;

2) находятся зависимости перемещений точек и углов поворотов тел от обобщенных координат, а скоростей точек и угло-

вых скоростей тел – от обобщенных скоростей ($q = S,\ \dot{q} = v$ или $q = \varphi,\ \dot{q} = \omega$);

3) вычисляется кинетическая энергия системы, частные и полные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и обобщенным координатам ($\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{d}{d}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)$);

4) на чертеже расставляются все активные силы, и вычисляется сумма работ этих сил через обобщенные координаты и обобщенные скорости;

5) вычисляются обобщенные силы по формуле

$$Q_i = \frac{\delta A}{\delta q_i}\Big|_{\delta q_j = 0,\ j \neq i};$$

6) записывается уравнение Лагранжа II рода и определяются искомые величины.

Пример 8. Механическая система приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = 16$ Н · м, приложенным к шкиву 2, радиус которого $r = 0{,}2$ м (рис. 29*). Коэффициент трения скольжения тела 1 равен 0,1. Массы тел: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = 8$ кг. Используя уравнение Лагранжа II рода, определить ускорение первого тела. Блоки считать однородными сплошным. Нити предполагаются невесомыми и нерастяжимыми.

Решение

1. Число степеней данной механической системы равно единице. Направим движение механической системы в сторону поворота момента M. В качестве обобщенной координаты выберем перемещение первого тела: $S_1 = q$, обобщенная скорость первого тела $v_1 = \dot{S}_1 = \dot{q}$.

2. Выразим скорости точек, угловые скорости тел через обобщенную скорость $\dot{q}$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{\dot{q}}{r_2},\ v_A = v_B = \dot{q},\ \omega_3 = \frac{v_B}{2r_3} = \frac{\dot{q}}{2r_3},$$

$$v_{C3} = \frac{v_B}{2} = \frac{\dot{q}}{2},\ v_{C4} = \frac{v_D}{2} = \frac{\dot{q}}{4}\ ,\ \omega_4 = \frac{v_D}{2r_4} = \frac{\dot{q}}{4r_4},$$

$$S_{C3} = \frac{q}{2}, S_{c4} = \frac{q}{4}\ ,\ \omega_2 = \frac{q}{r_2}.$$

3. Определим кинетическую энергию системы. Брус 1 совершает поступательное движение, блок 2 – вращательное движение, тела 3 и 4 совершают плоскопараллельное движение.

Моменты инерции тел (блоки – однородные, сплошные)

$I_2 = \dfrac{m_2\, r_2^2}{2}$, $I_3 = \dfrac{m_3\, r_3^2}{2}$, $I_4 = \dfrac{m_4\, r_2^2}{2}$.

Кинетическая энергия системы тел: $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{8}{2}\dot{q}^2 = 4\dot{q}^2$$

$$T_2 = \frac{I_2\,\omega_2^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{10r_2^2}{2}\left(\frac{\dot{q}}{r_2}\right)^2 = \frac{5}{2}\dot{q}^2\ \cdot$$

$$T_3 = \frac{m_3\,v_{C3}^2}{2} + \frac{I_3\,\omega_3^2}{2} = \frac{6}{2}\left(\frac{\dot{q}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{6r_3^2}{2}\left(\frac{\dot{q}}{2r_3}\right)^2 = \frac{9}{8}\dot{q}^2\ \cdot$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_{C4}^2}{2} + \frac{I_4\omega_4^2}{2} = \frac{8}{2}\left(\frac{\dot{q}}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{8r_4^2}{2}\cdot\left(\frac{\dot{q}}{4r_4}\right)^2 = \frac{3}{8}\dot{q}^2$$

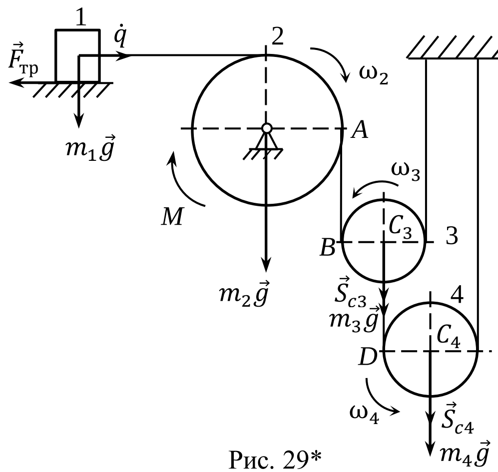


Рис. 29*

$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \dot{q}^2\left(4 + \frac{5}{2} + \frac{9}{8} + \frac{3}{8}\right) = 8\dot{q}^2.$

Производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial(8\dot{q}^2)}{\partial \dot{q}} = 16\dot{q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \qquad \frac{d}{d}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = 16\ddot{q}.$$

4. Сумма работ активных сил

$$A(F) = m_3 g S_{c3} \cos 0^0 + m_4 g S_{c4} \cos 0^0 + F_{\text{тр}} S_1 \cos 180^0 + M\varphi_2 =$$

$$= 10g\frac{q}{2} + 8g\frac{q}{4} - 0{,}1 \cdot 8 \cdot gq + 16\frac{q}{r_2} \cong 60{,}76q.$$

5. Вычислим обобщенную силу по формуле

$$Q = \frac{\delta A}{\delta q} \cong 60{,}76 \text{ Дж}.$$

6. Подставим в уравнение Лагранжа II рода и получим

$$16\ddot{q} = 60{,}76, \quad \ddot{q} \cong 3{,}8 \text{ м/с}^2 \,.\, \ddot{q} = W_1 = 3{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\ddot{q} = 3{,}8 \text{ м/с}^2$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. *Справочник* по теоретической механике / В.Н. Васильев и др. Чуваш. ун-т. Чебоксары, 1997. 164 с.

2. *Добронравов В.В.,* Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1974.

3. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1990. 608 с.

4. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1986.

Руководства к решению задач и сборники задач

1. *Сборник* заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского. М.: Интеграл-преф., 2005. 384 с.

2. *Айзенберг Т.Б.,* Воронков И.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1968. 312 с.

3. *Бать М.И.,* Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 ч. М.: Наука, 1990. Ч.1. 532 с.; Ч 2. 428 с.

4. *Мещерский И.В*. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986. 448 с.

5. *Мисюрев М.А*. Методика решения задач по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1962. 388 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Теоретическая механика

Учебная программа и контрольные задания
для студентов заочного отделения

Редактор М.В. Перцева
Компьютерная верстка и правка

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 12.02.2018. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,64. Тираж 100 экз. Заказ № 894.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15