Пределы

Производные

Функции нескольких переменных

Интегралы

Чебоксары 2005

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Чувашский государственный университет имени И.Н.Ульянова

Пределы
Производные
Функции нескольких переменных
Интегралы

Учебное пособие

Чебоксары 2005

УДК 517

Авторы-составители:
В. Г. Агаков, П. С. Атаманов,
А. Н. Быкова, Т. В. Картузова,
Н. Д. Поляков, А. П. Тарасов,
Л. Н. Шегай

Пределы. Производные. Функции нескольких переменных. Интегралы: Учебное пособие / Авторы-сост. В. Г. Агаков, П. С. Атаманов, А. Н. Быкова, Т. В. Картузова и др. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2005. **??** с.

ISBN 5-7677-0996-5

Рассмотрены разделы, посвященные теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислениям и функциям нескольких переменных. Изложение сопровождается решенными примерами и задачами для самостоятельной работы.

Для студентов младших курсов технических факультетов.

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Отв. редактор: профессор В. Г. Агаков

УДК 517

ISBN 5-7677-0996-5

Глава 1.

Предел. Непрерывность функции

§1. Числовая последовательность. Ее предел

Пусть задана функция $y = f(x)$ и в ней $x = n$, n — натуральное число. Находятся $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$, ... Получается последовательность чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ...,\ n \to \infty. \tag{1.1}$$

Определение 1.1. Числовой последовательностью (**??**) называется упорядоченная совокупность значений функции натурального аргумента. Числа a_1, a_2, a_3, ... — члены последовательности, a_n — общий член последовательности.

Пример 1.1. $f(n) = \dfrac{1}{n}$. Для этой функции получается убывающая последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

Пример 1.2. $f(n) = 2n - 1$. Для этой функции составляется возрастающая числовая последовательность:

$$1, 3, 5, 7, ..., 2n - 1, ...$$

Пример 1.3. Пусть последовательность задана общим членом $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Для него получается возрастающая последовательность, все члены которой меньше числа $M = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...$$

Пример 1.4. Если общий член последовательности имеет вид $a_n = \dfrac{4n-1}{3n-1}$, то будет следующая убывающая последовательность:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{11}{8}, \frac{15}{11}, \ldots, \frac{4n-1}{3n-1}, \ldots$$

Все ее члены больше числа $m = \dfrac{4}{3}$.

В примере **??** с увеличением номера члена число $\left|a_n - \dfrac{1}{2}\right|$ убывает и стремится к нулю. Число $\dfrac{1}{2}$ будет пределом последовательности.

В примере **??** с увеличением номера члена число $\left|a_n - \dfrac{4}{3}\right|$ также убывает и стремится к нулю. Число $\dfrac{4}{3}$ будет пределом этой последовательности.

Определение 1.2. Число A называется пределом числовой последовательности (**??**), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер члена N последовательности, что при всяком номере члена $n \geqslant N$ выполняется условие $|a_n - A| < \varepsilon$, что записывается равенством $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Определение 1.3. Числовая последовательность, имеющая предел, называется сходящейся последовательностью, не имеющая предела — расходящейся.

Последовательности в примерах **??**, **??**, **??** сходящиеся, в примере **??** — расходящаяся.

Определение 1.4. Если с возрастанием номера члены числовой последовательности возрастают и любой член ее меньше некоторого числа M, т.е. $a_n < M$, то такая последовательность называется ограниченной справа (сверху) (см. пример **??**).

Определение 1.5. Если с возрастанием номера члены числовой последовательности убывают и любой член ее больше некоторого числа m, т.е. $a_n > m$, то такая последовательность называется ограниченной слева (снизу) (см. пример **??**).

Теорема 1.1. Если последовательность возрастает и ограничена справа числом M, то она имеет предел, не превосходящий числа M.

В примере **??** возрастающая последовательность ограничена числом $M = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Теорема 1.2. Если последовательность убывает и ограничена слева числом m, то она имеет предел, равный или больше числа m.

В примере **??** убывающая последовательность ограничена слева числом $\frac{4}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{3n-1}=\frac{4}{3}$.

§2. Предел функции

Пусть для функции $y=f(x)$ задана последовательность значений аргумента x, стремящихся к некоторому числу a:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \to a.$$

Пусть соответствующая последовательность значений функции стремится к некоторому числу A:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ... \to A.$$

Определение 2.1. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если для любой последовательности значений аргумента, стремящихся к a, последовательность соответствующих значений функции стремится к A, что записывается равенством $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Пример 2.1. Пусть задана функция $y=x^2$ и пусть для нее последовательность значений аргумента стремится к 2:

$$1,9;\ 1,99;\ 1,999;\ 1,9999;\ ... \to 2.$$

Соответствующая последовательность значений функции стремится к числу 4:

$$(1,9)^2;\ (1,99)^2;\ (1,999)^2;\ (1,9999)^2;\ ... \to 4.$$

Заметим, что x стремится к 2 слева, что символически записывается $x\to 2-0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 2-0}x^2=4$.

Рассмотрим другую последовательность значений аргумента, стремящихся к числу 2:

$$2,1;\ 2,01;\ 2,001;\ 2,0001;\ ... \to 2.$$

Для нее соответствующая последовательность значений функции будет:

$$(2,1)^2;\ (2,01)^2;\ (2,001)^2;\ (2,0001)^2;\ ... .$$

Она стремится также к числу 4.

Заметим, что x стремится к 2 справа, что символически записывается $x \to 2+0$. Тогда $\lim\limits_{x \to 2+0} x^2 = 4$.

Справедливо: $\lim\limits_{x \to 2-0} x^2 = \lim\limits_{x \to 2+0} x^2 = 4$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Определение 2.2. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ (или в точке $x = a$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечания.

1. Выражения $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ представляют односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x = a$. Первое из них есть левосторонний предел, второе — правосторонний предел. Если они конечные числа и равны между собой, то предел функции существует, т.е. $b_1 = b_2 = A$,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

2. В определениях предела функции точка $x = a$ не обязательно принадлежит области определения функции.

3. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не является конечным числом, то этот случай соответствует не существованию предела функции в точке $x = a$.

Пример 2.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10}{x^2} = \infty$ (бесконечность).

Определение 2.3. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число M, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 2.3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{10}{x^2} = 0$.

§3. Бесконечно большие величины

Определение 3.1. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для сколь угодно большого $M > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ и отличных от a, выполняется условие $|f(x)| > M$.

Пример 3.1. $y = \dfrac{5}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{5}{x-3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3+0} \frac{5}{x-3} = \infty.$$

Данная функция бесконечно большая как при $x \to 3-0$, так и при $x \to 3+0$. Схематический график показан на рис. **??**.

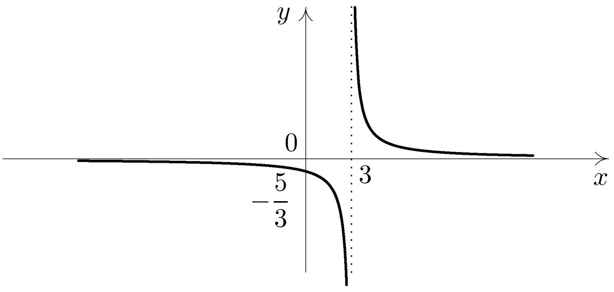

Рис. 1

§4. Бесконечно малые величины и их свойства

Определение 4.1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если для всякого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, выполняется $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Из определения следует, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, также может быть $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Пример 4.1. $y = \sin(x-1)$, $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1) = 0$. Функция $\sin(x-1)$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

Пример 4.2. $y = \dfrac{2}{3x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{3x} = 0$. Функция $\dfrac{2}{3x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$.

Определение 4.2. Функция $f(x)$, все значения которой на отрезке $[a; b]$ удовлетворяют условию $|f(x)| \leqslant M$, где $M > 0$, называется ограниченной на этом отрезке.

Если функция $y = f(x)$ при $x \to a$ имеет предел, отличный от нуля, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ есть величина, ограниченная в окрестности точки $x = a$.

Теорема 4.1. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $x \to a$.

Доказательство. По определению бесконечно малой $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ или $|\alpha(x)| < \varepsilon$, число $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое. Пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$, где $M > 0$ — сколь угодно большое число. Тогда $|\alpha(x)| < \dfrac{1}{M}$ или $\dfrac{1}{|\alpha(x)|} > M$, т.е. функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой.

Свойство 4.1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая величина.

Доказательство. Пусть заданы n бесконечно малых $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ при $x \to a$. По определению бесконечно малой:

$$|\alpha_1(x)| < \varepsilon_1,\ |\alpha_2(x)| < \varepsilon_2,\ |\alpha_3(x)| < \varepsilon_3,\ ...,\ |\alpha_n(x)| < \varepsilon_n,$$

числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$ — сколь угодно малые положительные числа. Пусть наибольшее из чисел ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n есть ε_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Обозначив $\varepsilon_k = \varepsilon$, можно записать:

$$|\alpha_1(x)| < \varepsilon,\ |\alpha_2(x)| < \varepsilon,\ |\alpha_3(x)| < \varepsilon,\ ...,\ |\alpha_n(x)| < \varepsilon.$$

Если ε — сколь угодно малое, то $\dfrac{\varepsilon}{n}$ тоже сколь угодно малое, т.е.

$$|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{n},\ |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{n},\ |\alpha_3(x)| < \frac{\varepsilon}{n},\ ...,\ |\alpha_n(x)| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Применяется свойство модуля суммы, который не больше суммы модулей:

$$|\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) + ... + \alpha_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| + |\alpha_3(x)| + ... + |\alpha_n(x)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + ... + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Получено

$$|\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) + ... + \alpha_n(x)| < \varepsilon,$$

то по определению сумма $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) + ... + \alpha_n(x)$ — бесконечно малая величина.

Свойство 4.2. Произведение ограниченной переменной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Следствие 4.1. Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая величина.

Следствие 4.2. Частное от деления бесконечно малой на переменную, отличную от бесконечно малой, является бесконечно малой величиной.

Свойство 4.3. Произведение конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Теорема 4.2. Если функция $y = f(x)$ представима в виде суммы постоянного числа A и бесконечно малой α при $x \to a$ (или $x \to \infty$): $y = A + \alpha$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (или $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$). Обратно, если $\lim\limits_{x \to a} y = A$ (или $\lim\limits_{x \to \infty} y = A$), то $y = A + \alpha$, α — бесконечно малая.

Доказательство. Из равенства $y = A+\alpha$ следует $|y-A| = |\alpha|$. По определению бесконечно малой $|\alpha| < \varepsilon$, ε — сколь угодно малое положительное число. Тогда $|y - A| < \varepsilon$, это значит, что $\lim\limits_{x \to a} y = A$ (или $\lim\limits_{x \to \infty} y = A$). Обратно, если $\lim\limits_{x \to a} y = A$ (или $\lim\limits_{x \to \infty} y = A$), то $|y - A| < \varepsilon$. Если обозначить $y - A = \alpha$, то для всех значений α, начиная с некоторого, $|\alpha| < \varepsilon$. Это означает, что α — бесконечно малая.

§5. Теоремы о пределах

Теорема 5.1. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных, имеющих предел, равен такой же сумме пределов этих переменных.

Например, если $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_2$, то

$$\lim_{x \to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) = A_1 + A_2.$$

Доказательство. По теореме **??** можно написать $f_1(x) = A_1 + \alpha_1$, $f_2(x) = A_2 + \alpha_2$, α_1 и α_2 — бесконечно малые при $x \to a$. После сложения этих равенств получается

$$f_1(x) + f_2(x) = A_1 + A_2 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

По свойству бесконечно малых $\alpha_1 + \alpha_2$ — бесконечно малая. Пусть $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$, $A_1 + A_2 = A$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. По теореме **??**: если

$\varphi(x) = A + \alpha$, то $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$ или $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2$, т.е.

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Теорема 5.2. Предел произведения конечного числа переменных, имеющих предел, равен произведению пределов этих переменных.

Например, для тех же функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ можно написать:

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) = A_1 \cdot A_2.$$

Следствие 5.1. Постоянный множитель выносится за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C \lim_{x\to a} f(x), \qquad C = \mathrm{const}\,.$$

Следствие 5.2. Предел целой положительной степени функции, имеющей предел, равен той же степени предела этой функции, т.е., если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то

$$\lim_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = A^n.$$

Теорема 5.3. Предел частного двух переменных, имеющих предел, равен частному пределов этих переменных, если предел делителя не равен нулю.

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2 \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Теорема 5.4. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условию $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ в окрестности точки $x = a$, существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A$, то также $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Пример 5.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x}$. По теореме **??**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)}{\lim\limits_{x\to 1} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^3 + \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 1} x\right)^3 + 1}{1} = \frac{1^3+1}{1} = 2.$$

Пример 5.2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5.3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{1-0+0}{1-0+0} = 1.$$

§6. Первый замечательный предел

Так называется предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$, и числитель, и знаменатель при $x=0$ равны 0. Символически записывают $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0}{0}$ и называют $\dfrac{0}{0}$ неопределенностью. Эта неопределенность может возникать и во многих других пределах (см., например, пример **??** в §**??**).

Для нахождения $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ рассматривается окружность радиуса 1 (рис. **??**). Пусть центральный угол $\angle AOB = x$, при этом $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Из рисунка следует $S_{\Delta AOB} < S_{.AOB} < S_{\Delta OBC}$.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot AD = \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

т.к. $OB = OA = 1$ — радиусы.

$$S_{.AOB} = \frac{\pi \cdot OA^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2};$$

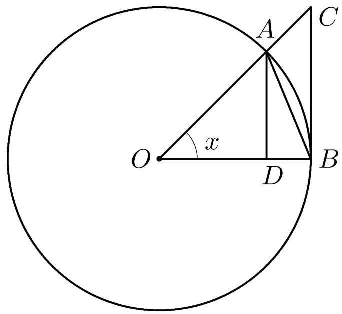

Рис. 2

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BC = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

т.к. $BC = OB \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$.

Тогда $\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. После умножения неравенства на $\frac{2}{\sin x}$ (что можно делать, т.к. $\sin x > 0$ для $0 < x < \pi/2$) получается

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Предел правой части $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$. По теореме **??** о пределах следует, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Но

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Этот предел имеет большое применение в математике. Как следствия этой формулы можно записать следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Пример 6.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{kx} = k.$$

Пример 6.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 6.3.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}1-2x=y,\ y\to 0\\ 2x=1-y,\ x=\dfrac{1-y}{2}\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{-y\left(2\cdot\dfrac{1-y}{2}+1\right)}=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{2-y}=-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

§7. Второй замечательный предел

Так называется предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Частным случаем его будет предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Символически можно записать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1^\infty$, и 1^∞ назвать неопределенностью.

Оказывается, для всех n переменная $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$ и $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geqslant 2$, т.е. $2\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$, тогда эта переменная ограничена. Она является возрастающей. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, равный числу, заключенному между 2 и 3. Это число называется числом e и пишут: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$. Число e иррациональное, $e=2,7182818284...$, в математике применяется весьма широко.

Формула остается такой же, если в ней в качестве n взять действительную переменную x, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$. Верна и формула $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, поэтому записывают: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$ — второй замечательный предел.

Существует другая формула этого предела. Если считать $x = \dfrac{1}{y}$, то $y \to 0$ при $x \to \infty$, т.к. $y = \dfrac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Число e служит основанием показательной функции e^x, также является основанием натуральных логарифмов $\log_e a = \ln a$, $a > 0$.

Пример 7.1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \left|\begin{array}{l} -\dfrac{1}{n} = y, \\ y \to 0, \\ n = -\dfrac{1}{y} \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Пример 7.2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+4)-5}{3x+4}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x+4}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\dfrac{3x+4}{-5}}\right)^{\frac{3x+4}{-5}}\right)^{\frac{-5\cdot 2x}{3x+4}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-10x}{3x+4}} = e^{-\frac{10}{3}}.$$

Пример 7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$. Делением числителя на знаменатель дроби можно получить $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} = 1 + \dfrac{8x-3}{x^2-3x+7}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{(8x-3)x}{x^2-3x+7}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^8.$$

§8. Непрерывность функции

Определение 8.1. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется разность $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = \Delta y$, где Δx — приращение аргумента (рис. **??**).

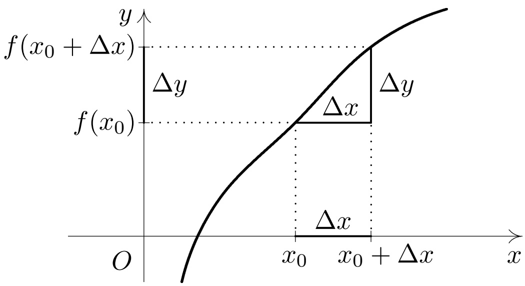

Рис. 3

Определение 8.2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Из определения **??** следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)) = 0 \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0).$$

Если полагать $x_0+\Delta x = x$, то $x \to x_0$ при $\Delta x \to 0$.

Определение 8.3. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки, и если предел функции при $x \to x_0$ существует, и он равен значению функции в точке $x = x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 8.4. Функция называется непрерывной в некотором интервале, если она непрерывна в каждой точке интервала.

Элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

Непрерывность функции в интервале геометрически означает, что график функции в этом интервале является непрерывной линией.

§9. Точки разрыва функции

Определение 9.1. Если в какой-нибудь точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ не является непрерывной, то точка $x = x_0$ называется точкой разрыва функции $y = f(x)$. Сама функция называется разрывной в этой точке.

Предполагается, что в окрестности точки x_0 функция определена, а в самой точке x_0 функция может быть как определена, так и не определена.

Определение 9.2. Точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$ называется такая точка x_0, в которой существуют оба односторонних предела функции, не равные между собой, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Определение 9.3. Точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$ называется такая точка x_0, в которой не существует хотя бы один из односторонних пределов и, следовательно, не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Пример 9.1. Найти точку разрыва функции

$$y = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 2, \\ x+1 & x > 2. \end{cases}$$

Существуют односторонние пределы функции в точке $x = 2$, не равные между собой:

$$\lim_{x\to 2-0} y = \lim_{x\to 2-0} x^2 = 4, \qquad \lim_{x\to 2+0} y = \lim_{x\to 2+0} (x+1) = 3.$$

По определению **??** функция имеет точку разрыва первого рода $x = 2$ (рис. **??**).

Пример 9.2. Найти точку разрыва функции $y = \dfrac{2}{x-1}$. Функция не определена в точке $x = 1$. Односторонние пределы в этой точке не существуют:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{2}{x-1} = \infty.$$

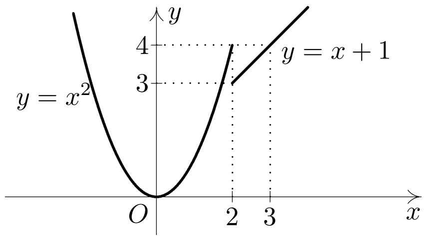

Рис. 4

По определению **??** точка $x = 1$ — точка разрыва второго рода функции $y = \dfrac{2}{x-1}$ (рис. **??**).

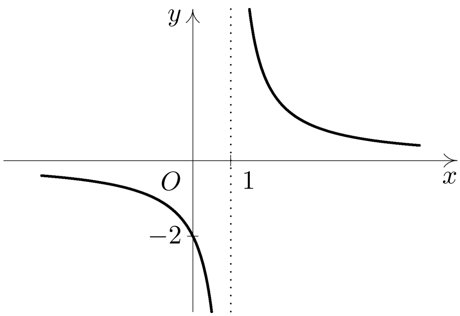

Рис. 5

В точке разрыва $x = x_0$ функции $y = f(x)$ не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, т.е. при $x = x_0$ функция не определена, или не существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Если функция $f(x)$ в точке x_0 не определена, но равны ее односторонние пределы в этой точке, то часто полагают, что $f(x_0)$ равен этому пределу, при этом предположении функция становится непрерывной в точке x_0.

Пример 9.3. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, но существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел). Тогда

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Можно полагать, что $f(0)=1$ и записать

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0,\\ 1 & x=0. \end{cases}$$

Эта доопределенная функция будет непрерывной на всей числовой прямой.

§10. Действия над непрерывными функциями

Теорема 10.1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $x=x_0$, то сумма $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ — непрерывная функция в точке $x=x_0$.

Теорема 10.2. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема 10.3. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель в рассматриваемой точке не обращается в нуль.

Теорема 10.4. Если $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Пример 10.1. Функция $u=\sin x$ непрерывна в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$ (вообще на всей числовой прямой). Функция $f(u)=u^2$ непрерывна в точке $u=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$. То сложная функция $f(\sin x)=\sin^2 x$ непрерывна в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Теорема 10.5. Функция, обратная к монотонной и непрерывной функции, непрерывна.

Пример 10.2. Функция $y=x^3$ — монотонная и непрерывная на всей числовой оси. Обратная ей функция $y=\sqrt[3]{x}$ непрерывна на всей числовой оси.

Теорема 10.6. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Элементарная функция — функция, построенная из основных элементарных функций с помощью арифметических действий.

§11. Свойства непрерывных функций на отрезке

Теорема 11.1. Функция, непрерывная на некотором отрезке, хотя бы в одной точке отрезка принимает наибольшее значение, и хотя бы в одной другой точке — наименьшее значение.

Теорема 11.2. Функция, непрерывная на некотором отрезке и принимающая на концах этого отрезка значения разных знаков, хотя бы один раз обращается в нуль внутри отрезка.

Теорема 11.3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то она принимает внутри отрезка хотя бы один раз любое значение, заключенное между значениями $f(a)$ и $f(b)$.

Замечания.

1. Непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, проходит через все промежуточные значения.

2. Непрерывная в интервале функция принимает в этом интервале хотя бы один раз любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями.

§12. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$.

Определение 12.1. Сравнением двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется нахождение предела их отношения: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Определение 12.2. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, а $\beta(x)$ — бесконечно малой более низкого порядка, чем $\alpha(x)$.

Пример 12.1. Пусть $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Итак, x^2 является бесконечно малой более высокого порядка, чем x при $x \to 0$, а x является бесконечно малой более низкого порядка, чем x^2 при $x \to 0$.

Определение 12.3. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, A — конечное число, то $\alpha(x)$, $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Пример 12.2. Пусть $\alpha(x) = \sin 5x$, $\beta(x) = x$ — бесконечно малые при $x \to 0$. Предел их отношения

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5,$$

т.е. $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка при $x \to 0$.

Не сравниваются бесконечно малые, если их отношение не имеет предела (конечного или бесконечного).

Пример 12.3. Пусть $\alpha(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $\beta(x) = x$, где $x \to 0$. Предел их отношения

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Отношение не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности.

Определение 12.4. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка при $x \to a$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то они называются эквивалентными (равносильными) бесконечно малыми: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример 12.4. Функции $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Предел их отношения $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Тогда $\sin x$ и x — эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$, т.е. $\sin x \sim x$.

Определение 12.5. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой k-го порядка относительно бесконечно малой $\beta(x)$, если $\alpha(x)$ и $\beta^k(x)$ — бесконечно малые одного порядка, т.е. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A \neq 0$.

Пример 12.5. Функции $\alpha(x) = 2x^3$, $\beta(x) = 3x$ — бесконечно малые при $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta^3(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^3}{27x^3} = \frac{2}{27},$$

т.е. $\alpha(x)$ и $\beta^3(x)$ — бесконечно малые одного порядка, $k = 3$. Тогда $\alpha(x)$ — бесконечно малая третьего порядка относительно бесконечно малой $\beta(x)$ при $x \to 0$.

Теорема 12.1 [необходимое и достаточное условие эквивалентности двух бесконечно малых]. Для того, чтобы бесконечно малые $\alpha(x)$, $\beta(x)$ при $x \to a$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ и чем $\beta(x)$.

Доказательство.

1. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые при

$x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Разность $\alpha(x) - \beta(x) = \gamma(x)$ также бесконечно малая при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - 1 = 0;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = 1 - 1 = 0.$$

Итак, $\alpha(x) - \beta(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ и чем $\beta(x)$.

2. Пусть $\alpha(x) - \beta(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ и чем $\beta(x)$, т.е.

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = \lim_{x\to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = 0.$$

Из этих соотношений вытекает:

$$\lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

т.е. $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые.

Теорема 12.2. Предел отношения бесконечно малых не изменится, если заменить их эквивалентными бесконечно малыми.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$, $\alpha_1(x) \sim \alpha(x)$, $\beta_1(x) \sim \beta(x)$, т.е.

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ можно применить преобразования:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\beta(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Итак,

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 12.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+x^2}{\operatorname{tg} 2x}$. Функция $\sin 6x+x^2$ — бесконечно малая при $x\to 0$. Для нее эквивалентной является $6x+x^2$ при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+x^2}{6x+x^2}=1$. Функция $\operatorname{tg} 2x$ бесконечно малая при $x\to 0$, для нее эквивалентной является $2x$ при $x\to 0$. То по теореме **??** следует:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+x^2}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+x^2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6+x}{2}=3.$$

§13. Таблица эквивалентных бесконечно малых

При $x\to 0$ следующие пары функций являются эквивалентными бесконечно малыми:

1) $\sin x\sim x$,
2) $\operatorname{tg} x\sim x$,
3) $e^x-1\sim x$,
4) $a^x-1\sim x\ln a$,
5) $\ln(1+x)\sim x$,
6) $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$,
7) $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$,
8) $(1+x)^n-1\sim nx$,
9) $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,
10) $\arcsin x\sim x$,
11) $\operatorname{arctg} x\sim x$.

Формулы таблицы применяются при вычислении пределов (см., например, пример **??**), при вычислении значений функций.

Пример 13.1. Вычислить

$$\sqrt[6]{627}=\sqrt[6]{729-102}=\sqrt[6]{729\left(1-\frac{102}{729}\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{3^6\left(1-\frac{34}{243}\right)}=3\sqrt[6]{1-\frac{34}{243}}.$$

Для формулы 7 получены значения: $n = 6$, $x = -\dfrac{34}{243}$. Из формулы 7 следует, что $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{n}$ при $x \to 0$. Тогда

$$\sqrt[6]{627} \approx 3\left(1 + \left(-\frac{34}{243 \cdot 6}\right)\right) = 3\left(1 - \frac{17}{729}\right) \approx 2,93.$$

Итак, $\sqrt[6]{627} \approx 2,93$.

Пример 13.2. Вычислить $\cos 2^\circ$. Применяется формула 9, предварительно 2° преобразовать в радианы. По формуле 9 можно записать, что $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$. Тогда

$$\cos 2^\circ = \cos \frac{\pi}{180} \cdot 2 = \cos \frac{\pi}{90} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 90^2} \approx 1 - \frac{3,14^2}{2 \cdot 8100} \approx 0,9994.$$

Итак, $\cos 2^\circ \approx 0,9994$.

Пример 13.3. Вычислить $e^{0,003}$. Применяется формула 3, по которой $e^x \approx 1 + x$ при $x \to 0$. Тогда

$$e^{0,003} \approx 1 + 0,003 = 1,003.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. Ответ: 4.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. Ответ: $\dfrac{4}{3}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. Ответ: ∞.
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. Ответ: 0.

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Ответ: 4.

8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. Ответ: $\dfrac{1}{8}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$. Ответ: -1.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$. Ответ: 4.

14. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

15. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$. Ответ: 0.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{3}}{x^2}$. Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$. Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$. Ответ: $\dfrac{2}{\pi}$.

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$. Ответ: $\sqrt{3}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

21. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$. Ответ: e^2.

22. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. Ответ: e.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n)$. Ответ: 1.

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3\sec x}$. Ответ: e^3.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. Ответ: e.

26. $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. Ответ: e^3.

27. Указать точку разрыва функции $y=\dfrac{4}{x-2}$. Найти $\lim\limits_{x\to 2-0} y$, $\lim\limits_{x\to 2+0} y$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$. Построить график функции.

28. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$.

29. Найти точку разрыва функции $y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ и построить график этой функции.

30. Исследовать на непрерывность функцию, построить ее график:

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 4-2x & 1<x<2,5;\\ 2x-7 & 2,5\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

31. Среди указанных бесконечно малых (при $x\to 0$) величин найти бесконечно малые, эквивалентные бесконечно малой x: $2\sin x$, $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\ln(1+x)$, x^3+3x^4.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$, $x-3x^2$, $\ln(1+x)$.

32. Доказать, что бесконечно малые $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x}$ при $x\to 1$ будут бесконечно малыми одного порядка.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$.

33. Вычислить $\sin 1^\circ$ с помощью эквивалентных бесконечно малых. Ответ: $0,0173$.

Глава 2.
Производная и дифференциал

§1. Определение производной

Пусть дана произвольная функция $y = f(x)$, определенная в некотором промежутке. Пусть x_0 — точка этого промежутка. Дадим x_0 приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ характеризует среднюю скорость изменения функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0; x_0 + \Delta x]$. Чтобы получить более точную характеристику изменения функции, рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если этот предел существует, то он характеризует скорость изменения функции при $x = x_0$. Полученный предел называют производной от функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Итак, приходим к следующему определению.

Определение 1.1. Производной от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции $y = f(x)$ в точке x обозначается символами y', $f'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$.

Действие вычисления производной называют дифференцированием, а функцию, имеющую производную в некоторой точке x, называют дифференцируемой в точке x. Если функция имеет производную в каждой точке промежутка, она называется дифференцируемой в промежутке.

В заключение установим связь между понятием дифференцируемости и понятием непрерывности функции в точке.

Теорема 1.1. Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, то $f(x)$ непрерывна в этой точке.

Непрерывность функции в точке является необходимым условием существования производной функции в этой точке.

Заметим, что обратное утверждение неверно: функция может быть непрерывной в точке, но не иметь в этой точке производной.

Пример 1.1. Рассмотрим функцию $y = |x|$, непрерывную при любом x (рис. **??**).

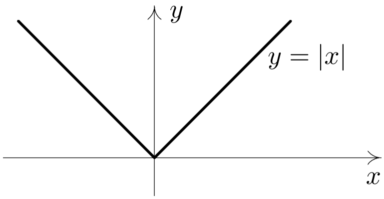

Рис. 1

Согласно определению

$$y = \begin{cases} x \;\; x > 0, \\ -x \;\; x < 0, \\ 0 \;\; x = 0. \end{cases}$$

Возьмем $x_0 = 0$, дадим x_0 приращение Δx и вычислим приращение Δy. Получим

$$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|,$$

откуда

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta x \;\; \Delta x > 0, \\ -\Delta x \;\; \Delta x < 0. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ при $\Delta x < 0$. Следовательно, при $\Delta x \to 0$ и $x_0 = 0$ отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет конечного предела. Существуют лишь односторонние пределы слева и справа, не равные между собой:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Это означает, что производная y' функции $y = |x|$ не существует при $x_0 = 0$.

§2. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой

Определение 2.1. Дана кривая $y = f(x)$. Касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называют предельное положение секущей M_0M_1, проходящей через точки M_0 и M_1 данной кривой при условии, что точка M_1 неограниченно приближается к точке M_0, двигаясь по кривой.

Обозначим координаты M_1 через $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рис. **??**). Пусть $\angle NM_0M_1 = \alpha$. Тогда угловой коэффициент секущей M_0M_1

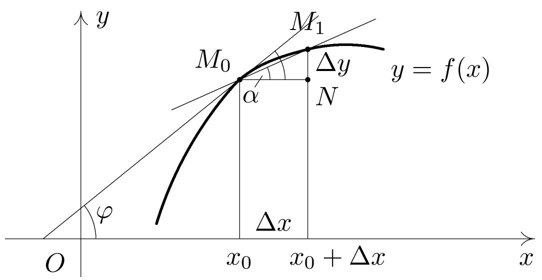

Рис. 2

равен $\operatorname{tg}\alpha$. Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{NM_1}{M_0N} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Пусть точка M_1 движется по кривой к точке M_0. Тогда $\Delta x \to 0$ и секущая M_0M_1 поворачивается вокруг точки M_0, а угол α, изменяясь, приближается к углу φ, образованному касательной M_0P с осью Ox. Ввиду непрерывности функции $\operatorname{tg} x$ выполняется $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$. С другой стороны, из определения производной имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. В результате предельного перехода в (**??**) получим $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$.

Итак, значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.2)$$

Прямая, проходящая через точку M_0 препендикулярно касательной, называется нормалью к данной кривой. Ее угловой коэффициент $k_1 = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2.3}$$

§3. Правила дифференцирования

Теорема 3.1 [2]. Производная постоянной равна нулю, т.е. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$.

Теорема 3.2 [2]. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е. если $y = C \cdot u(x)$, где $C = \text{const}$, то $y' = C \cdot u'(x)$.

Теорема 3.3 [2]. Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций, т.е., если $y = u \pm v$, то $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Теорема 3.4 [2]. Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную второй функции, т.е. если $y = u{\cdot}v$, то $y' = u'{\cdot}v + u{\cdot}v'$.

Теорема 3.5 [2]. Производная дроби равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя, т.е. если $y = \dfrac{u}{v}$, то $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, где $v \neq 0$.

§4. Производная обратной функции

Теорема 4.1. Если для функции $y = f(x)$ существует однозначная непрерывная обратная функция $x = \varphi(y)$, причем $y = f(x)$ дифференцируема, то в тех точках, где производная $f'(x) \neq 0$, существует производная обратной функции $x' = \varphi'(y)$, равная обратной величине производной данной функции, т.е. $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Найдем производные обратных тригонометрических функций.

Дана функция $y = \arcsin x$, которая является обратной для функции $x = \sin y$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично можно получить формулы:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§5. Гиперболические функции и их производные

Во многих приложениях математического анализа встречаются комбинации показательных функций вида $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Эти комбинации рассматривают как новые функции и обозначают так:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус,

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус.

С помощью этих функций можно определить еще две функции:

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — гиперболический тангенс,

$\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — гиперболический котангенс.

Их графики показаны на рис. **??** и **??**.

Из определения функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ следуют соотношения, аналогичные соотношениям между соответствующими тригонометрическими функциями:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b;$$

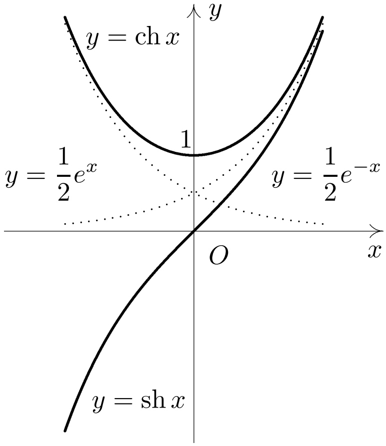

Рис. 3

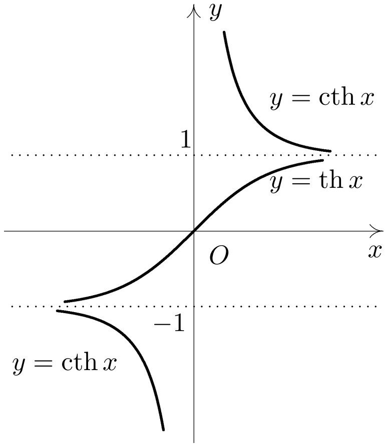

Рис. 4

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Производные гиперболических функций определяются формулами:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 c},$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Таблица производных

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$.
2. $(x)' = 1$.
3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.
10. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
11. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
12. $(e^x)' = e^x$.
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

§6. Правило дифференцирования сложной функции

Пусть дана функция $y = f(z)$, где $z = \varphi(x)$, причем функция $f(z)$ дифференцируема в своей области определения, а функция $\varphi(x)$ имеет производную в своей области определения. Найдем правило дифференцирования сложной функции $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема 6.1. Производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ по аргументу x равна произведению производной функции y по переменной z на производную функции z по аргументу x, т.е.

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dz}.$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx. Вследствие этого функция z получит приращение Δz. Предположим, что $\Delta z \neq 0$. Функция $y = f(z)$ также получит приращение Δy, где $\Delta y = f(z + \Delta z) - f(z)$. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ представим так:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

В силу непрерывности функции $z = \varphi(x)$ при условии, что $\Delta x \to 0$, будем иметь $\Delta z \to 0$. Переходя к пределу в равенстве (**??**) при $\Delta x \to 0$, найдем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

откуда

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Пример 6.1. Найти производную функции $y = \sqrt{\cos x}$.

Решение. Здесь имеем $y = \sqrt{z}$, где $z = \cos x$. Следовательно, по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$y'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}; \qquad z'_x = -\sin x;$$

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Пример 6.2. Найти производную сложной функции $y = \ln \arccos 2x$.

Решение. Эта функция является наложением трех функций: $y = \ln z$, где $z = \arccos t$, а $t = 2x$. Следовательно,

$$y'_x = (\ln z)'_z \cdot (\arccos t)'_t \cdot (2x)'_x = \frac{1}{z}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{\arccos t} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = \frac{-2}{\arccos 2x \cdot \sqrt{1-4x^2}}.$$

§7. Логарифмическое дифференцирование

Функция $y = u^v$, у которой и основание, и показатель являются переменными, зависящими от x, называется степенно-показательной функцией.

Пусть функция $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Найдем производную y'_x, предварительно прологарифмировав равенство $y = u^v$. Получим $\ln y = v \ln u$. Дифференцируя обе части этого равенства по x как сложные функции, имеем

$$\frac{1}{y} \cdot y'_x = v'_x \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'_x.$$

Отсюда следует

$$y'_x = y\left(v'_x \ln u + \frac{v}{u} \cdot u'_x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = u^v\left(\frac{dv}{dx} \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx}\right).$$

Пример 7.1. Дана функция $y = x^{\sin x}$. Тогда производная

$$y' = x^{\sin x}\left(\ln x \cdot (\sin x)' + \frac{\sin x}{x} \cdot (x)'\right) =$$

$$= x^{\sin x}\left(\ln x \cdot \cos x + \sin x \cdot x^{-1}\right) =$$

$$= x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot \cos x + \sin x \cdot x^{\sin x - 1}.$$

Прием предварительного логарифмирования данной функции с последующим дифференцированием применяют и в некоторых других случаях, где данная функция является произведением нескольких функций или показательной функцией со сложным показателем.

Пример 7.2. Дана функция $y = \sqrt[10]{\dfrac{(x-1)^7}{(x+5)^3}}$. Логарифмирование дает

$$\ln y = \frac{7}{10}\ln(x-1) - \frac{3}{10}\ln(x+5).$$

Последующее дифференцирование приводит к равенству

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{x+5},$$

откуда

$$y' = y\left(\frac{7}{10(x-1)} - \frac{3}{10(x+5)}\right)$$

$$y' = \sqrt[10]{\frac{(x-1)^7}{(x+5)^3}}\cdot\frac{4x+38}{10(x-1)(x+5)}.$$

§8. Неявная функция и ее дифференцирование

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением

$$F(x,y) = 0. \tag{8.1}$$

Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a,b), такова, что уравнение (**??**) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, то функция $y = f(x)$ есть неявная функция, определенная уравнением (**??**).

Например, функции, заданные уравнениями $y^8 - y - x^5 = 0$ или $y + x - 5\sin y = 0$, не выражаются через элементарные функции, т.е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y.

Пример 8.1. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Дифференцируем по x:

$$\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot y' = 0; \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y' = 0;$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}} \qquad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

§9. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Даны два уравнения:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{9.1}$$

где $t_0 \leqslant t \leqslant T$. При изменении t от t_0 до T будут соответственно изменяться x и y. При этом точка с координатами (x, y) опишет некоторую кривую на плоскости. Такая кривая отражает зависимость y от x. Функция y от x и соответствующая ей кривая называются заданными параметрически.

Производная функции, заданной параметрически, равна отношению производной $y'_t = \psi'(t)$ к производной $x'_t = \varphi'(t)$, т.е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{9.2}$$

Пример 9.1. Функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$.

Решение.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'} =$$

$$= \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{2\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Пример 9.2. Найти касательную и нормаль к эллипсу

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

в точке, где $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Найдем координаты $(x_0; y_0)$ точки касания. Подставим значение $t = \dfrac{\pi}{4}$ в параметрическое уравнение эллипса и найдем

$$x_0 = a \cos \frac{\pi}{4} = a\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y_0 = b \sin \frac{\pi}{4} = b\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Угловой коэффициент касательной найдем по формуле

$$k = y'_x|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\frac{\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}.$$

Следовательно, $k = -\frac{b}{a}$. Используем уравнение касательной к кривой в точке (x_0, y_0):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Подставим вместо x_0, y_0, $f'(x_0)$ их значения при $t = \frac{\pi}{4}$ и получим искомую касательную в виде

$$y - 6\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{b}{a}\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad bx + ay = ab\sqrt{2}.$$

Угловой коэффициент k_1 нормали к эллипсу в точке $(x_0; y_0)$ определяется равенством $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{b}{a}$, и уравнение нормали имеет вид

$$y - b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{b}\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad ax - by = \frac{\sqrt{2}}{2}(a^2 - b^2).$$

§10. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и в некоторой ее окрестности, а также непрерывна в точке $x = x_0$. Дадим значению аргумента x_0 приращение Δx и найдем приращение функции Δy, т.е.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Ввиду непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 приращение Δy будет бесконечно малой величиной вместе с Δx: $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Найдем такую постоянную a, чтобы приращение данной функции в точке x_0

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

можно было бы представить в виде

$$\Delta y = a \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда, очевидно, с точностью до бесконечно малой высшего порядка $\alpha \cdot \Delta x$ приращение функции Δy будет также пропорционально приращению аргумента Δx, т.е. будет иметь приближенное равенство

$$\Delta y \approx a \cdot \Delta x.$$

В этом случае бесконечно малая $a \cdot \Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy или, иначе, $a \cdot \Delta x$ является главной частью Δy.

Определение 10.1. Главная часть приращения Δy функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, линейная относительно приращения аргумента Δx, называется дифференциалом функции.

Дифференциал функции обозначают знаком $df(x_0)$ или dy. Согласно определению, дифференциал функции $dy = a \cdot \Delta x$.

Выясним, при каких условиях функция $y = f(x)$ имеет дифференциал в точке $x = x_0$.

Теорема 10.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и в ее окрестности и непрерывна в точке x_0. Для того чтобы существовал дифференциал функции в точке $x = x_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $f'(x)$ в точке $x = x_0$.

Эта теорема утверждает, что существование дифференциала функции в точке $x = x_0$ равносильно существованию ее конечной производной в этой точке. Поэтому функцию $y = f(x)$, имеющую в точке $x = x_0$ конечную производную, называют дифференцируемой в точке $x = x_0$. Установив равенство $f'(x_0) = a$, можно записать дифференциал функции в виде

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Так как дифференциал независимой переменной x в точности совпадает с ее приращением, т.е. $dx = \Delta x$, то

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Рассмотрим геометрическое истолкование дифференциала. Построим график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и укажем на нем точки M_0 и M_1, соответствующие значениям аргумента x_0

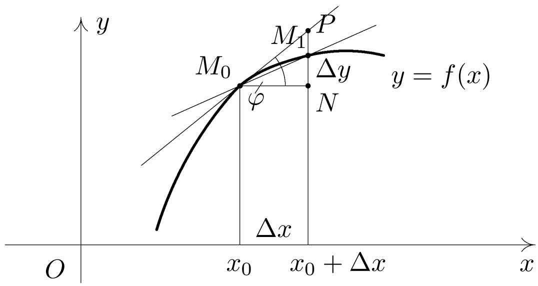

Рис. 5

и $x_0 + \Delta x$ (рис. **??**). Проведем секущую M_0M_1 и касательную к точке M_0 данной кривой.

В ΔM_0NM_1 имеем $M_0N = \Delta x$, $NM_1 = \Delta y$, где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Продолжим прямую NM_1 до ее пересечения с касательной в точке P. В треугольнике M_0NP угол φ равен углу наклона касательной M_0P к оси Ox, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Тогда величина катета NP имеет выражение $NP = f'(x_0)\Delta x$.

Итак, дифференциал функции в точке x_0 равен приращению NP ординаты касательной, проведенной в точке M_0 данной кривой $y = f(x)$.

§11. Правила вычисления дифференциала

Пусть даны дифференцируемые функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Вычисление дифференциала подчинено следующим правилам:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2) $d(c \cdot u) = c \cdot du$ (где c — постоянная);

3) $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ (при $v \neq 0$).

В приближенных вычислениях пользуются приближенным равенством

$$\Delta y \approx dy \qquad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Пример 11.1. Найти приближенное значение $\sin 46°$.

Решение. Положим $x = 45° = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$ (соответствует углу в 1°), $x + \Delta x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{180}$.

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,0175 = 0,7191.$$

Пример 11.2. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{1,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$, где $x + \Delta x = 1,01$ или $x = 1$, $\Delta x = 0,01$. Вычислим $y' = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ и $y'(1) = \dfrac{1}{3}$; $y(1) = 1$. Тогда

$$\sqrt[3]{1,01} \approx y(1) + y'(1)\Delta x = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,01 = 1,0033.$$

Найдем правило вычисления дифференциала сложной функции.

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$, каждая из которых имеет производные. Пусть y является сложной функцией от аргумента t, которую можно обозначить через $F(t)$: $y = f[\varphi(t)] = F(t)$. Вычислим дифференциал этой сложной функции y: $dy = F'(t)dt$. Но $F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t)$ и, следовательно,

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt \qquad dy = f'(x)dx,$$

где $dx = \varphi'(t)dt$.

Видим, что форма дифференциала одинакова и в том случае, когда x — независимая переменная, и в том, когда x является функцией от аргумента t. Это свойство сохранения формы дифференциала называют инвариантностью дифференциала.

§12. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную функции $f(x)$, которая обозначается символом y'' или $f''(x)$.

Производная от второй производной называется производной третьего порядка и обозначается через y''' или $f'''(x)$.

Следовательно, производная n-го порядка имеет вид $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$.

Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, ...

Пример 12.1. Вычислить y''', если $y = \sqrt[5]{x^3}$.

Решение.

$$y' = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}};$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{3}{5}\cdot x^{-\frac{2}{5}}\right)' = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6}{25\sqrt[5]{x^7}};$$

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{6}{25}\cdot x^{-\frac{7}{5}}\right)' = -\frac{6}{25}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)\cdot x^{-\frac{12}{5}} =$$

$$= \frac{42}{125\sqrt[5]{x^{12}}} = \frac{42}{125\cdot x^2\cdot\sqrt[5]{x^2}}.$$

§13. Дифференциалы высших порядков

Пусть имеем функцию $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$.

Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка и обозначается через d^2y: $d^2y = d(dy)$. В силу общего определения дифференциала имеем:

$$d^2y = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2 \qquad d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично, $d^3y = f'''(x)dx^3$, ..., $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$.

§14. Производные высших порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически

Покажем на примере способ нахождения производных различных порядков от неявных функций.

Пусть неявная функция y от x определяется равенством $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Найдем $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Дифференцируем по x все члены этого равенства, помня, что y есть функция от x:

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 3ay - 3ax\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$y^2\frac{dy}{dx} - ax\frac{dy}{dx} = ay - x^2; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Последнее равенство снова дифференцируем по x (имея в виду, что y есть функция от x):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(a\dfrac{dy}{dx} - 2x\right)(y^2 - ax) - \left(2y\dfrac{dy}{dx} - a\right)(ay - x^2)}{(y^2 - ax)^2} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{a^2y - ax^2}{y^2 - ax} - 2x\right)(y^2 - ax) - \left(\dfrac{2ay^2 - 2x^2y}{y^2 - ax} - a\right)(ay - x^2)}{(y^2 - ax)^2} =$$

$$= \frac{6ax^2y^2 - 2a^3xy - 2xy^4 - 2x^4y}{(y^2 - ax)^3} = \frac{6ax^2y^2 - 2a^3xy - 2xy(y^3 + x^3)}{(y^2 - ax)^3} =$$

$$= \frac{6ax^2y^2 - 2a^3xy - 2xy \cdot 3axy}{(y^2 - ax)^3} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

Рассмотрим задачу о нахождении производных высших порядков от функции, заданной параметрически.

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{14.1}$$

причем функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[t_0; T]$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$. Производная $\dfrac{dy}{dx}$ определяется равенством

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}. \tag{14.2}$$

Для нахождения второй производной $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ дифференцируем по x равенство (**??**), имея в виду, что t есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right) \cdot \frac{dt}{dx}, \tag{14.3}$$

но

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},\qquad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (**??**), получим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Аналогичным образом можно найти производные $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ и т.д.

Пример 14.1. Дана функция

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$$

Найти производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t,$$

$$\frac{dy}{dt}=a\sin t,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a(1-\cos t)\cdot a\cos t - a\sin t\cdot a\sin t}{a^3(1-\cos t)^3} =$$

$$= \frac{a^2\cos t - a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}{a^3(1-\cos t)^3} = \frac{a^2(\cos t - 1)}{a^3(1-\cos t)^3} =$$

$$= \frac{-1}{a(1-\cos t)^2} = -\frac{1}{a\left(2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти производные функций:

1. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$. Ответ: $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}$.

2. $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$. Ответ: $y' = \dfrac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{5/2}}$.

3. $y = (2x-1)(x^2-6x+3)$. Ответ: $y' = 6x^2 - 26x + 12$.

4. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Ответ: $y' = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

5. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$. Ответ: $y' = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

6. $y = \operatorname{ctg}^2 5x$. Ответ: $y' = -10\operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{cosec}^2 5x$.

7. $y = \ln\sin^2 x$. Ответ: $y' = 2\operatorname{ctg} x$.

8. $y = 7^{x^2+2x}$. Ответ: $y' = 2(x+1)\cdot 7^{x^2+2x}\ln 7$.

Найти производные функций, предварительно логарифмируя эти функции:

9. $y = x^{\sin x}$. Ответ: $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \ln x\cos x\right)$.

10. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Ответ: $y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x\ln\sin x)$.

11. $y = 10^{x\operatorname{tg} x}$. Ответ: $y' = 10^{x\operatorname{tg} x}\left(\operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)\ln 10$.

12. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Ответ: $y' = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\dfrac{1}{x+1} + \ln\dfrac{x}{x+1}\right)$.

13. $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

$$\text{Ответ: } y' = \frac{57x^2 - 302 + 361}{10(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+1)^2 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$$

14. $y = \sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

$$\text{Ответ: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}[(\arcsin x)^2 - 1]} \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}.$$

Дифференцирование неявных функций:

15. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{3(1-y^2)}$.

16. $y^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

17. $y = \cos(x+y)$. Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

18. $\cos(xy) = x$. Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

19. $y = x + \operatorname{arctg} y$. Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{y^2}$.

20. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$. Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.

21. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$. Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = 2^{x-y}\dfrac{2^y - 1}{1-2^x}$.

Найти $\dfrac{dy}{dx}$ функций, заданных параметрически:

22. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

23. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

24. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

25. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t}{2}$.

26. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$.

27. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -1$.

28. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

Найти дифференциалы функций:

29. $y = \sqrt{1+x^2}$. Ответ: $dy = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

30. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. Ответ: $dy = \dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

31. $y = \dfrac{x \ln x}{1-x} + \ln(1-x)$. Ответ: $dy = \dfrac{\ln x \, dx}{(1-x)^2}$.

32. $y = \sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arctg} x)^2$.

Ответ: $dy = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\right) dx$.

33. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)$. Ответ: $dy = -\dfrac{dx}{2 \sin \dfrac{x}{2}}$.

Вычислить приближенное значение:

34. $\operatorname{arctg} 1,02$. Ответ: $0,795$.

35. $\arcsin 0,4983$. Ответ: $0,52164$.

36. $\sqrt[3]{26,19}$. Ответ: $2,97$.

37. $\ln 0,9$. Ответ: $-0,1$.

38. $\sin 29^\circ$. Ответ: $0,485$.

Производные и дифференциалы высших порядков:

39. $y = \ln\sin x$. Найти y'''. Ответ: $2\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec}^2 x$.

40. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Найти y''. Ответ: $-\dfrac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

41. $y^2 - 2xy = 0$. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. Ответ: 0.

42. $\rho = \operatorname{tg}(\varphi + \rho)$. Найти $\dfrac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. Ответ: $-\dfrac{2(5 + 8\rho^2 + 3\rho^4)}{\rho^8}$.

43. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$ Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Ответ: 0.

44. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Ответ: $-\dfrac{1}{4a\sin^4 \dfrac{t}{2}}$.

45. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$. Найти d^2y. Ответ: $\dfrac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}dx^3$.

46. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Найти d^2y. Ответ: $\dfrac{a^{2/3}dx^2}{3x^{3/4}y^{1/2}}$.

47. $y = \sin^2 x$. Найти d^3y. Ответ: $-4\sin 2x dx^3$.

48. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ в точке $M(3; 2)$.

Ответ: касательная $8x - y - 22 = 0$; нормаль $x + 8y - 19 = 0$.

Глава 3.
Приложения производной

§1. Теоремы о среднем значении

Многочисленные приложения производной к исследованию функции основаны на следующих трех теоремах.

Теорема 1.1 [о корнях производной]. Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем: 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) $f(x)$ дифференцируема на (a, b); 3) $f(a) = f(b)$. Тогда существует $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Теорема 1.2 [о конечных приращениях]. Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем: 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Теорема 1.3 [об отношении приращений двух функций или теорема Коши]. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Пусть, кроме того, $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

§2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, которые при $x \to x_0$ имеют пределы, равные нулю, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$.

Теорема 2.1 [Лопиталя]. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши в окрестности точки x_0. Пусть также при $x \to x_0$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Тогда, если существует предел отношения производных данных функций $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$, то существует и предел отношения самих функций, причем $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, т.е. предел отношения функций равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 2.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x}$ (a — постоянная).

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0} \sin ax = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin ax)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{1} = a.$$

Пример 2.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x(1 - \cos x)}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{-(\cos x + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ неограниченно возрастают, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило раскрытия неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ остается в силе, если вычисляют $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to \infty$.

Пример 2.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}$, где $n > 0$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$, т.е. неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

Пример 2.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n}$, $a > 1$, $n > 0$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \cdot \ln a}{nx^{n-1}}.$$

Снова получаем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ и вторично применяем правило Лопиталя. При этом степень n в знаменателе понизится еще на единицу. После n-кратного применения правила приходим к выводу, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \cdot \ln a}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \cdot (\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}} =$$

$$= ... = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \cdot (\ln a)^n}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} = \frac{1}{n!}(\ln a)^n \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$

Кроме неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, имеются и другие виды неопределенностей, которые с помощью преобразований можно свести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Укажем возможные случаи.

1. Неопределенность типа $\mathbf{0 \cdot \infty}$, т.е. предел произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, где

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Выражение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x)$ перепишем в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

или в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

то при $x \to x_0$ мы получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 2.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(x^n \cdot \ln x)$, где $n > 0$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Преобразуем данное произведение в частное, что дает нам неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, и найдем

$$\lim_{x\to 0} x^n \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-n\cdot x^{-n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n}{-n} = 0.$$

2. Неопределенность типа $\infty - \infty$, т.е. предел разности бесконечно больших функций $f(x)$ и $g(x)$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Пример 2.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Приведем разность к общему знаменателю, после чего получим уже неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ и сможем применить правило Лопиталя. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Снова получаем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ и вторично применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

3. Неопределенность вида $\mathbf{0^0}$, т.е. предел степенно-показательной функции $[f(x)]^{g(x)}$, где

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Положив $y = [f(x)]^{g(x)}$, прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = g(x)[\ln f(x)].$$

При $x \to x_0$ получим неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Найдя $\lim\limits_{x \to x_0} \ln y$, легко получить $\lim\limits_{x \to x_0} y$. В силу непрерывности логарифмической функции $\lim\limits_{x \to x_0} \ln y = \ln \lim\limits_{x \to x_0} y$, и если $\ln \lim\limits_{x \to x_0} y = b$, то $\lim\limits_{x \to x_0} y = e^b$.

4. Неопределенность типа $\mathbf{1^\infty}$, т.е. предел степенно-показательной функции $[f(x)]^{g(x)}$, где

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

5. Неопределенность типа $\boldsymbol{\infty^0}$, т.е. снова предел функции $[f(x)]^{g(x)}$, но уже при условии, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

В последних двух случаях также прибегают к логарифмированию данного выражения, причем достигается преобразование к неопределенности типа $0 \cdot \infty$, а затем к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 2.7. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} x^x$, предполагая, что этот предел существует.

Решение. Обозначим $\lim\limits_{x \to 0} x^x = A$. Прологарифмируем это выражение:

$$\ln A = \ln \left[\lim_{x \to 0} x^x\right] = \lim_{x \to 0} (\ln x^x) = \lim_{x \to 0} x \ln x.$$

Перестановка символов ln и lim здесь возможна благодаря непрерывности логарифмической функции. Последнее произведение уже является неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Раскроем ее:

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = 0.$$

Итак, $\ln A = 0$. Потенцируем и находим $A = e^0 = 1$. Окончательно имеем $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$.

Пример 2.8. Найти $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Обозначим $A = \lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$. Логарифмирование дает

$$\ln A = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{1} = 0.$$

Итак, снова $\ln A = 0$ и $A = 1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.

Пример 2.9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$.

Решение. Обозначим $A = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$. Имеем

$$\ln A = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\sqrt[x]{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln x\right].$$

После этих преобразований получим неопределенность типа $0\cdot\infty$. Применяя теперь правило Лопиталя, находим

$$\ln A = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Следовательно, вновь имеем $A = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1$.

§3. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и в некоторой ее окрестности производные порядка $n+1$. Пусть x — любое значение аргумента из указанной окрестности, $x \neq a$. Тогда найдется такая точка ξ, $a < \xi < x$, что справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3.1)$$

Формула (**??**) называется формулой Тейлора, а выражение

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi = a + \theta(x-a),\ 0 < \theta < 1 \quad (3.2)$$

является остаточным членом в форме Лагранжа.

Остаточный член $R_{n+1}(x)$ может быть представлен и в форме Пеано, т.е.

$$R_{n+1}(x) = 0[(x-a)^n] \qquad x \to a. \tag{3.3}$$

Формулой Маклорена принято называть формулу Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \tag{3.4}$$

Остаточный член $R_{n+1}(x)$ имеет вид:

1) в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1;$$

2) в форме Пеано

$$R_{n+1}(x) = 0(x^n).$$

§4. Разложение по формуле Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$

1. Разложение функции $f(x) = e^x$. Найдем последовательные производные от $f(x)$:

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (**??**) из §**??**, будем иметь:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0 < \theta < 1.$$

2. Разложение функции $y = \sin x$. Находим последовательные производные от $f(x) = \sin x$:

$$f(x) = \sin x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = -1,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(x) = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Подставляя полученные значения в формулу (**??**) из §**??**, получим разложение функции $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Так как $\left|\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x.

3. Разложение функции $f(x) = \cos x$. Найдя значения последовательных производных при $x = 0$ от функции $f(x) = \cos x$ и подставляя в формулу Маклорена, получим разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$|\xi| < |x|.$$

Здесь также $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x.

4. Разложение функции $f(x) = (1+x)^m$.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...+$$

$$+\frac{m(m-1)...[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{m(m-1)...(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-n-1}$, $0 < \theta < 1$.

5. Разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{x}{1+\xi}\right)^n$.

§5. Приложение первой производной к исследованию функции на возрастание и убывание

Определение 5.1. Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется возрастающей.

Аналогичным образом определяется убывающая функция.

Теорема 5.1.

1. Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и если $f(x)$ возрастает в нем, то производная этой функции неотрицательна на отрезке $[a;b]$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в промежутке $(a;b)$, причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a;b]$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$. Придадим аргументу x приращение Δx и рассмотрим отношение

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.1}$$

Так как $f(x)$ — функция возрастающая, то $f(x+\Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x+\Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$. В обоих случаях

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \tag{5.2}$$

следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$, т.е. $f'(x) \geqslant 0$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $f'(x) > 0$ при всех $a < x < b$. Рассмотрим два любых значения x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, принадлежащих отрезку $[a;b]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \qquad x_1 < \xi < x_2.$$

По условию $f'(\xi) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, а это значит, что $f(x)$ — возрастающая функция.

Аналогичная теорема имеет место и для убывающей функции.

Пример 5.1. Найти область возрастания и убывания функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Решение. Производная равна $y' = 3x^2 - 6x$. Решим неравенство $y' > 0$ или $3x^2 - 6x > 0$, $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. Область возрастания состоит из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$.

Положим теперь $y' < 0$, т.е. $3x^2 - 6x < 0$, откуда $x \in (0; 2)$. Область убывания функции есть промежуток $(0; 2)$.

§6. Максимум и минимум функции

Определение 6.1. Точка x_0 называется точкой максимума непрерывной функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой $f(x_0)$ является наибольшим значением $f(x)$, т.е. $f(x_0) > f(x)$.

Определение 6.2. Точка x_0 называется точкой минимума непрерывной функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой $f(x_0)$ является наименьшим значением функции, т.е. $f(x_0) < f(x)$.

Для понятий максимум и минимум существует объединяющий их термин — экстремум.

Теорема 6.1 [необходимое условие минимума и максимума]. Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Теорема 6.2 [достаточное условие экстремума]. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция. Если при переходе x через точку x_0 (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума. Если же производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 является точкой минимума.

Доказательство. Пусть слева от точки x_0 найдется промежуток, где $f'(x) > 0$. Это означает, что слева от x_0 функция $f(x)$ возрастает и при $x < x_0$ имеем $f(x) < f(x_0)$. Пусть в некотором промежутке справа от x_0 имеем $f'(x) < 0$. Это значит, что справа от x_0 функция $f(x)$ убывает и для $x > x_0$ имеем $f(x) < f(x_0)$. Тогда $f(x_0)$ является наибольшим значением функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. В этом случае точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Пример 6.1. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = 6x^2 - x^4$.

Решение. Найдем $y' = 12x - 4x^3$. Решим уравнение $12x - 4x^3 = 0$ и получим три критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$. Составим таблицу:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Итак, $x_{\max} = \pm\sqrt{3}$ и $y_{\max} = y(\sqrt{3}) = y(-\sqrt{3}) = 18 - 9 = 9$, $x_{\min} = 0$ и $y_{\min} = 0$.

§7. Второй способ исследования функции на экстремум

С помощью второй производной можно также проводить исследование на экстремум критических точек функции, которая имеет вторые производные в этих точках.

Теорема 7.1. Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядка, и пусть известно, что в точке $x = x_0$ первая производная $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в критической точке x_0 максимум. Если же $f''(x_0) > 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 минимум.

Пример 7.1. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Решение. Найдем

$$y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Решим уравнение $y' = 0$: $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ — критические точки. Вычислим

$$y'' = \frac{-2x(1 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1 + x^2)^2} = -\frac{4x}{(1 + x^2)^2}.$$

При $x = -1$:

$$y''(-1) = \frac{4}{2^2} = 1 > 0,$$

то в точке $x = -1$ данная функция имеет минимум.

При $x = 1$:

$$y''(1) = -\frac{4}{4} = -1 < 0,$$

то в точке $x = 1$ данная функция имеет максимум.

§8. Задачи на наибольшее и наименьшее значение

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если требуется найти наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то надо:

1) найти все максимумы на отрезке;

2) определить значения функции на концах отрезка, т.е. вычислить $f(a)$ и $f(b)$;

3) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее; оно и будет представлять собой наибольшее значение функции на отрезке.

Аналогичным образом следует поступать при определении наименьшего значения функции на отрезке.

Пример 8.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Найдем максимумы и минимумы функции на отрезке $[-2; 2]$:

$$y' = -12x^3 + 12x; \quad -12x(x^2 - 1) = 0; \quad x_1 = 0; \; x - 2 = -1; \; x_3 = 1.$$

Составим таблицу:

x	$[-2; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2]$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$y_{\max} = y(-1) = -3 + 6 - 1 = 2; \qquad y_{\max} = y(1) = -3 + 6 - 1 = 2;$$

$$y_{\min} = y(0) = -1.$$

Определим значения функции на концах отрезка:

$$y(-2) = -3 \cdot 16 + 6 \cdot 4 - 1 = -48 + 24 - 1 = -25;$$

$$y(2) = -3 \cdot 16 + 6 \cdot 4 - 1 = -25.$$

Таким образом, наибольшее значение функции на отрезке $[-2; 2]$ есть $y = 2$, а наименьшее значение — $y = -25$.

§9. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

На плоскости дана кривая $y = f(x)$, являющаяся графиком дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение 9.1. Говорят, что кривая обращена выпуклостью вверх (называется выпуклой) на интервале $(a; b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Определение 9.2. Говорят, что кривая обращена выпуклостью вниз (называется вогнутой) на интервале $(a; b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Теорема 9.1. Если во всех точках интервала $(a; b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале выпукла.

Теорема 9.2. Если во всех точках интервала $(a; b)$ вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале вогнута.

По этим теоремам можно, исследуя функцию $f(x)$, судить о направлении выпуклости ее графика на различных интервалах.

Определение 9.3. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется точкой перегиба кривой.

Установим достаточные условия того, что данная точка является точкой перегиба.

Теорема 9.3. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через значение $x = a$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла и при $x > a$ — вогнута. Следовательно, точка A с абсциссой $x = a$ есть точка перегиба (рис. **??**). Если $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$, то при $x < b$ кривая вогнута, а при $x > b$ — выпукла. Следовательно, точка B кривой с абсциссой $x = b$ есть точка перегиба (рис. **??**).

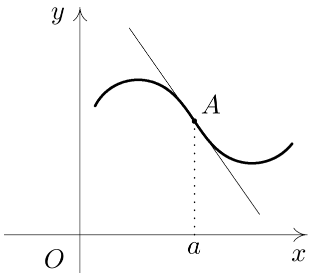

Рис. 1

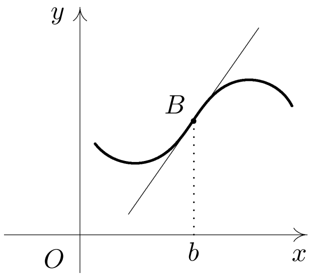

Рис. 2

Пример 9.1. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$.

Решение. Находим первую и вторую производные:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9, \qquad y'' = 6x - 6.$$

Находим значения x, при которых $y'' = 0$, т.е. $6x - 6 = 0$, $x = 1$. Составим таблицу:

x	$[-\infty; 1)$	1	$(1; \infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\frown$		$\smile$

Следовательно, точка $x = 1$ — точка перегиба. Кривая выпукла при $x \in (-\infty; 1)$ и вогнута при $x \in (1; \infty)$.

§10. Асимптоты

Часто приходится исследовать форму кривой $y = f(x)$, а значит, и характер изменения соответствующей функции при неограниченном возрастании абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. Исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение 10.1. Прямая A называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится в нулю (рис. **??**).

Будем в дальнейшем различать асимптоты вертикальные и наклонные.

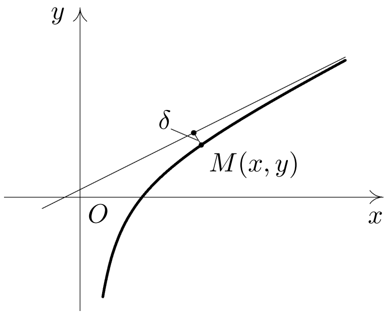

Рис. 3

1. Вертикальные асимптоты. Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ есть вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$.

2. Наклонные асимптоты. Если кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, то ее уравнение имеет вид

$$y = kx + b, \tag{10.1}$$

где

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]. \tag{10.2}$$

Заметим, что все рассуждения справедливы и для случая $x \to -\infty$.

Пример 10.1. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2+1}{1+x}$.

Решение. Ищем вертикальные асимптоты:

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x^2+1}{1+x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-1-0} \frac{x^2+1}{1+x} = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = -1$ есть вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{(1+x)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[y-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1+x^2}{1+x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2-x-x^2}{1+x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1.$$

Следовательно, прямая $y = x-1$ есть наклонная асимптота данной кривой.

§11. Общий план исследования функций и построения графиков

Рекомендуется следующий план исследования:

1. Установить область определения данной функции $y = f(x)$, область ее непрерывности и точки разрыва. В точках разрыва найти односторонние пределы функции.

2. Выяснить наличие симметрии и периодичности графика функции.

3. Определить точки пересечения графика с осями координат и указать промежутки, где функция $f(x)$ сохраняет знак.

4. Найти точки экстремума и области возрастания и убывания данной функции. Найти экстремумы функции.

5. Найти точки перегиба графика функции, а также области выпуклости и вогнутости его.

6. Найти асимптоты кривой.

7. Построить график.

Пример 11.1. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ и построить его график.

Решение.

1) Область определения и область непрерывности функции есть:

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty).$$

Точками разрыва являются точки $x = \pm\sqrt{3}$.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2} = +\infty.$$

2)
$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{3-(-x)^2} = -\frac{x^3}{3-x^2} = -y(x),$$
т.е. функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому можно было бы ограничиться исследованием функции и построением ее графика при $x \geqslant 0$. Слева от оси Oy, т.е. при $x < 0$, график можно построить из соображений симметрии.

3) При $y = 0$: $\dfrac{x^3}{3-x^2} = 0$, $x = 0$. При $x = 0$: $y = 0$. Итак, $(0;0)$ — точка пересечения с осями координат.

4) Найдем
$$y' = \frac{3x^2(3-x^2) - x^3(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2}.$$
Положим $y' = 0$:
$$\begin{cases} 9x^2 - x^4 = 0, \\ 3 - x^2 \neq 0, \end{cases} \qquad x^2(9-x^2) = 0,$$
найдем три критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$. Строим таблицу:

x	$[0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

Из таблицы видно:
$$x_{\max} = 3 \qquad y_{\max} = y(3) = \frac{27}{3-9} = \frac{27}{-6} = -\frac{9}{2} = -4,5.$$
Симметрично относительно начала координат имеем:
$$x_{\min} = -3 \qquad y_{\min} = y(-3) = -\frac{27}{3-9} = 4,5.$$

5) Найдем y'' и решим уравнение $y'' = 0$:
$$y'' = \frac{(18x - 4x^3)(3-x^2)^2 - 2(3-x^2)(-2x)(9x^2 - x^4)}{(3-x^2)^4} =$$
$$= \frac{(18x - 4x^3)(3-x^2) + 4x(9x^2 - x^4)}{(3-x^2)^3} =$$

$$= \frac{54x + 6x^3}{(3-x^2)^3} = \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3},$$

$$y'' = 0, \qquad \begin{cases} 6x(9+x^2) = 0, \\ 3 - x^2 \neq 0, \end{cases}$$

$x = 0$ — критическая точка. Строим таблицу:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
y''	$+$	.	$-$	0	$+$	.	$-$
y	$\smile$	.	$\frown$	. .	$\smile$	.	$\frown$

По таблице видно, что $(0; 0)$ — точка перегиба.

6) Прямые $x = \pm\sqrt{3}$ — вертикальные асимптоты. Ищем наклонные асимптоты. Вычислим прежде всего k:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = -1.$$

Тогда

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [y - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} [y + x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 3x - x^3}{3 - x^2} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x^2} - 1} = 0.$$

Итак, прямая $y = -x$ — наклонная асимптота.

7) Построим график (рис. **??**).

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. Ответ: 2.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. Ответ: 2.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. Ответ: -2.

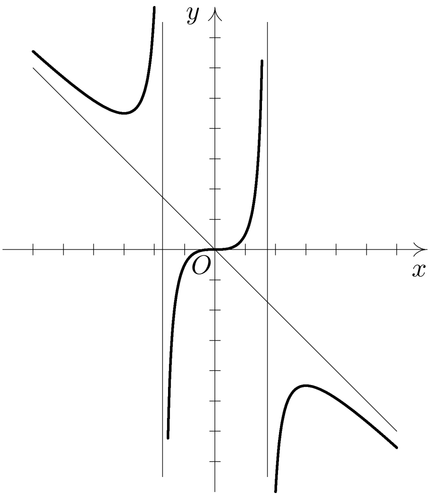

Рис. 4

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$. Ответ: $-\dfrac{1}{8}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$. Ответ: 1.

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1) - x}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2x}}$. Ответ: 0.

8. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. Ответ: $\dfrac{2}{\pi}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right]$. Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 2x$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Ответ: $\dfrac{1}{e}$.

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. Ответ: 1.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Ответ: 1.

14. Написать формулу Маклорена для функции $y = \sqrt{1+x}$ при $n = 2$.

Ответ: $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}$, $0 < \theta < 1$.

Найти экстремумы функций:

15. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$.

Ответ: $y_{\max} = 10$ при $x = 1$, $y_{\min} = -22$ при $x = 5$.

16. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

Ответ: минимум при $x = \sqrt{2}$, максимум при $x = -\sqrt{2}$.

17. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. Ответ: $y_{\min} = e$ при $x = e$.

18. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. Ответ: функция возрастает.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанных отрезках:

19. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

Ответ: $y_{.} = 2$ при $x = \pm 1$, $y_{.} = -25$ при $x = \pm 2$.

20. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

Ответ: $y_{.} = \dfrac{3}{5}$ при $x = 4$, $y_{.} = -1$ при $x = 0$.

Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривых:

21. $y = 1 - x^2$. Ответ: кривая всюду выпукла.

22. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Ответ: $x = 1$ — точка перегиба.

23. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. Ответ: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ — точка перегиба.

Найти асимптоты следующих кривых:

24. $y = \dfrac{1}{(x+2)^3}$. Ответ: $x = -2$; $y = 0$.

25. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. Ответ: $x = 0$; $y = 0$.

26. $y = \ln x$. Ответ: $x = 0$.

27. $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. Ответ: $y = 2x \pm \dfrac{\pi}{2}$.

28. $y = xe^x$. Ответ: $x = 0$; $y = x$.

Исследовать функции и построить графики:

29. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

30. $y = \dfrac{6x}{1+x^2}$.

31. $y = x - \sqrt[3]{x^3+1}$.

32. $y = x - \ln(x+1)$.

33. $y = \ln(x^2+1)$.

34. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

35. $y = e^{-x}\sin x$.

Глава 4.

Функции нескольких переменных

§1. Основные понятия

Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то говорят, что z есть функция 2-х независимых переменных x и y, определенная в области D, и пишут: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т.д.

Область D называется областью определения функции. Множество $E = \{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ называется областью значений или областью изменения функции. Если каждую пару (x, y) геометрически изобразить точкой $M(x, y)$ на плоскости Oxy, то D — совокупность точек на плоскости, и говорят, что функция $z = f(M)$ есть функция точки M. Линия, ограничивающая область D, называется границей области. Точки области D, не лежащие на границе, называются внутренними точками. Область, состоящая только из внутренних точек, называется открытой или незамкнутой. Если область наряду с внутренними точками содержит и точки границы, то такая область называется замкнутой.

Например, для функции $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ областью определения является открытое множество $x^2 + y^2 < 4$. Границей этого множества служат точки окружности $x^2 + y^2 = 4$. Множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, для которых $x^2 + y^2 \leqslant 4$, является замкнутым множеством.

Радиус-вектором точки $M(x, y)$ плоскости Oxy называется неотрицательная величина $r(M) = \sqrt{x^2 + y^2}$, которая представляет расстояние от начала координат до точки $M(x, y)$.

Область D называется ограниченной, если существует положительное число $N > 0$, что для любой точки $M(x, y) \in D$ выполняется $r(M) < N$.

Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса $r > 0$ называется совокупность точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, то есть $U_r(M_0) = \{M(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$ — множество точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Множество точек

$$U_r(\bar{M}_0) = \{M(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

называется выколоткой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $M(x, y) \in D \cap U_r(\bar{M}_0)$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ и пишут $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$.

Замечание. В определении предела в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ может быть и не определена.

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если выполняются условия:

1) функция $f(M)$ определена в точке M_0;

2) существует $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке области D, то она называется непрерывной в области D. Если в точке M_0 нарушается хотя бы одно из условий 1)–3), то точка M_0 называется точкой разрыва функции $f(M)$.

§2. Частные производные

Переменной x функции двух переменных $z = f(x, y)$ дадим приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной. Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется частной производной (1-го порядка) функции $z = f(x, y)$ по x и обозначается одним из символов: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_x. Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогичным образом определяется частная производная по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных следует, что они вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования (при этом все переменные, кроме той, по которой производится дифференцирование, рассматриваются как постоянные).

Пример 2.1. Найти частные производные функции $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Решение. Считая y постоянной, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Считая x постоянной, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Частными производными 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных 1-го порядка и обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}.$$

Пример 2.2. Найти частные производные 2-го порядка функции

$$z = x^3 y^2 + x \sin y.$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + \sin y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2y^2 + \sin y)'_x = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x^3y + x\cos y)'_y = 2x^3 - x\sin y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2y^2 + \sin y)'_y = 6x^2y + \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2x^3y + x\cos y)'_x = 6x^2y + \cos y.$$

В этом примере мы убедились, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Аналогично вводятся понятия частных производных более высших порядков.

Пример 2.3. Для функции $z = x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - x^2 - y^2$ показать, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z + x^2 + y^2 = 0.$$

Решение. Вычислим частные производные заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) - 2x = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} - 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} - 2y = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2y$$

и, подставив их в дифференциальное уравнение, имеем:

$$x\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} - 2x\right) + y\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2y\right) -$$

$$-x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 =$$

$$= x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - 2x^2 + \frac{yx^2}{x^2 + y^2} - 2y^2 - x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2x^2 + 2y^2 = 0,$$

так как в левой части все выражения взаимно уничтожаются.

Определение функции двух переменных и частных производных легко обобщить на случай произвольного числа переменных.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное арифметическое пространство, то есть множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n: $(x_1, x_2, ..., x_n)$; $D \in \mathbb{R}^n$ — некоторое подмножество.

Если каждому набору $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве D задана функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n независимых переменных x_1, x_2, ..., x_n.

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n независимых переменных. Придавая значению переменной x_k приращение Δx_k, а остальные оставляя неизменными, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)}{\Delta x_k}.$$

Этот предел называется частной производной (1-го порядка) данной функции по переменной x_k в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Аналогичным образом обобщаются и производные высших порядков.

§3. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Для функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ составим ее полное приращение: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x, y)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки ее полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + o(\rho), \tag{3.1}$$

где $o(\rho)$ — бесконечно малая величина относительно $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$; A_1, A_2 — некоторые числа, не зависящие от x и y.

Дифференциалом dz 1-го порядка функции $z = f(x, y)$ в точке $(x; y)$ называется главная часть полного приращения Δz этой функции, линейная относительно Δx и Δy, то есть $dz = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y$.

Дифференциалы независимых переменных x и y равны: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, и для вычисления дифференциала dz функции $z = f(x, y)$ справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{3.2}$$

Теперь формулу (**??**) можно записать в виде

$$\Delta z = dz + o(\rho). \tag{3.3}$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} o(\rho) = 0$, то при достаточно малых Δx и Δy можно приближенно положить $\Delta z \approx dz$. Откуда имеем

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz \qquad f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz. \tag{3.4}$$

Формула (**??**) применяется в приближенных вычислениях значений функций.

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке M_0 (точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности имеет неявный вид $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Если поверхность задана в явной форме $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{3.5}$$

а уравнение нормали —

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример 3.1. Даны функция $z = \ln(x^2 - 3y^2)$ и точки $A(2;1)$ и $B(2,02;0,98)$. Требуется: 1) вычислить значение $z_1 = z(B)$ в точке B; 2) вычислить приближенное значение $\bar{z}_1$ функции в точке B, исходя из значения $z_0 = z(A)$ функции в точке A и заменив приращение функции дифференциалом; 3) оценить в % относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции дифференциалом; 4) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = \ln(x^2 - 3y^2)$ в точке $C(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Решение. Подставим координаты $x = 2,02$ и $y = 0,98$ точки B в выражение функции $z = \ln(x^2 - 3y^2)$ и, используя таблицу логарифмов (калькулятор), вычислим:

$$z = z(B) = \ln\left[(2,02)^2 - 3\cdot(0,98)^2\right] = \ln(1,1992) = 0,1823.$$

Для приближенного вычисления значения $\bar{z}_1$ в точке B можно использовать формулу (**??**), т.к. величины $\Delta x = 0,22$ и $\Delta y = -0,02$ малы. Тогда

$$z_1 = z(B) = \ln\left[(2,02)^2 - 3\cdot(0,98)^2\right] \approx \ln(2^2 - 3\cdot 1) + dz = \bar{z}_1.$$

Вычислив в точке A значения функции и дифференциала

$$\ln(2^2 - 3) = \ln 1 = 0; \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2x}{x^2 - 3y^2}\Delta x -$$

$$-\frac{6y}{x^2-3y^2}\Delta y\bigg|_A = \frac{4}{4-1}\cdot 0,02 - \frac{6\cdot 1}{4-3}\cdot(-0,02) = 0,2,$$

получим $\bar{z}_1 = 0 + 0,2 = 0,2$.

Обозначим относительную погрешность в %, которая получается при замене приращения Δz дифференциалом dz, через $\delta\bar{z}_1$. Тогда из определения относительной погрешности имеем

$$\delta\bar{z}_1 = \frac{|\bar{z}_1 - z_1|}{\bar{z}_1}\cdot 100\% = \frac{|0,2 - 0,1823|}{0,2}\cdot 100\% = 8,85\%.$$

Предварительно вычислим координату z_0 точки C:

$$z_0 = \ln(x^2 - 3y^2)\big|_A = \ln 1 = 0$$

и значения частных производных:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{2x}{x^2-3y^2}\bigg|_A = 4; \qquad f'_y(x_0, y_0) = \frac{-6y}{x^2-3y^2}\bigg|_A = -6.$$

Подставляя полученные значения в формулу (**??**), получим $z - 0 = 4(x-2) - 6(y-1)$ и $4x - 6y - z - 2 = 0$ — уравнение касательной плоскости в точке $C(0;2;1)$ поверхности $z = \ln(x^2 - 3y^2)$.

§4. Дифференцирование неявных и сложных функций

Функция z переменных x и y называется неявной, если она задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, не разрешенным относительно z.

Частные производные неявной функции находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{4.1}$$

В частности, если неявная функция y одной переменной x задана уравнением $F(x, y) = 0$, то

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $e^z + x^2y + z + 5 = 0$.

Решение. Обозначив левую часть уравнения через $F(x, y, z)$, имеем: $F'_x = 2xy$, $F'_y = x^2$, $F'_z = e^z + 1$. Тогда по формулам (**??**) получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xy}{e^z + 1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Если $z = f(u, v)$ — дифференцируемая функция переменных u и v, которые сами являются дифференцируемыми функциями $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ независимых переменных x и y, то $z = f(u(x, y), v(x, y))$ называется сложной функцией независимых переменных x и y. Переменные u и v называются промежуточными переменными.

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по данной независимой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.3}$$

Если промежуточные аргументы являются функциями одной независимой переменной t: $u = u(t)$, $v = v(t)$, то $z = f(u(t), v(t))$

будет сложной функцией от t. Полная производная этой функции находится по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{4.4}$$

В частности, если t совпадает, например, с переменной u, то производная функции z по u равна

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}. \tag{4.5}$$

Пример 4.2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u + v^2$, где $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x+y)$. По формулам (**??**) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2v \cdot \frac{1}{x+y} = 2x + \frac{2\ln(x+y)}{x+y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2v \cdot \frac{1}{x+y} = \cos y + \frac{2\ln(x+y)}{x+y}.$$

Пример 4.3. Вычислить $\dfrac{dz}{du}$, если $z = u^2 + \sqrt{v}$, где $v = \sin u$. По формуле (**??**) имеем

$$\frac{dz}{du} = 2u + \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \cos u = 2u + \frac{\cos u}{2\sqrt{\sin u}}.$$

§5. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области

Функция $z = f(x,y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0, y_0)$, то есть при $x = x_0$ и $y = y_0$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, что для всех точек $M(x,y)$ из этой окрестности, отличных от точки $M_0(x_0, y_0)$, выполняется неравенство $f(x_0, y_0) > f(x,y)$ (соответственно — $f(x_0, y_0) < f(x,y)$).

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции.

Точки $M_0(x_0, y_0)$, в которых производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x,y)$ равны 0 или терпят разрыв, называются критическими точками этой функции.

Пусть D — некоторая ограниченная замкнутая область плоскости независимых переменных x и y, в которой определена функция $z = f(x, y)$, а точка $M(x, y)$ — произвольная, текущая точка этой области. Тогда наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в этой области D обозначаются соответственно

$$z = \max_{M \in D} f(x, y), \qquad z = \min_{M \in D} f(x, y).$$

Теорема 5.1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области D, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений или в критической точке, или на границе области.

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области D, необходимо:

1) найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках; 2) исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значения на границе области D; если граница состоит из нескольких линий, то исследование провести для каждого участка в отдельности; 3) сравнить все полученные значения функции и определить наибольшее и наименьшее значения функции в области.

Пример 5.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4 - x$. Сделать чертеж.

Решение. По виду неравенств, определяющих область D, построим чертеж области (рис. **??**).

Вычислим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8$ и, решив систему $\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0, \end{cases}$ определим критическую точку $M_0(1; 2)$. Эта точка $M_0(1; 2) \in D$. Вычислим значение функции в этой точке: $z(M_0) = 1 + 8 - 2 - 16 + 5 = -4$.

Исследуем функцию на границе области D.

На отрезке OA: $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Тогда функция примет вид $z(x) = x^2 - 2x + 5$, где $0 \leqslant x \leqslant 4$. Находим наибольшее и наименьшее значения полученной функции $z(x)$ одной переменной x на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2, \ 2x - 2 = 0, \ x = 1; \quad M_1(1; 0); \ z(M_1) = 1 - 2 + 5 = 4.$$

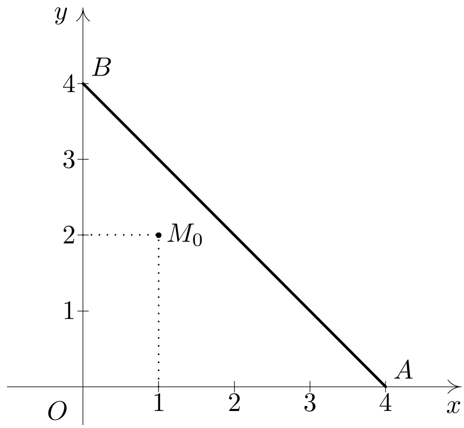

Рис. 1

Значения на концах отрезка OA: $z(0) = 5$, $z(4) = 13$; на отрезке OB: $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 4$. Тогда функция примет вид: $z(y) = 2y^2 - 8y + 5$, где $0 \leqslant y \leqslant 4$. Находим наибольшее и наименьшее значения полученной функции $z(y)$ одной переменной y на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8,\ 4y - 8 = 0,\ y = 2; \quad M_2(0; 2),\ z(M_2) = -3.$$

Значения на концах отрезка OB: в точке $O(0; 0)$ значение уже было вычислено; $z(B) = 2 \cdot 16 - 32 + 5 = 5$; на отрезке AB: $y = 4 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Тогда функция примет вид

$$z(x) = x^2 + 2(4 - x)^2 - 2x - 8(4 - x) + 5 = 3x^2 - 10x + 5.$$

Находим наибольшее и наименьшее значения полученной функции $z(x)$ одной переменной x на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 10,\ 6x - 10 = 0,\ x = \frac{5}{3}; \quad M_3\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right),\ z(M_3) = -\frac{10}{3}.$$

На концах A и B значения функции были найдены.

Сравнивая полученные значения функции z в критической точке M_0 области D, в критических точках M_1, M_2, M_3 — границы области, а также в точках O, A, B, находим, что

$$z_{.} = \max_{M \in D} f(x, y) = z(A) = 13;$$

$$z_{\cdot} = \min_{M \in D} f(x, y) = z(M_0) = -4.$$

§6. Производная по направлению и градиент функции

В плоскости переменных x и y возьмем две точки: $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Строим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{MM_1}$. Обозначим через MM_1 расстояние между точками M и M_1.

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке M по направлению вектора $\vec{a} = \overrightarrow{MM_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \lim_{MM_1 \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{MM_1},$$

где $f(M_1)$ и $f(M)$ — значения функции $f(x, y)$ в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M(x, y)$.

Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, то есть координаты единичного вектора $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ направления $\vec{a}$. Тогда, если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то производная по направлению вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{6.1}$$

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то градиентом этой функции называется вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{\jmath}. \tag{6.2}$$

Вектор градиента функции $z = f(x, y)$ в каждой точке $M(x, y)$ направлен в сторону наибольшего возрастания функции, а по величине

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}} z\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

дает скорость наибольшего возрастания функции.

Пример 6.1. Для функции $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, точки $A(1; 1)$ и вектора $\vec{a} = (3; 4)$ найти: 1) $\overrightarrow{\mathrm{grad}} z$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение. Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+2y}{2\sqrt{x^2+2xy}}=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2xy}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}.$$

По формуле (**??**) находим $\overrightarrow{\mathrm{grad}}z$ в произвольной точке:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}z=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}\vec{\imath}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}\vec{\jmath}.$$

Определим значение этого градиента в точке $A(1;1)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}z(A)=\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{\imath}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\jmath}.$$

Определим направляющие косинусы вектора $\vec{a}=(3;4)$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{9+16}=5,\qquad \vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right).$$

Отсюда $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$. Теперь, пользуясь значениями частных производных $z'_x(A)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $z'_y(A)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ в точке A, по формуле (**??**) найдем производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

§7. Метод наименьших квадратов обработки результатов эксперимента

Пусть на основании эксперимента получены n значений y_1, y_2, ..., y_n функции (процесса) y при соответствующих значениях аргумента x и результаты оформлены в виде таблицы:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

(7.1)

По таблице (**??**) требуется найти функцию

$$y=\varphi(x), \tag{7.2}$$

удовлетворяющую определенным требованиям. Вид функции (**??**) определяется из теоретических или инженерных соображений. Допустим, что вид функции (**??**) подобран

$$y = \varphi(x, a, b, c, ...). \tag{7.3}$$

Эта функция зависит от входящих в нее параметров a, b, c, ..., которые подбирают так, чтобы функция (**??**) в каком-то смысле наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс. Одним из способов подбора этих параметров является метод наименьших квадратов.

Рассмотрим сумму

$$S(a, b, c, ...) = \sum_{1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, ...)\right]^2 \tag{7.4}$$

квадратов разностей экспериментальных значений y_i и функции $\varphi(x, a, b, c, ...)$ в соответствующих точках. Подберем a, b, c, ... так, чтобы (**??**) имело наименьшее значение. Таким образом, задача сводится к нахождению значений параметров a, b, c, ..., при которых функция $S(a, b, c, ...)$ имеет наименьшее значение. Тогда из необходимых условий экстремума функции нескольких переменных следует, что эти параметры должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \qquad ... \tag{7.5}$$

или в развернутом виде

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, ...)] \cdot \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, ...)}{\partial a} = 0, \\
\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, ...)] \cdot \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, ...)}{\partial b} = 0, \\
\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, ...)] \cdot \dfrac{\partial \varphi(x_i, a, b, c, ...)}{\partial c} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \tag{7.6}$$

Система (**??**) состоит из стольких уравнений, сколько неизвестных параметров a, b, c, ...

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть функция (**??**) имеет вид $\varphi(x,a,b)=ax+b$. Тогда

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2;$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i=0,\\ \frac{\partial S}{\partial b}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,\end{aligned}\right\}$$

или в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n&=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

Система (**??**) состоит из двух уравнений относительно двух неизвестных a, b.

2. Пусть функция (**??**) имеет вид $\varphi(x,a,b,c)=ax^2+bx+c$. Тогда

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2;$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]x_i^2=0,\\ \frac{\partial S}{\partial b}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]x_i=0,\\ \frac{\partial S}{\partial c}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]=0,\end{aligned}\right\}$$

или в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned}a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+c\cdot n&=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

Система (**??**) состоит из трех линейных уравнений относительно трех параметров a, b, c.

Пример 7.1. Пусть экспериментально получено 5 значений функции:

x	1	2	3	4	5
y	-4	-0.5	0.5	4	$4,5$

Покажем эти значения на плоскости (рис. **??**).

По расположению точек можно судить о том, что исследуемый процесс, то есть функция $y = \varphi(x)$, линейная: $\varphi(x, a, b) = ax + b$.

Определим коэффициенты a и b по методу наименьших квадратов из системы (**??**). Предварительно вычислим

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i = -4 \cdot 1 - 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4,5 \cdot 5 = 35;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = -4 - 0,5 + 0,5 + 4 + 4,5 = 4,5;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55; \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

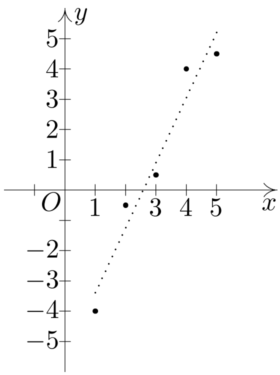

Рис. 2

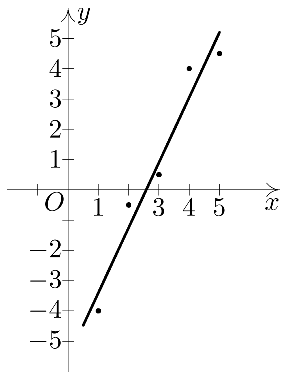

Рис. 3

Теперь система (**??**) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} 55a + 15b &= 35, \\ 15a + 5b &= 4,5. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим $a = 2,15$; $b = -5,55$; $\varphi(x,a,b) = 2,15x - 5,55$. Построим чертеж (рис. **??**), где отметим экспериментальные точки и полученную прямую.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти области определения функций:

а) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

б) $z = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2}{4}$;

в) $z = \dfrac{\ln(3 - x)}{\sqrt{3x - 2y + 8}}$.

2. Найти первый и второй дифференциалы функций двух переменных:

а) $z = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$;

б) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1 + x^2}$;

в) $z = 2^{-\frac{y}{x^2}}$;

г) $z = (xy)^{2x}$.

3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

а) $z = u^2 \operatorname{tg} v$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x^2 + y^2$;

б) $z = u^2 v - v^2 u$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$;

в) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{v}{u}$, $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

4. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функций двух независимых переменных, заданных неявно:

а) $x \ln(x + z) - \dfrac{xy}{z} = 0$;

б) $x^2 - z^2 = z \ln \dfrac{z}{y}$;

в) $e^{z^2} - z + xy^2 = 3$.

5. Найти экстремумы функций $z = f(x, y)$, если

а) $z = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1$;

б) $z = 4x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 2y + 1$;

в) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 32y$.

6. Для функций $z = f(x, y)$, точек $A(x_0; y_0)$ и векторов $\vec{a}$ найти: 1) $\overrightarrow{\operatorname{grad}} z$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$:

а) $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $A(2;1)$, $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$;
б) $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$, $A(1;1)$, $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$;
в) $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $A(2;3)$, $\vec{a} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

Ответы

1. а) часть плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x < \frac{1}{4}y^2 + 2$;

б) часть плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 4$;

в) часть плоскости, координаты которых удовлетворяют системе из двух неравенств: $x < 3$ и $y < \frac{3}{2}x + 4$.

2. а)

$$dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^2+1}{xy}}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^2(y^2+1)}}(y^2-1)dy,$$

$$d^2z = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y^2+1}{x^3y}}d^2x + \frac{1}{2}\frac{(y^2-1)}{\sqrt{x(y^3+y)}\cdot y}dxdy+$$

$$+\frac{(3y^2+1)\sqrt{x}}{2y^2(y^2+1)\sqrt{y^2+1}}d^2y;$$

б)

$$dz = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}dx + \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}dy,$$

$$d^2z = \frac{2y(3x^4+2x^2-y^2-1)}{((1+x^2)^2+y^2)^2}d^2x + \frac{2x(y^2-(1+x^2)^2)}{((1+x^2)^2+y^2)^2}dxdy-$$

$$-\frac{2y(1+x^2)}{((1+x^2)^2+y^2)^2}d^2y;$$

в)

$$dz = \frac{2\ln 2\cdot y\cdot 2^{-\frac{y}{x^2}}}{x^3}dx - \frac{\ln 2\cdot 2^{-\frac{y}{x^2}}}{x^2}dy,$$

$$d^2z = \frac{2y\ln 2\cdot 2^{-\frac{y}{x^2}}(2y\ln 2 - 3x^2)}{x^6}d^2x-$$

$$-\frac{4\ln 2\cdot 2^{-\frac{y}{x^2}}(x^2-y\ln 2)}{x^5}dxdy+\frac{\ln^2 2\cdot 2^{-\frac{y}{x^2}}}{x^4}d^2y;$$

г)

$$dz=(xy)^{2x}\cdot 2(1+\ln(xy))dx+\frac{(xy)^{2x}\cdot 2x}{y}dy,$$

$$d^2z=2(xy)^{2x}(2x(1+\ln(xy))^2+1)d^2x+$$

$$+\frac{4(xy)^{2x}(2x(1+\ln(xy))+1)}{y}dxdy+\frac{2x(xy)^{2x}(2x-1)}{y^2}d^2y.$$

3. а)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x\sin 2(x^2+y^2)+2x^3}{y^2\cos^2(x^2+y^2)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x^2\sin 2(x^2+y^2)+2x^2y^2}{y^3\cos^2(x^2+y^2)};$$

б)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(\sin^3 x+\cos^3 x+2\cos y\sin^2 y-2\cos^2 y\sin y);$$

в)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\sin y(\cos x+x\sin x)}{x^2\sin^2 y+y^2\cos^2 y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\cos x(\sin y-y\cos y)}{x^2\sin^2 y+y^2\cos^2 y}.$$

4. а)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z^2(x+z)\ln(x+z)+xz^2-yz(x+z)}{xz^2+xy(x+z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z(x+z)}{z^2+y(x+z)};$$

б)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2z+1+\ln\dfrac{z}{y}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y\left(2z+1+\ln\dfrac{z}{y}\right)};$$

в)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{2ze^{z^2}-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2xy}{2ze^{z^2}-1}.$$

5. а) $z_{\max} = -\dfrac{7}{9}$ при $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = 0$ и $z_{\min} = -5\dfrac{1}{3}$ при $x = \dfrac{1}{3}$, $y = 2$;

б) $z_{\min} = -3$ при $x = -1$, $y = -2$;

в) $z_{\min} = -49$ при $x = 1$, $y = 2$ и при $x = -1$, $y = 2$.

6. а) $\overrightarrow{\mathrm{grad}} z = 11\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$, $\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{1}{5}$;

б) $\overrightarrow{\mathrm{grad}} z = \dfrac{10}{9}\vec{\imath} + \dfrac{8}{9}\vec{\jmath}$, $\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{4}{3\sqrt{5}}$;

в) $\overrightarrow{\mathrm{grad}} z = \dfrac{9}{325}\vec{\imath} + \dfrac{12}{325}\vec{\jmath}$, $\dfrac{\partial z}{\partial a} = 0$.

Глава 5.
Неопределенный интеграл

§1. Первообразная и неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Потребности развития анализа, стимулируемые запросами естественнонаучных областей, привели к возникновению в нем задачи, обратной основной задаче дифференциального исчисления, — задачи о нахождении по данной производной ее первоначальной функции. Указанная задача является основной для интегрального исчисления.

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется первообразной по отношению к функции $f(x)$, если при каждом значении x в некотором промежутке производная функции $F(x)$ равна функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$ или, что то же, $dF(x) = f(x)dx$.

Например: 1) $F(x) = x^4$ есть первообразная для $f(x) = 4x^3$, т.к. $(x^4)' = 4x^3$; 2) $F(x) = \sin x$ есть первообразная для $f(x) = \cos x$, т.к. $(\sin x)' = \cos x$.

Однако, если отыскание производной данной функции — операция однозначная, то отыскание первообразной является операцией неоднозначной. Так, например, для $f(x) = 4x^3$ первообразной будет не только x^4, но и $x^4 + 5$; $x^4 - 5$ и $x^4 - 21$ и т.д., т.е. функция вида $x^4 + C$, где C — любое число.

Теорема 1.1. Если $F(x)$ и $F_1(x)$ две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, то они отличаются на постоянную, т.е. $F_1(x) = F(x) + C$, где C — постоянная.

Доказательство. Пусть $F(x)$ и $F_1(x)$ являются первообразными для $f(x)$ на некотором промежутке значений x. Тогда по определению первообразной $F'(x) = f(x)$ и $F_1'(x) = f(x)$. Следовательно, $F_1'(x) - F'(x) = 0$. Заменяя разность производных производной разности, имеем $[F_1(x) - F(x)]' = 0$. Это значит, что производная функции $C(x) = F_1(x) - F(x)$ тождественно равна нулю на некотором промежутке. Но тогда на основании следствия из теоремы Лагранжа $C(x)$ в этом промежутке есть постоянная. Отсюда

$$F_1(x) - F(x) = C \qquad F_1(x) = F(x) + C.$$

Запись $F(x) + C$, выражающая любую первообразную для функции $f(x)$, указывает на бесконечное множество этих первообразных, различающихся между собой на какое угодно постоянное слагаемое.

Операция отыскания первообразной для данной непрерывной функции называется интегрированием, а вся совокупность первообразных называется неопределенным интегралом этой функции.

Соответствующая связь между данной функцией и ее неопределенным интегралом записывается формулой

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Символ $\int$ означает операцию интегрирования заданной функции $f(x)$, которая называется подынтегральной функцией, произведение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, а переменная x — переменной интегрирования.

Замечание. Всякую кривую, являющуюся изображением первообразной функции $f(x)$, называют интегральной кривой. Неопределенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой совокупность интегральных кривых.

§2. Свойства неопределенных интегралов

Определение первообразной и неопределенного интеграла основывается на том, что операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны.

Такая связь между этими операциями заключается в том, что последовательное выполнение над некоторой функцией интегрирования и дифференцирования восстанавливает исходную функцию, причем если последняя операция есть интегрирование, то результат содержит дополнительное слагаемое C:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d[F(x) + C] = f(x)dx;$$

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Это соотношение между операциями интегрирования и дифференцирования является основным: оно используется при установлении свойств неопределенного интеграла, служит для вывода большинства формул интегрирования (табличных интегралов), и, кроме того, оно позволяет проверять правильность выполненного интегрирования.

Свойство 2.1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Доказательство. Так как $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Свойство 2.2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Доказательство. Справедливость этого свойства вытекает из того, что дифференциал правой части оказывается здесь равным подынтегральному выражению левой части:

$$d\left[k\int f(x)dx\right] = kd\int f(x)dx = kf(x)dx.$$

Свойство 2.3. Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right] dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

Доказательство. Справедливость этого свойства доказывается таким же образом; дифференцируя обе части равенства, имеем

$$d\left[\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx\right] =$$

$$= d\int f_1(x)dx + d\int f_2(x)dx - d\int f_3(x)dx =$$

$$= f_1(x)dx + f_2(x)dx - f_3(x)dx = [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx.$$

С другой стороны,

$$d\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx.$$

Пример 2.1. Найти $\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx$.

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx = \int x^5 dx - 3\int x^4 dx - 7\int x dx + 5\int dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + 5x + C.$$

Замечание. Вид интеграла не меняется при переходе от переменной x к переменной u, где u — дифференцируемая функция от x. Поэтому, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$.

§3. Таблица основных интегралов и метод непосредственного интегрирования

Основные формулы интегрирования получаются обращением формул дифференцирования. При этом целесообразно использовать те формулы дифференциального исчисления, в которых за аргумент принимается переменная u, являющаяся дифференцируемой функцией x.

Заметим, что справедливость каждой формулы можно проверить дифференцированием.

1. $\int du = u + C$.

2. $\int u^\alpha du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (при $\alpha \neq -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Проверка этой формулы дает

$$d\left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right) = \frac{(\alpha+1)u^\alpha}{\alpha+1}du = u^\alpha du.$$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.

4. $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$

5. $\displaystyle\int e^u du = e^u + C.$

6. $\displaystyle\int \cos u du = \sin u + C$, т.к. $d(\sin u + C) = \cos u du.$

7. $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$, т.к.

$$d\left[\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C\right] = \frac{1}{a} d \operatorname{arctg} \frac{u}{a} = \frac{du}{a^2 + u^2}.$$

11. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left|\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$

16. $\displaystyle\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C.$

17. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$

18. $\displaystyle\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$

19. $\displaystyle\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

Первоначальные навыки по интегрированию связаны с так называемым непосредственным интегрированием, охватывающим применение табличных интегралов, использование свойств **??**–**??** и некоторых элементарных преобразований, приводящих подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

Пример 3.1. Найти $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{x}-3x^2}{5x\sqrt{x}}dx$.

Решение. Предварительно выполняется деление, а затем применяются свойства **??** и **??**:

$$\int \frac{2\sqrt{x}-3x^2}{5x\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{2}{5x}-\frac{3\sqrt{x}}{5}\right)dx =$$

$$= \int \frac{2}{5x}dx - \int \frac{3\sqrt{x}}{5}dx = \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{3}{5}\int x^{0,5}dx.$$

Теперь выполняется интегрирование по формулам 3 и 2:

$$\frac{2}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{3}{5}\int x^{0,5}dx = \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{3}{5}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{2\sqrt{x}-3x^2}{5x\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}\left(\ln|x| - x\sqrt{x}\right) + C.$$

Пример 3.2. Найти $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$.

Решение. Искомый интеграл соответствует формуле 2, если принять $\ln x = u$, откуда $\dfrac{dx}{x} = d\ln x = du$. Поэтому

$$\int \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int \ln^2 x d\ln x = \frac{\ln^3 x}{x} + C.$$

Пример 3.3. Найти $\displaystyle\int \sin^4 x\cos x dx$.

Решение. Этот интеграл соответствует той же формуле, если учесть, что $\cos x dx = d\sin x$. Поэтому

$$\int \sin^4 x\cos x dx = \int \sin^4 x\, d\sin x = \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Пример 3.4.

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

Здесь учтено, что $dx = d(x + a)$ для всякого числа a.

Пример 3.5. Найти $\int \frac{2xdx}{x^2 + 5}$.

Решение.

$$\int \frac{2xdx}{x^2 + 5} = \int \frac{d(x^2 + 5)}{x^2 + 5} = \ln |x^2 + 5| + C.$$

Здесь учтено, что $d(x^2 + 5) = 2xdx$.

Среди интегралов, подходящих под формулу 5, можно особо выделить случай, когда подынтегральная функция имеет вид e^{ax}. Соответствующее интегрирование выполняется так:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int e^{ax} d(ax) = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

Пример 3.6.

$$\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C.$$

Пример 3.7.

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 5} = \int \frac{d(e^x + 5)}{e^x + 5} = \ln |e^x + 5| + C.$$

Здесь учтено, что $e^x + 5 = u$, откуда $e^x dx = de^x = d(e^x + 5) = du$.

Пример 3.8. Найти $\int \frac{(3\sqrt{x} - 2x)^2}{5\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Предварительное преобразование начинается здесь с раскрытия скобок в числителе, а затем подынтегральная функция разбивается на отдельные слагаемые, что дает

$$\int \frac{9x - 12x\sqrt{x} + 4x^2}{5\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(\frac{9}{5} x^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{5} x^{\frac{7}{6}} + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) dx =$$

$$= \frac{9x^{\frac{5}{3}}}{5 \cdot \frac{5}{3}} - \frac{12x^{\frac{13}{6}}}{5 \cdot \frac{13}{6}} + \frac{4x^{\frac{8}{3}}}{5 \cdot \frac{8}{3}} + C = \frac{27}{25} x^{\frac{5}{3}} - \frac{72}{65} x^{\frac{13}{6}} + \frac{3}{10} x^{\frac{8}{3}} + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{(3\sqrt{x} - 2x)^2}{5\sqrt[3]{x}} dx = \frac{27x\sqrt[3]{x^2}}{25} - \frac{72x^2\sqrt[6]{x}}{65} + \frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{10} + C.$$

Пример 3.9. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$ требует предварительного разбиения подынтегральной функции на два слагаемых исходя из того, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Это дает

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} + \int \frac{\sin x dx}{\cos x}.$$

Заметив далее, что $\cos x dx = d \sin x$, а $\sin x dx = -d \cos x$, имеем

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos c} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} - \int \frac{d \cos x}{\cos x} =$$

$$= \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ **при условии** $p^2 > 4q$**.**

Пример 3.10. Найти $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 7}$.

Решение. Преобразование знаменателя $x^2 + 8x + 7 = (x+4)^2 - 9$ позволяет сразу перейти к табличному интегралу 12, а поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 7} = \int \frac{dx}{(x+4)^2 - 9} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2 - 9} =$$

$$= \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + C.$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ **при условии** $p^2 < 4q$**.**

Такие интегралы после преобразования знаменателя к сумме квадратов отыскиваются по табличному интегралу 10.

Пример 3.11.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 41} = \int \frac{d(x+5)}{(x+5)^2 + 16} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{4} + C.$$

Пример 3.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{11 + 10x + x^2}}$ после преобразования знаменателя

$$11 + 10x - x^2 = 36 - 25 + 10x - x^2 = 36 - (x-5)^2$$

принимает интегрируемую форму:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x+x^2}} = \arcsin\frac{x-5}{6} + C.$$

Пример 3.13.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{21-4-4x-x^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{21-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{\sqrt{21}} + C.$$

§4. Метод замены переменной (интегрирование подстановкой)

Этот способ интегрирования применяется в случаях, когда преобразования подынтегральной функции с помощью свойств неопределенного интеграла или путем разбиения ее на отдельные слагаемые не приводят к табличным формам, но можно получить такие формы в результате перехода к новой переменной.

В общем виде операция подстановки или замены переменной определяется соотношением

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt,$$

где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция, определенная на некотором промежутке так, что существует сложная функция $f[\varphi(t)]$.

Пример 4.1. Найти $\displaystyle\int \sqrt{3x^2+8}\cdot xdx$.

Решение.

$$\int \sqrt{3x^2+8}\cdot xdx = \left| \begin{array}{l} u=3x^2+8 \\ du=6xdx \\ xdx=\dfrac{1}{6}du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}\sqrt{u^3} + C.$$

После выполнения обратной замены получаем

$$\int \sqrt{3x^2+8}\cdot xdx = \frac{1}{9}\sqrt{(3x^2+8)^3}+C.$$

Пример 4.2. Найти $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} x=t^2 \\ \sqrt{x}=t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array} \right| = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}}+C.$$

§5. Интегрирование по частям

Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Имеем

$$d(uv) = udv + vdu,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Последняя формула и есть формула интегрирования по частям.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется каким-либо образом в виде произведения двух множителей u и dv (последний обязательно содержит dx) и заменяется двумя интегрированиями: 1) при отыскании v из выражения для dv; 2) при отыскании интеграла от vdu. Может оказаться, что эти два интеграла легко находятся, тогда как заданный интеграл непосредственно найти трудно.

С помощью формулы интегрирования по частям можно вычислить следующие типы интегралов:

I.

$$\int P(x)\ln x dx;\quad \int P(x)\arcsin x dx;$$

$$\int P(x)\arccos x dx;\quad \int P(x)\operatorname{arctg} x dx,$$

где $P(x)$ — любой многочлен от x.

Для интегралов I типа за u принимается $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ соответственно, а $dv = dx$.

Пример 5.1. Найти $\int \ln x dx$.

Решение.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

II.

$$\int P(x)e^{ax}dx;\quad \int P(x)\sin kx dx;\quad \int P(x)\cos kx dx,$$

где $k = \text{const} \neq 0$.

Для интегралов II типа за u принимается многочлен $P(x)$. Если $P(x)$ — многочлен выше первой степени, то операция интегрирования по частям приводит к результату лишь после применения несколько раз подряд.

Пример 5.2. Найти $\int x\sin 2x dx$.

Решение.

$$\int x\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = \sin 2x dx, \\ v = \int \sin 2x dx = \dfrac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 5.3. Найти $\int x^2 e^x dx$.

Решение.

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\ du = 2xdx \\ dv = e^x dx,\ v = \displaystyle\int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = e^x dx,\ v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Пример 5.4. Найти $\int e^x \cos x dx$.

Иногда повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к уравнению искомого интеграла. Обозначая искомый интеграл буквой I и полагая $u = \cos x$, $dv = e^x dx$, получим

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ dv = e^x dx \\ du = \cos x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

$$= e^x(\cos x + \sin x) - I.$$

Перенося I в левую часть равенства и разделив на 2, найдем

$$I = \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

§6. Интегрирование элементарных дробей

Рассмотрим сначала элементарные (простейшие) дроби. К таким дробям относятся дроби следующих четырех типов:

1. $\dfrac{A}{x-a}$.
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$.
3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$.

4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k>1$, $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

Здесь A, B, p, q — действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Дроби 1-го и 2-го типа легко интегрируются:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=$$

$$=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

Рассмотрим $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ $\left(\dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$. В знаменателе подынтегральной функции выделяют полный квадрат

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

а затем подстановкой приводят к интегралу вида

$$\int\frac{Mt+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+N\int\frac{dt}{t^2+a^2},$$

(где $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, M и N — некоторые числа), легко сводимому к «табличным» интегралам.

Интегрирование дробей 4-го типа рассматривать не будем. Интересующихся мы отсылаем к более подробным учебникам по высшей математике (см. список литературы).

Пример 6.1. Найти $\displaystyle\int\frac{2x+5}{x^2+x+1}dx$.

Решение. Так как $(x^2+x+1)'=2x+1$, $2x+5=(2x+1)+4$, то

$$\int\frac{2x+5}{x^2+x+1}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+4\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\ln(x^2+x+1)+4\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\left|x+\frac{1}{2}=t\right|=$$

$$= \ln(x^2+x+1) + 4\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Используя формулу 10 в таблице интегралов, окончательно получим

$$\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

§7. Интегрирование рациональных дробей

Важнейшим классом элементарных функций, интегралы от которых находятся при помощи достаточно простой последовательности действий, является класс рациональных функций.

Многочленом n-го порядка называется функция вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,$$

в которой a_0, a_1, ..., a_n — действительные или комплексные числа, причем $a_n \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение 7.1. Рациональной дробью называется функция вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно.

Рациональная дробь называется правильной, если $n < m$, и неправильной, если $n \geqslant m$. В случае неправильной рациональной дроби выполняется деление

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = W_{n-m}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)},$$

где $n-m \geqslant 0$, $r < n$, $W_{n-m}(x)$ — некоторый многочлен, который называется целой частью рациональной дроби, а выражение $\frac{R_r(x)}{Q_m(x)}$ является правильной рациональной дробью.

Таким образом, получим

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int W_{n-m}(x)dx + \int \frac{R_r(x)}{Q_m(x)}dx.$$

Поэтому достаточно изучить интегрирование правильных рациональных дробей. Чтобы проинтегрировать правильную дробь, необходимо разложить ее на сумму простейших дробей. Для этого надо вспомнить, что каждый многочлен ненулевой степени с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней, причем множители второй степени не имеют действительных корней.

Пусть дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеет вид

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+...+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+...+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}+...,$$

с некоторыми действительными коэффициентами A_1, ..., A_k, M_1, ..., M_s, N_1, ..., N_s, где $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

В последнем равенстве все слагаемые приведем к общему знаменателю, который равен $Q_m(x)$. После приведения к общему знаменателю числители дробей левой и правой частей равенства окажутся равными. Два многочлена равны, следовательно, равны коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочлена $P_n(x)$ и многочлена, стоящего в правой части, получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Изложенный метод называют методом неопределенных коэффициентов.

Более подробно рассмотрим на примерах.

Пример 7.1. Найти $\displaystyle\int\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}dx$.

Решение. Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}$ неправильная. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1,\qquad x(x-1)^2=x^3-2x^2+x.$$

$$\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1+\frac{5x^2+2x+1}{x(x-1)^2}.$$

Теперь правильную дробь $\dfrac{5x^2+2x+1}{x(x-1)^2}$ разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{5x^2+2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

где числа A, B, C неизвестны. Приводим правую часть к общему знаменателю. Получим дробь

$$\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}.$$

Две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если тождественно равны их числители, поэтому

$$5x^2+2x+1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx,$$

$$5x^2+2x+1=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях записанного тождества. Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A+B=5, \\ -2A-B+C=2, \\ A=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $A=1$, $B=4$, $C=8$. Таким образом,

$$\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}.$$

Итак,

$$\int\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}\right)dx=$$

$$=\int dx+\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{dx}{x-1}+8\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=x+\ln|x|+4\ln|x-1|-\frac{8}{x-1}+C.$$

Пример 7.2. Найти $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Решение. Подынтегральная функция $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$ есть правильная дробь. Знаменатель этой дроби разложен на простейшие множители. Представим эту дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

$$x = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=1, \\ A-C=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A=\dfrac{1}{3}$, $B=-\dfrac{1}{3}$, $C=\dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}.$$

Поэтому

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}I_1,$$

где $I_1 = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$.

Сделаем замену $x^2+x+1=t$, тогда $(2x+1)dx=dt$. Получим

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

§8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

I. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m и n — целые числа.

1. Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетное положительное целое число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пусть $n = 2p+1$. Тогда

$$\int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p d\sin x =$$

$$= |\sin x = t| = \int t^m (1-t^2)^p dt.$$

Пример 8.1. Найти $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[4]{\cos x}}$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[4]{\cos x}} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} d\cos x = -\int (\cos x)^{-\frac{1}{4}} d\cos x +$$

$$+\int (\cos x)^{\frac{7}{4}} d\cos x = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C.$$

2. Если же m и n — четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 8.2. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\int \cos 4x d4x = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. Если $m+n=-2k$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. $m+n$ является целым четным отрицательным числом, то используются подстановки $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.

Пример 8.3. Найти $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x \cos^2 x \cos^4 x} = \left| \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \right| =$$

$$= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x+1)^2}{\operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^4 x} d \operatorname{tg} x = |\operatorname{tg} x = t| =$$

$$= \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^4} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

Замечание. В общем случае интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n — целые числа, вычисляются с помощью рекуррентных формул, которые выводятся путем интегрирования по частям.

II. Интегралы типа $\int \mathbf{tg}^m\, x\, dx$, $\int \mathbf{ctg}^m\, x\, dx$ приводятся к табличным с помощью подстановки $\operatorname{tg} x = t$ $(\operatorname{ctg} x = t)$ и тригонометрических формул

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 8.4. Найти $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \operatorname{tg} x\,dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

III. Интегрирование произведений синусов и косинусов.

Формулы тригонометрии

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

позволяют представлять произведение синусов и косинусов в виде линейных комбинаций тех же функций (с другими аргументами) и могут быть использованы для интегрирования в этом случае.

Пример 8.5. Найти $\int \sin 4x \sin 6x\,dx$.

$$\int \sin 4x \sin 6x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) - \frac{1}{20}\int \cos 10x\,d(10x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

IV. Пусть дано выражение, зависящее, и притом рационально, только от тригонометрических функций. Так как все тригонометрические функции рационально определяются через $\sin x$ и $\cos x$, то это выражение можно считать рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$, т.е. оно имеет вид $R(\sin x, \cos x)$.

Интегралы вида $\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)\,dx}$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ преобразуются к интегралам от рациональной функции нового аргумента t. Имеем

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

т.к. $x = 2\operatorname{arctg} t$, то $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Таким образом,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 8.6. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8+2t^2} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Замечание. Если $\sin x$ и $\cos x$ входят в выражение функции R только в четных степенях, то удобнее использовать подстановку $\operatorname{tg} x = t$, учитывая, что

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 8.7. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(2-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

§9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Рассмотрим теперь интегрирование некоторых простейших типов иррациональных функций.

I. Интегралы вида $\boldsymbol{\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx}$, где R — рациональная функция своих аргументов; m_1, n_1, m_2, n_2, ... $\in \mathbb{Z}$, вычисляются с помощью подстановки $x = t^s$, где s — общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}$, $\dfrac{m_2}{n_2}$, ...

Пример 9.1. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{3t^2 dt}{t^3+t} = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1) + C.$$

II. Интегралы вида

$$\boldsymbol{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx}$$

аналогично вычисляются с помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s — общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}$, $\dfrac{m_2}{n_2}$, ...

Пример 9.2. Найти $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2;\ dx = \frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2} \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\int \left(\frac{1+t^2}{2t^2}\right)^2 t\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

III. Интегралы вида $\int \boldsymbol{R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx}$ с помощью подстановки $u = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)' = ax + \frac{b}{2}$ сводятся к одному из следующих видов интегралов:

$$1)\ \int R\left(u, \sqrt{l^2-u^2}\right)du; \quad 2)\ \int R\left(u, \sqrt{u^2-l^2}\right)du;$$

$$3)\ \int R\left(u, \sqrt{l^2+u^2}\right)du,$$

которые с помощью подстановок $u = l\sin t$, $u = \frac{l}{\cos t}$, $u = l\operatorname{tg} t$ соответственно сводятся к интегралам от тригонометрических функций.

Пример 9.3. Найти $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. Данный интеграл относится к интегралам вида $\int R\left(x, \sqrt{l^2-x^2}\right)dx$, поэтому делаем подстановку $x = 3\sin t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos t\,dt}{(9\sin^2 t+16)\cdot 3\cos t} =$$

$$= \int \frac{dt}{25\sin^2 t + 16\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t(25\operatorname{tg}^2 t + 16)} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg} t}{25\operatorname{tg}^2 t + 16} = \frac{1}{25}\int \frac{d\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^2 t + \left(\frac{4}{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{20}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\operatorname{tg} t\right) + C.$$

Останется вернуться к аргументу x; применяя для этого формулы тригонометрии, получаем

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\dfrac{x}{3}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}},$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{20}\operatorname{arctg}\left(\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}\right) + C.$$

Пример 9.4. Найти $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-(x^2-2x+1)}\,dx = \int \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} x-1=u \\ du=dx \end{array}\right| = \int \sqrt{1-u^2}\,du = \left|\begin{array}{l} u=\sin t \\ du=\cos t\,dt \\ t=\arcsin u \end{array}\right| =$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x-1) + \frac{1}{2}\sin\arcsin(x-1)\cos\arcsin(x-1) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)\right] + C.$$

Итак,

$$\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)\right] + C.$$

IV. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}}$ $(r=1,2)$ с помощью замены $mx+n=\dfrac{1}{t}$ сводятся к известным интегралам.

Пример 9.5. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Решение. Полагаем $x=\dfrac{1}{t}$. Тогда

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\quad \sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=-\int \frac{dt}{t^2\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-t^2}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}}=-\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=-\arcsin\frac{\dfrac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}}+C.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{3x-2\sqrt{x}+5}{6\sqrt{x^3}}dx.$ Ответ: $\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}\ln|x|-\dfrac{5}{3\sqrt{x}}+C.$

2. $\displaystyle\int \frac{(2\sqrt{x}-3x)^2}{5x}dx.$ Ответ: $\dfrac{4}{5}x-\dfrac{8}{5}x\sqrt{x}+\dfrac{9}{10}x^2+C.$

3. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}}.$ Ответ: $2\sqrt{\sin x}+C.$

4. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{(e^x+8)^3}.$ Ответ: $-\dfrac{1}{2(e^x+8)^2}+C.$

5. $\displaystyle\int \sqrt{e^x+1}e^x dx.$ Ответ: $\dfrac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3}+C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x-35}.$ Ответ: $\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{x-7}{x+5}\right|+C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9x-36}$. Ответ: $\displaystyle\frac{1}{15}\ln\left|\frac{x-3}{x+12}\right|+C$.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$. Ответ: $\displaystyle\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C$.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5x+9}$. Ответ: $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}+C$.

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+8x-x^2}}$. Ответ: $\displaystyle\arcsin\frac{x-4}{5}+C$.

11. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$. Ответ: $\displaystyle-\frac{1}{3}\sqrt{25-3x^2}+C$.

12. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2-3x}$. Ответ: $\displaystyle\frac{1}{9}\left[2-3x-2\ln|2-3x|\right]+C$.

13. $\displaystyle\int \cos 2x\,dx$. Ответ: $\displaystyle\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

14. $\displaystyle\int xe^{x^2+5}dx$. Ответ: $\displaystyle\frac{1}{2}e^{x^2+5}+C$.

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$. Ответ: $\displaystyle\frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg}2x)^3}+C$.

16. $\displaystyle\int x\ln x\,dx$. Ответ: $\displaystyle\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$.

17. $\displaystyle\int xe^{-2x}dx$. Ответ: $\displaystyle-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C$.

18. $\displaystyle\int (x^2-5x+8)\sin 2x\,dx$.

Ответ: $\displaystyle-\frac{2x^2-10x+15}{4}\cos 2x+\frac{2x-5}{4}\sin 2x+C$.

19. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}x\,dx$. Ответ: $\displaystyle\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$.

20. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. Ответ: $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$.

21. $\displaystyle\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Ответ: $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$.

22. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx.$ Ответ: $\displaystyle\frac{4x+3}{2(x+1)^2} + 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$

23. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx.$

Ответ: $\displaystyle -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$

24. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx.$ Ответ: $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

25. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx.$ Ответ: $\displaystyle\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + C.$

26. $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx.$ Ответ: $\displaystyle\frac{3}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}.$ Ответ: $\displaystyle\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin^2 x}.$ Ответ: $\displaystyle\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg} x+4}{3}\right) + C.$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$ Ответ: $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}.$ Ответ: $\displaystyle -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + C.$

31. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ Ответ: $\displaystyle\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

32. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}.$ Ответ: $\displaystyle -\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + C.$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$ Ответ: $6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$ Ответ: $\displaystyle\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} + C.$

Глава 6.

Определенный интеграл

§1. Определение определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ разобьем этот отрезок на n произвольных частей. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1};x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i ($x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$). Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1.1)$$

которую назовем интегральной суммой для функции $f(x)$ на $[a;b]$ и которая равна сумме площадей прямоугольников (рис. **??**). Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta x_i\}$.

Определение 1.1. Если существует конечный предел I интегральной суммы (**??**) при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (1.2)$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

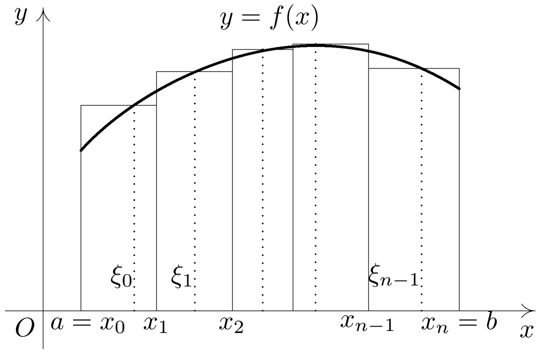

Рис. 1

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$. Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования.

Из определения определенного интеграла следует, что величина интеграла (**??**) зависит только от вида функций и от чисел a и b.

Замечание. Условия существования определенного интеграла см. в [1] и [2].

§2. Основные свойства определенных интегралов

Свойство 2.1. Если $a = b$, то по определению полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0. \tag{2.1}$$

Если $a > b$, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Свойство 2.2. Каковы бы ни были числа a, b, c, всегда имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Свойство 2.3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.4}$$

Свойство 2.4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Свойство 2.5. Если всюду на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)\geqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Свойство 2.6. Если всюду на отрезке $[a,b]$ $f(x)\leqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Свойство 2.7. Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $a<b$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{2.7}$$

Доказательство. По условию для любого $x\in[a,b]$ имеем $m\leqslant f(x)\leqslant M$. Применяя оценку (**??**) к этим неравенствам и проинтегрировав их почленно, получим

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx.$$

С учетом того, что $\int\limits_a^b dx = b-a$, получаем неравенства (**??**).

Свойство 2.8 [теорема о среднем]. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке существует точка c такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{2.8}$$

Формула (**??**) называется формулой среднего значения.

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда существуют числа m и M такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$, где $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$. Согласно формуле (**??**) имеем

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

или

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Положим $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu$, где $m \leqslant \mu \leqslant M$. Тогда существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = \mu$. Поэтому

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Тем самым доказано неравенство (**??**).

§3. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть в определенном интеграле $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ меняется верхний предел, не выходя из отрезка $[a,b]$. Тогда величина интеграла будет изменяться. Интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию своего верхнего предела.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ с переменным верхним пределом x. Обозначим

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt. \tag{3.1}$$

Геометрически функция $\Phi(x)$ представляет собой площадь заштрихованной криволинейной трапеции, если $f(x) > 0$ (рис. **??**).

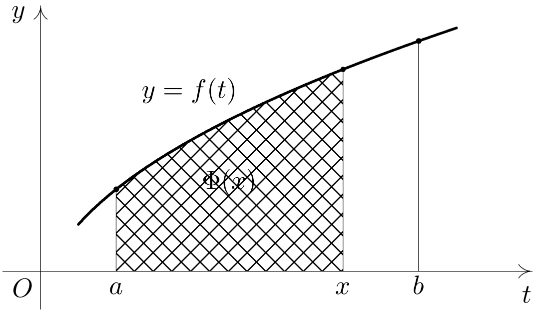

Рис. 2

Теорема 3.1. Если $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$ и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$, то имеет место равенство

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x). \tag{3.2}$$

Существует практически более удобный метод вычисления определенных интегралов.

Теорема 3.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3.3}$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Доказательство. Пусть $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. По теореме **??** функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$. Итак, $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на $[a,b]$. Так как первообразные отличаются на постоянную, т.е. $\Phi(x) = F(x)+C$, $a \leqslant x \leqslant b$, то имеет место равенство $\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x)+C$, $a \leqslant x \leqslant b$, где C — некоторое число. Подставим в это равенство $x = a$ и используем формулу (**??**) из §**??**. Получим

$$\int\limits_a^a f(t)\,dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

т.е. для любого $x \in [a,b]$

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Полагая здесь $x = b$, получим формулу (**??**).

Принято записывать $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 (3x^2 - 1)\,dx$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_0^2 (3x^2 - 1)\,dx = \left(\frac{3x^3}{3} - x\right)\Bigg|_0^2 = (2^3 - 0^3) - (2 - 0) = 6.$$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|x + \sqrt{1+x^2}|\Big|_0^3 =$$

$$= \ln(3+\sqrt{10}) - \ln 1 = \ln(3+\sqrt{10}).$$

§4. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 4.1. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Если: 1) функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$; 2) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$; 3) $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{4.1}$$

Замечание. Доказательство теоремы **??** см. в [2] (т. 1, с. 399).

Пример 4.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$.

Решение.

$$\int\limits_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}} = \left|\begin{array}{ll} \sqrt{2+4x}=t; & dx=\dfrac{t}{2}dt; \\ x=\dfrac{t^2-2}{4}; & \begin{array}{|c|c|c|}\hline x & 1 & 4 \\ \hline t & \sqrt{6} & \sqrt{18} \\ \hline\end{array}\end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} \frac{(t^2-2)t\,dt}{4\cdot t\cdot 2} = \frac{1}{8}\int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} (t^2-2)\,dt = \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)\Bigg|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{18\sqrt{18}}{3}-2\sqrt{18}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{6\sqrt{6}}{3}-2\sqrt{6}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 4.2. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Решение.

$$\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left|\begin{array}{ll} t=\dfrac{1}{x}; & dx=-\dfrac{dt}{t^2}; \\ x=\dfrac{1}{t}; & \begin{array}{|c|c|c|}\hline x & 3/4 & 4/3 \\ \hline t & 4/3 & 3/4 \\ \hline\end{array}\end{array}\right| =$$

$$= -\int\limits_{4/3}^{3/4} \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}} = -\int\limits_{4/3}^{3/4} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_{4/3}^{3/4} =$$

$$= -\ln\left|\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right| + \ln\left|\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

§5. Интегрирование по частям

Теорема 5.1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывные вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Тогда

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Интегрируем обе части тождества на отрезке $[a,b]$ и получим

$$\int\limits_a^b (uv)'dx = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b uv'dx \tag{5.2}$$

или

$$uv\Big|_a^b = \int\limits_a^b v\,du + \int\limits_a^b u\,dv.$$

Окончательно

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Пример 5.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x; & dv = \sin x\,dx; \\ du = dx; & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array}\right| =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\cdot 0 + 0\cos 0 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x; & dv = x\,dx; \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = \displaystyle\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

§6. Несобственные интегралы

1. Интеграл с бесконечными пределами.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна для всех значений x, $a \leqslant x < +\infty$.

Определение 6.1. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $[a;+\infty)$ называется предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$.

Записывают это так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{6.1}$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся, а если не существует, то расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx; \tag{6.2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx. \tag{6.3}$$

Рассмотренные интегралы называются интегралами с бесконечными пределами.

Замечание. Если хотя бы один из интегралов в правой части равенства (**??**) расходится, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже расходится (в противном случае — сходится).

Пример 6.1. Исследовать сходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится.

Пример 6.2. Исследовать сходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} e^x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^x\,dx = \lim_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} e^b - 1 = \infty.$$

Интеграл расходится.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $f(x) \geqslant 0$, тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ есть площадь бесконечной криволинейной трапеции (рис. **??**), ограниченной кривой $y = f(x)$, прямой $x = a$ слева и осью абсцисс.

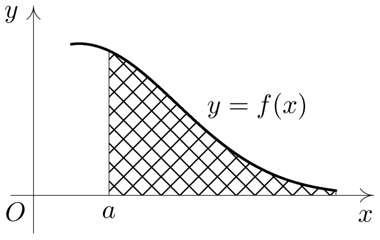

Рис. 3

Пример 6.3. Исследовать сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha = \text{const}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. 1) Пусть $\alpha = 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = +\infty.$$

Интеграл расходится.

2) Пусть $\alpha \neq 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{-\alpha+1} - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1\ (\ ); \\ +\infty, & \alpha < 1\ (\ ). \end{cases}$$

Итак, $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} , & \alpha > 1, \\ , & \alpha \leqslant 1. \end{cases}$

Если при рассмотрении несобственных интегралов (**??**)–(**??**) надо только установить, сходится ли данный интеграл или расходится, то применяются следующие теоремы.

Теорема 6.1. Если для всех x $(x \geqslant a)$ выполняется неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ и если $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится, причем

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Теорема 6.2. Если для всех x $(x \geqslant a)$ выполняется неравенство $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, причем $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 6.3. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

Замечание. Примеры использования перечисленных теорем можно рассмотреть в дополнительной литературе [2].

2. Интеграл от разрывной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при $a \leqslant x < b$, а при $x = b$ функция либо не определена, либо терпит бесконечный разрыв $\left(\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty\right)$.

Определение 6.2. Несобственным интегралом от разрывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ называют предел

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \quad (\varepsilon > 0) \tag{6.4}$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx. \quad (\delta > 0) \tag{6.5}$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в какой-нибудь промежуточной точке $x = c$ интервала $[a, b]$, $a < c < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx, \tag{6.6}$$

причем ε и δ стремятся к нулю произвольно и независимо друг от друга.

Интегралы (**??**)–(**??**) называют интегралами от разрывных функций.

Замечание. Интеграл (**??**) сходится, если оба предела в правой части равенства (**??**) существуют и расходится, если хотя бы один из указанных пределов не существует.

Предположим, что линия $y = f(x)$ имеет в точке $x = b$ асимптоту, перпендикулярную к оси Ox; тогда ограниченная ею трапеция будет бесконечной (с бесконечными высотами) (рис. **??**). Если существует несобственный интеграл от функции $f(x)$, то считают, что он измеряет площадь этой бесконечной трапеции; в противном случае трапеция площади не имеет.

Пример 6.4. Исследовать сходимость $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = 2.$$

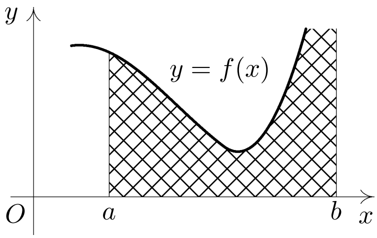

Рис. 4

Интеграл сходится.

Пример 6.5. Исследовать сходимость $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение.

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(1-\alpha)(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} & \alpha < 1\ (\ ); \\ \infty \ \ \alpha \geqslant 1\ (\ ). \end{cases}$$

Итак, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} & \alpha < 1, \\ & \alpha \geqslant 1. \end{cases}$ Аналогично можно показать, что $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} & \alpha < 1, \\ & \alpha \geqslant 1. \end{cases}$

Сформулируем теоремы, аналогичные теоремам **??**–**??** предыдущего пункта.

Теорема 6.4. Если на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке $x = b$, причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ также сходится.

Теорема 6.5. Если на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке $x = b$, причем во всех точках этого промежутка выполнены неравенства $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится, то и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Теорема 6.6. Если $f(x)$ — функция знакопеременная на $[a, b]$, разрывная только в точке $x = b$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

§7. Приближенные методы интегрирования

Обратимся сейчас к некоторым употребительным методам приближенного интегрирования, позволяющим находить приближенное значение определенного интеграла от любой непрерывной функции с практически достаточной точностью. Потребность в приближенном вычислении интеграла может возникнуть и тогда, когда не существует или неизвестен метод отыскания точного значения интеграла, и тогда, когда этот метод известен, но неудобен.

Излагаемые приближенные численные методы основаны на следующем: рассматривая интеграл как площадь криволинейной трапеции, мы получим ее приближенное значение, т.е. приближенное значение интеграла, если вычислим площадь другой трапеции, ограничивающая линия которой по возможности мало отклоняется по положению от заданной линии. Вспомогательную линию при этом проводим так, чтобы получилась фигура, площадь которой легко вычисляется.

Рассмотрим следующие правила численного интегрирования: 1) правило прямоугольников и правило трапеций, 2) правило параболических трапеций (правило Симпсона).

1. Правило прямоугольников и правило трапеций.

Разделим интервал интегрирования $[a, b]$ на n равных частей (частичных интервалов) и заменим данную трапецию ступенчатой фигурой, состоящей из n прямоугольников, опирающихся на частичные интервалы, причем высоты этих прямоугольников равны значениям функции $y = f(x)$ в начальных или конечных точках частичных интервалов (рис. **??**). Значение площади этой фигуры и будет давать приближенное значение искомого интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Результат будет тем более точен, чем больше взято число частичных интервалов.

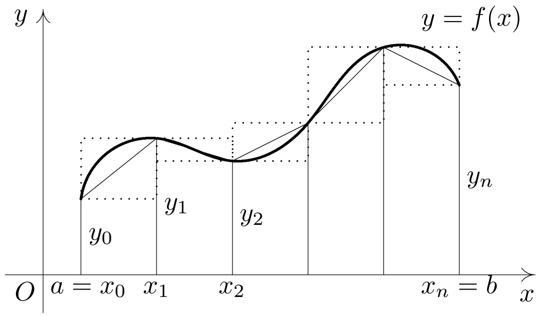

Рис. 5

Если обозначить значение функции $f(x)$ в точках деления через y_0, y_1, ..., y_{n-1}, y_n, т.е. положить $y_k = f(x_k)$, $x_k = a + k\Delta x$, где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $k = \overline{0, n}$, то, очевидно, будем иметь следующие формулы:

$$I \approx \underline{I} = \Delta x(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \tag{7.1}$$

или

$$I \approx \overline{I} = \Delta x(y_1 + y_2 + ... + y_n), \tag{7.2}$$

где формула (**??**) выражает площадь ступенчатой фигуры с «недостатком», а формула (**??**) — площадь ступенчатой фигуры с «избытком». Эти формулы и называются формулами прямоугольников.

Оставим разбиение интервала $[a; b]$ прежним, но заменим теперь каждую дугу линии $y = f(x)$, соответствующую частичному интервалу, хордой, соединяющей конечные точки этой дуги. Таким образом, мы заменяем данную криволинейную трапецию n прямолинейными (рис. **??**). Геометрически очевидно, что площадь такой трапеции более точно выражает искомую площадь, чем площадь n-ступенчатой фигуры из правила прямоугольников.

Ясно, что площадь каждой трапеции, построенной на частичном интервале, равна полусумме площадей, соответствующих этому интервалу прямоугольников. Суммируя все эти площади, получим:

$$I \approx I = \frac{\underline{I} + \overline{I}}{2} = \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right). \tag{7.3}$$

Эта формула и носит название формулы трапеций.

При этом ясно, что если функция монотонно возрастает (этот случай изображен на рис. **??**), то $\underline{I} < I < \overline{I}$, а если монотонно убывает, то, наоборот, $\underline{I} > I > \overline{I}$. Беря в качестве приближенного значения интеграла значение, получаемое по формуле трапеций $I \approx \dfrac{\underline{I} + \overline{I}}{2}$, мы будем уверены, что абсолютная ошибка не превосходит абсолютной величины полуразности $\overline{I}$ и $\underline{I}$, т.е.

$$|\Delta I| \leqslant \frac{|\overline{I} + \underline{I}|}{2}.$$

Пример 7.1. Найти $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Пусть $n = 10$. Тогда $\Delta x = 0,1$; $x_k = k \cdot 0,1$; $k = \overline{0,10}$. Вычисляя значение функции (с точностью до 0,001), получим

$$\underline{I} = 0,1(1 + 0,990 + 0,962 + 0,917 + 0,862 + 0,8+$$

$$+0,735 + 0,671 + 0,610 + 0,552) \approx 0,810.$$

Аналогично вычислим $\overline{I}$: $\overline{I} \approx 0,755$. В этом примере $\underline{I} > \overline{I}$, так как функция убывающая. Таким образом, $0,755 < I < 0,810$. Возьмем в качестве I значение

$$I \approx \frac{0,755 + 0,810}{2} = 0,782.$$

Сравним найденное значение интеграла с его точным значением: $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0,785$. При этом абсолютная ошибка не превосходит $|\Delta I| < 0,028$, а относительная $\dfrac{0,028 \cdot 100}{0,782} \approx 3,6\%$.

2. Правило Симпсона.

Это правило требует не большей затраты труда, чем предыдущее, а приводит обычно к более точным результатам (при одном и том же разбиении интервала).

Как и раньше, разобьем интервал $[a, b]$ на n равных частей, но предположим, что n — четное число, $n = 2m$. Заменим дугу линии $y = f(x)$, соответствующую интервалу $[x_0, x_2]$, дугой параболы, ось которой параллельна оси ординат, проходящей через следующие три точки: начальную точку дуги (x_0, y_0), среднюю точку дуги (x_1, y_1), конечную точку дуги (x_2, y_2) (рис. **??**). Такую параболу всегда можно провести единственным образом. Подобные замены произведем и в интервалах $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$.

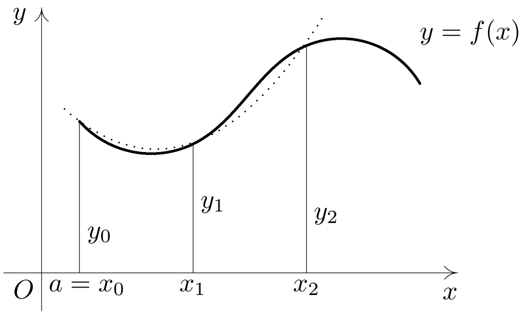

Рис. 6

Итак, заданная трапеция заменяется m параболическими трапециями, площади которых найти нетрудно. Можно показать, что площадь S трапеции, ограниченной какой-нибудь параболой $y = px^2 + qx + r$, с осью, параллельной оси ординат, будет выражаться формулой

$$S = \frac{(.\ .)}{6}(y + 4y + y)$$

где y — ордината начальной точки, y — ордината средней и y — ордината конечной точек дуги параболы [2].

Возвращаясь к первоначальной задаче, найдем по этой формуле площадь S_1 параболической трапеции, опирающейся на интервал $[x_0, x_2]$:

$$S_1 = \frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

где $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$. Аналогично выразятся площади S_2, S_3, ..., S_m. Сложив почленно эти равенства, получим выражение, дающее приближенное значение искомого интеграла:

$$I \approx \frac{\Delta x}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) +$$

$$+2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})]. \qquad (7.4)$$

Это и есть формула Симпсона.

Пример 7.2. Для интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по правилу Симпсона только при $n = 4$ найдем $I \approx 0,78539$ со всеми верными знаками. Пользуясь правилом трапеций, мы получили для величины этого интеграла худший результат при значительно большем объеме вычислений.

Замечание. Приведенные правила приближенного численного интегрирования позволяют находить интегралы не только от функций, заданных формулами, но и от функций, заданных геометрическим или табличным способом.

§8. Вычисление площадей в прямоугольных координатах

I. а) Пусть задана криволинейная трапеция $aABb$ (рис. **??**), ограниченная осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и дугой кривой, заданной уравнением $y = f(x)$. Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$. Тогда по смыслу определенного интеграла площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (8.1)$$

Пример 8.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 6x - x^2$ и осью Ox.

Решение. Строим фигуру, для чего найдем точки пересечения параболы $y = 6x-x^2$ с осью Ox. Если $6x-x^2 = 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 6$. Точка $A(3; 9)$ — вершина параболы. Для формулы (**??**) $a = x_1 = 0$, $b = x_2 = 6$, $f(x) = 6x - x^2$, $f(x) \geqslant 0$ на $[0, 6]$ (рис. **??**).

$$S = \int\limits_0^6 (6x - x^2)\,dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 = 108 - 72 = 36.$$

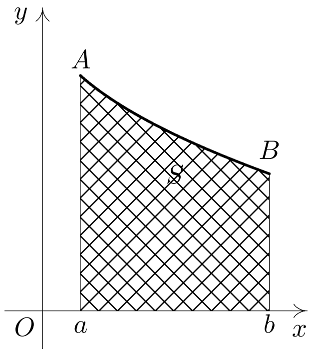

Рис. 7

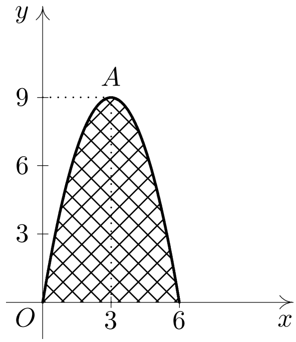

Рис. 8

Ответ: 36 кв. ед.

б) Пусть плоская фигура ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причем $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x)$ (рис. **??**). Для нахождения площади S этой фигуры формула (**??**) применяется дважды и вычисляется разность двух определенных интегралов:

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \tag{8.2}$$

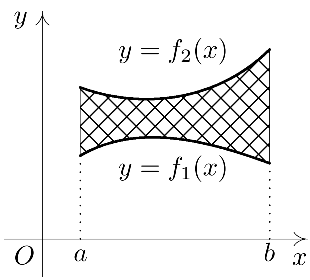

Рис. 9

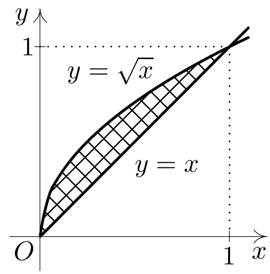

Рис. 10

Пример 8.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение. Строим данную фигуру. Точки пересечения линий имеют абсциссы $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (рис. **??**). Для формулы (**??**)

$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \sqrt{x},\ a = 0,\ b = 1.$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{6}$ кв. ед.

в) Часть плоской фигуры расположена под осью Ox (рис. **??**). Функция $y = f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, $f(x) \leqslant 0$ на $[b, c]$. Пусть S — площадь заштрихованной фигуры. Тогда

$$S = \int_a^b f(x)\,dx + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|. \tag{8.3}$$

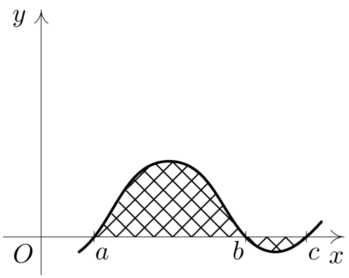

Рис. 11

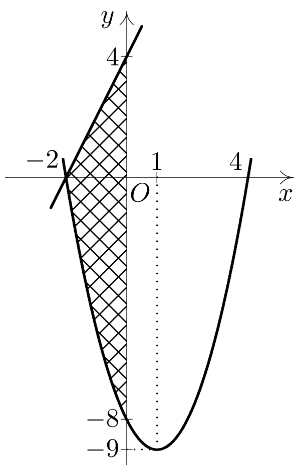

Рис. 12

Пример 8.3. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями, уравнения которых $y = -8 - 2x + x^2$, $2x - y + 4 = 0$, $x = 0$ (рис. **??**).

Решение. Функция $y = -8 - 2x + x^2 \leqslant 0$ на $[-2, 0]$, функция $y = 2x + 4 \geqslant 0$ на $[-2, 0]$. Тогда площадью заштрихованной фигуры S будет сумма двух интегралов:

$$S = \left|\int_{-2}^0 (-8 - 2x + x^2)\,dx\right| + \int_{-2}^0 (2x + 4)\,dx =$$

$$= \int_0^{-2} (x^2 - 2x - 8)\,dx + \int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right)\Bigg|_0^{-2} + (x^2+4x)\Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} - 4 + 16\right) + (-4+8) = 16 - \frac{8}{3} = \frac{40}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{40}{3}$ кв. ед.

II. Пусть дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (рис. **??**). Тогда из формулы (**??**) после применения подстановки $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$ получается формула

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{8.4}$$

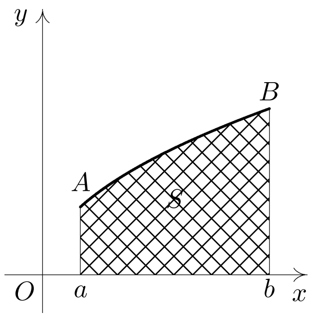

Рис. 13

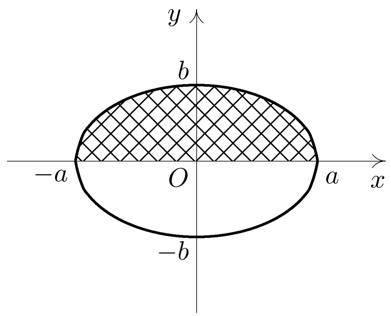

Рис. 14

Пример 8.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса получается, если оба уравнения возвести в квадрат, затем первое разделить на a^2, второе — на b^2 и сложить:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \\ \dfrac{x^2}{b^2} = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Полуоси эллипса a и b (рис. **??**). Так как $-a \leqslant x \leqslant a$, то $\varphi(\alpha) = -a$, $\varphi(\beta) = a$ или $a\cos\alpha = -a$, $a\cos\beta = a$. Тогда $\alpha = \pi$, $\beta = 0$. Вычисляется площадь заштрихованной части фигуры, что является половиной искомой площади.

$$\frac{1}{2}S = \int\limits_{\pi}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = ab\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt =$$

$$= ab\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = ab\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}\pi ab.$$

Следовательно, $S = \pi ab$.

Ответ: πab кв. ед.

§9. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\theta)$ (рис. **??**). Функция $f(\theta)$ — непрерывная функция при $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. Для нахождения площади сектора OAB служит формула

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta. \tag{9.1}$$

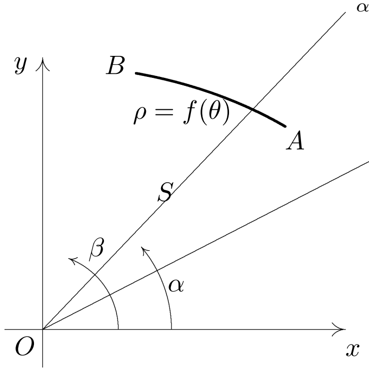

Рис. 15

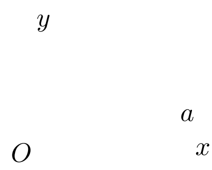

Рис. 16

Пример 9.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ [6].

Решение. Строим лемнискату, задавая углу θ значения: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{8}$, $\theta_3 = \dfrac{\pi}{4}$ и т.д. Получаются значения ρ: $\rho_1 = a$, $\rho_2 = a\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0,8a$, $\rho_3 = 0$ и т.д. Тогда точки $M_1(0,a)$, $M_2\left(\frac{\pi}{8}, 0,8a\right)$, $M_3\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ и т.д. принадлежат лемнискате (рис. **??**). Лемниската симметрична относительно осей Ox и Oy. Заштрихована $1/4$ часть искомой площади S. Для формулы (**??**) $f(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}; \quad S = a^2.$$

Ответ: a^2 кв. ед.

§10. Длина дуги кривой

I. Дана кривая $y = f(x)$ на $[a,b]$ (рис. **??**). Функция $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$. Пусть $\smile{AB} = l$. Для вычисления длины дуги l служит формула

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{10.1}$$

Подынтегральное выражение называется дифференциалом дуги и обозначается $dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Пример 10.1. Вычислить длину окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Функция $y = f(x)$ в формуле (**??**) будет $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a = 0$, $b = r$ (рис. **??**). Вычисляем четверть длины окружности. Заметим, что $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

$$\frac{1}{4}l = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int\limits_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = \frac{r\pi}{2}.$$

Тогда $l = 2\pi r$.

Ответ: $2\pi r$.

y B A O a b x

Рис. 17

y O r x

Рис. 18

II. Пусть кривая задана параметрически с помощью уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\varphi'(t) \neq 0$. В этом случае для вычисления длины дуги l применяется формула

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \qquad (10.2)$$

Если задана дуга пространственной кривой уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \gamma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то ее длина вычисляется по аналогичной формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\gamma'(t))^2}dt. \qquad (10.3)$$

III. Пусть дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\theta)$ (рис. **??**). В этом случае для вычисления длины дуги $\overset{\smile}{AB}$ применяется формула

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}d\theta. \qquad (10.4)$$

Пример 10.2. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$ [6].

Решение. Строим кривую по точкам, значения θ меняем от 0 до 2π. Вычисляя значения ρ для них, получаем замкнутую кривую,

y B A β α O x

Рис. 19

y a $2a$ O x $-a$

Рис. 20

симметричную относительно оси Ox (рис. **??**). Вычислим половину длины кардиоиды, тогда $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, $\rho' = f'(\theta) = -a\sin\theta$. По формуле (**??**)

$$\frac{1}{2}l = \int\limits_0^\pi \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}d\theta = a\int\limits_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= a\int\limits_0^\pi \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2a\int\limits_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 4a. \quad l = 8a.$$

Ответ: $8a$.

§11. Поверхность тела вращения

Пусть $y = f(x)$, $f'(x)$ непрерывны на $[a, b]$, $\smile{AB}$ — график функции $f(x)$ на этом отрезке. Если дугу $\smile{AB}$ (рис. **??**) вращать вокруг оси Ox, получается поверхность, которую назовем поверхностью вращения. Пусть площадь этой поверхности будет S. Тогда она вычисляется с помощью определенного интеграла

$$S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (11.1)$$

Пример 11.1. Задана функция $y = f(x) = x$ на $[0, 1]$. Прямая $y = x$ вращается вокруг оси Ox. Найти площадь поверхности вращения (рис. **??**).

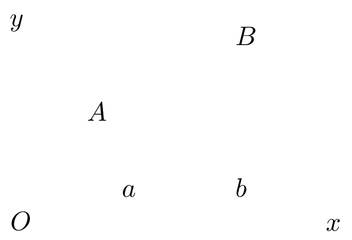

Рис. 21

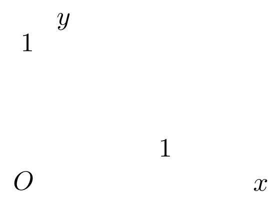

Рис. 22

Решение. Для формулы (**??**) имеем: $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

$$S = 2\pi \int\limits_0^1 x\sqrt{1+1}\,dx = 2\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \sqrt{2}\pi.$$

Ответ: $\sqrt{2}\pi$ кв. ед.

§12. Объем тела вращения

I. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и дугой $\smile{AB}$ кривой $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Получается некоторое тело вращения, объем которого находится с помощью определенного интеграла (рис. **??**)

$$V_x = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\,dx. \tag{12.1}$$

Пример 12.1. Вычислить объем тела, получающегося вращением криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = 2$, $x = 4$, осью Ox и отрезком AB прямой $y = x$.

Решение. Для формулы (**??**) будут следующие данные: $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x$. Тогда

$$V_x = \pi \int\limits_2^4 x^2\,dx = \frac{\pi x^3}{3}\bigg|_2^4 = \frac{56}{3}\pi.$$

y B A a b O x

Рис. 23

y B $y = x$ A 2 4 O x

Рис. 24

Ответ: $\dfrac{56}{3}\pi$ куб. ед.

Читатель заметил, что вычислен объем усеченного конуса. Ему предлагается получить этот ответ по формуле объема усеченного конуса из школьной геометрии.

II. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная осью Oy, прямыми $y = c$, $y = d$ и дугой $\smile{CD}$ кривой $x = \varphi(y)$, вращается вокруг оси Oy. Объем полученного тела вращения находится с помощью определенного интеграла (рис. **??**)

$$V_y = \pi \int\limits_c^d [\varphi(y)]^2 \, dy. \tag{12.2}$$

y d D c C O x

Рис. 25

y 2 -2 2 -5 O 5 x -1

Рис. 26

Пример 12.2. Криволинейная трапеция, ограниченная осью Oy, прямыми $y=-1$, $y=2$ и дугой кривой $x=y^2+1$, вращается вокруг оси Oy. Найти объем полученного тела (рис. **??**).

Решение. В формуле (**??**) для этого примера надо положить $\varphi(y)=y^2+1$, $c=-1$, $d=2$.

$$V_y=\pi\int\limits_{-1}^{2}(y^2+1)^2\,dy=\pi\int\limits_{-1}^{2}(y^4+2y^2+1)\,dy=$$

$$=\pi\left(\frac{y^5}{5}+\frac{2y^3}{3}+y\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\pi\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+2+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{33}{5}+\frac{18}{3}+3\right)=\pi\left(\frac{33}{5}+9\right)=\frac{78}{5}\pi.$$

Ответ: $\dfrac{78}{5}\pi$ куб. ед.

Определенный интеграл применяется также для вычисления работы, координат центра тяжести плоской линии и плоской фигуры, моментов инерции и в других физических приложениях.

Примеры для самостоятельного решения

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, вычислить определенные интегралы:

1. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

2. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

3. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/3}\operatorname{tg}x\,dx$. Ответ: $\ln 2$.

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2x\,dx$. Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

Вычислить значения нижеследующих интегралов, применяя указанные подстановки:

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\, dx$, $\cos x = t$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$, $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$. Ответ: $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$, $x = \operatorname{tg} t$. Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$.

Вычислить следующие несобственные интегралы:

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Ответ: 1.

9. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$. Ответ: 1.

10. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$. Ответ: -1.

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} x \sin x\, dx$. Ответ: интеграл расходится.

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$. Ответ: π.

13. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$. Ответ: интеграл расходится.

Вычислить приближенные значения интегралов по формуле трапеций и по формуле Симпсона ($n = 12$):

14. $\displaystyle\int_1^{11} x^3\, dx$. Ответ: 3690 (по формуле трапеций); 3660 (по формуле Симпсона).

15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

16. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox. Ответ: $\dfrac{32}{3}$.

17. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Ответ: $\dfrac{3}{8}\pi a^2$.

18. Найти площадь области, ограниченной одной полуволной синусоиды и осью абсцисс. Ответ: 2.

19. Найти площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс. Ответ: $3\pi a^2$.

20. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Ответ: $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

21. Найти площадь всей области, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Ответ: a^2.

22. Вычислить площадь области, ограниченной одной петлей кривой $\rho = a\sin 2\varphi$. Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{8}$.

23. Вычислить полную площадь области, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. Ответ: $\dfrac{3\pi a^2}{2}$.

24. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. Ответ: $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$.

25. Фигура, ограниченная астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. Ответ: $\dfrac{32\pi a^3}{105}$.

26. Фигура, ограниченная одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения. Ответ: $5\pi^2 a^3$.

27. Цилиндр радиуса R пересечен плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания. Найти объем отсеченной части. Ответ: $\dfrac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha$.

28. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y = 0$, цилиндрическими поверхностями $x^2 = 2py$ и $z^2 = 2px$ и плоскостью $x = a$. Ответ: $\dfrac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$.

29. Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$. Ответ: $\dfrac{335a}{27}$.

30. Найти длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Ответ: $8a$.

31. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ в пределах от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$. Ответ: $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

32. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. Ответ: $8a$.

33. Найти площадь поверхности, полученной вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси Ox, от начала O до точки с абсциссой $x = 3a$. Ответ: $\frac{56\pi a^2}{3}$.

34. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ около оси Ox.

Ответ: $\frac{64\pi a^2}{3}$.

35. Найти центр масс площади четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. Ответ: $\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$.

36. Найти центр масс площади фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. Ответ: $(9; 9)$.

37. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен 20 м.

Ответ: $2,5 \cdot 10^7\pi$ Дж.

38. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной книзу конуса, высота которого H, а радиус основания R. Ответ: $\frac{\pi\gamma R^2 H^2}{12}$.

39. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a = 6,4$ м, нижнее $b = 4,2$ м, а высота $H = 3$ м.

Ответ: $2,22 \cdot 10^5$ Н.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1986. 432 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: В 2 т. М.: Наука, 1978.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. математика, 1986. 415 с.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1975. 416 с.

5. Ефимов Н.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике. Ч. 1). М.: Наука, 1986.

6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1964. 608 с.

7. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математической анализ: Метод. указания и контр. задания для студентов-заочников. Чебоксары: изд-во ЧГУ, 1999.

8. Производная и ее приложения. Приложения дифференциального исчисления функции нескольких переменных: Метод. указания и контр. задания для студентов-заочников. Чебоксары: изд-во ЧГУ, 1995.

9. Неопределенные и определенные интегралы. Дифференциальные уравнения: Метод. указания и контр. задания для студентов-заочников. Чебоксары: изд-во ЧГУ, 1999.

Оглавление

Учебное издание

Пределы
Производные
Функции нескольких переменных
Интегралы

Учебное пособие

Корректор О. М. Садовникова
Компьютерный набор и верстка В. Г. Сытина

Подписано в печать 22.06.2005. Формат 60×84/16. Бумага газетная.
Гарнитура Computer Modern. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 8,22. Уч.-изд. л. 7,41. Тираж 500 экз. Заказ №368.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15