

517
МЗ4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовые расчеты

Часть I

Чебоксары 2001

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Чувашский государственный университет имени И.Н.Ульянова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовые расчеты

Часть I

Чебоксары 2001

Составители:

Б.Г.Агаков, П.С.Атаманов, //—//

//—// Т.В.Картузова, О.И.Кирпикова, //—//

//—// М.П.Мулгачев, Н.Д.Поляков, //—//

//—// Н.Я.Попова, С.М.Самарина, //—//

//—// А.П.Тарасов, Г.М.Филиппова, //—//

//—// С.И.Фролов, Л.Н.Шегай //—//

Математический анализ: В 2 ч. Ч. 1. Типовые расчеты / Сост.
В.Г.Агаков, П.С.Атаманов, Т.В.Картузова и др.; Чуваш. ун-т. Че-
боксары, 2001. 82 с.

Приводятся типовые расчеты по математическому анализу.
Составлены четыре расчетно-графические работы. При составле-
нии заданий были использованы задачи из методических указаний
и контрольных заданий для студентов-заочников "Неопределенные
и определенные интегралы. Дифференциальные уравнения" (Сост.:
Т.В.Картузова, В.Н.Орлов, Н.Я.Попова, Н.А.Ращепкина, А.П.Тара-
сов), а также "Сборник заданий по высшей математике" (для сту-
дентов технических специальностей, автор – Л.А.Кузнецов).

Для студентов технических факультетов.

Ответственный редактор профессор В.Г.Агаков

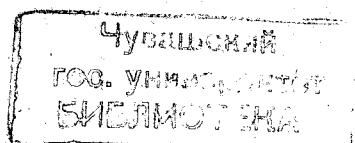
Утверждено Методическим советом университета

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовые расчеты

Часть I

Отв. за выпуск В.Г.Сытина



Подписано в печать 15.01.2001. Формат 60×84/16. Бумага писчая.

Печать оперативная. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 2,5.

Тираж 1000 экз. Заказ № 378.

Чувашский государственный университет

Типография университета

428015 Чебоксары, Московский проспект, 15

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

- 2.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}$.
- 2.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n - 1} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{3n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 1}}$.
- 2.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n - 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n - 1}}$.
- 2.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12} + n + 1} - n}$.
- 2.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n - 1} - \sqrt[3]{125n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n}$.
- 2.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}}$.
- 2.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 2} - \sqrt{n^2 + 2}}{\sqrt[4]{4n^4 + 1} - \sqrt[3]{n^4 - 1}}$.
- 2.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2} + \sqrt{n - 2}}{\sqrt[4]{n^4 + 2} + \sqrt{n - 2}}$.
- 2.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 9} - n}$.
- 2.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n + 2} - \sqrt[3]{8n^3 + 5}}{\sqrt{n + 7} - n}$.
- 2.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{3n + 1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5 - n + n^2}}$.
- 2.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 3} - \sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt[3]{n^5 - 4} - \sqrt[4]{n^4 + 1}}$.
- 2.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n - 3}}{\sqrt[5]{n^5 + 3} + \sqrt{n - 3}}$.
- 2.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[3]{9n^8 + 1}}$.
- 2.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n + 1} - \sqrt[3]{27n^3 + 4}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n^5 + n}}$.
- 2.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[3]{81n^8 - 1}}{(n + 4\sqrt{n})\sqrt{n^2 - 5}}$.
- 2.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 7} - \sqrt[3]{n^2 + 4}}{\sqrt[5]{n^5 + 5} + \sqrt{n}}$.
- 2.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 4} + \sqrt{n - 4}}{\sqrt[3]{n^6 + 6} - \sqrt{n - 6}}$.
- 2.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^6 + n^3 + 1} - 5n}$.
- 2.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt[3]{n + 4} - \sqrt[5]{n^5 + 5}}$.
- 2.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{11n} + \sqrt{25n^4 - 2}}{(n - 7\sqrt{n})\sqrt{n^2 - n + 1}}$.
- 2.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[7]{n^7} - \sqrt{n + 1}}$.
- 2.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 5} - \sqrt{n - 5}}{\sqrt[7]{n^7 + 5} + \sqrt{n - 5}}$.
- 2.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}$.
- 2.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt[3]{n + 2} - \sqrt[5]{n^5 + 2}}$.

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

- 3.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$.
- 3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\sqrt{n(n - 2)} - \sqrt{n^2 - 3}]$.
- 3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 5})n\sqrt{n}$.

Типовой расчет № 1. Пределы

Задача 1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$$

$$1.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$$

$$1.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$$

$$1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}$$

$$1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$$

$$1.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$$

$$1.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$$

$$1.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}$$

$$1.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$$

$$1.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$$

$$1.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$$

$$1.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$$

$$1.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^2 - (1+n)^2}$$

$$1.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}$$

$$1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$$

$$1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 + (n+1)^3}$$

$$1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}$$

$$1.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$$

$$1.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^2}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$$

$$1.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (2n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$$

$$1.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(2n+2)^2 + (4n+1)^2}$$

$$1.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^2}$$

$$1.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$$

- 3.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9}]$.
- 3.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n\sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}}$.
- 3.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n]$. 3.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4 - n^3})$.
- 3.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3}]$.
- 3.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}]$.
- 3.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8}]$.
- 3.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5 + 8n^3} - 2n)$. 3.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{5 + n^3} - \sqrt[3]{3 + n^3})$.
- 3.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-2)^2}]$.
- 3.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-2)}}{\sqrt{n}}$.
- 3.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3})$.
- 3.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$.
- 3.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5 + 9)} - \sqrt{(n^4 - 1)(n^2 + 5)}}{n}$.
- 3.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$.
- 3.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} [\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1}]$.
- 3.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^3 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}$.
- 3.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)}]$.
- 3.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}$.
- 3.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}$.
- 3.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - \sqrt{n(n-1)}]$.
- 3.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 [\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{n^8 - 1}]$.

Задача 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right].$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}.$$

$$4.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$$

$$4.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}.$$

$$4.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$4.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)! \cdot (n-1)!}.$$

$$4.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}.$$

$$4.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}.$$

$$4.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n+1}}.$$

$$4.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{n}.$$

$$4.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$$

$$4.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}.$$

$$4.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{1+2+\dots+n} - \frac{2}{3} \right].$$

$$4.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} \right).$$

$$4.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\dots+2n-(2n+3)}{n+3}.$$

$$4.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! + (2n+2)!}.$$

$$4.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3}$$

$$4.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{2+7+\dots+(5n-3)}$$

$$4.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n} \right)$$

$$4.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$$

$$4.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right]$$

Задача 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$5.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$$

$$5.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}$$

$$5.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}$$

$$5.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$$

$$5.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}$$

$$5.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n/2}$$

$$5.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}$$

$$5.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$$

$$5.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}$$

$$5.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$$

$$5.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}$$

$$5.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}$$

$$5.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n$$

$$5.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$5.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^n$$

$$5.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}$$

$$5.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}$$

$$5.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}$$

$$5.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}$$

$$5.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9} \right)^{2n+1}$$

$$5.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}$$

$$5.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 5n + 7} \right)^{n+1}$$

$$5.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}$$

$$5.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 6n + 5}{n^2 - 5n + 5} \right)^{3n+2}$$

Задача 6. Вычислить пределы функций.

$$6.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^2}$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2}$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$6.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

Задача 7. Вычислить пределы функций.

$$7.1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x-2}}.$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}.$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$7.15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$7.17. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$7.19. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$7.21. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{16}} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}.$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x-4}}.$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}.$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}.$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

$$7.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}.$$

$$7.16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x}-6+2}{x+2}.$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}.$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}.$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}.$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}.$$

Задача 8. Вычислить пределы функций.

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}.$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}.$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5x}{\sin 3x}.$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}.$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$$

$$8.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+2x)}$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin(\pi(x+2))}$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin \left[\pi \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right]}$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+\frac{1}{2})]}$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$$

$$8.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin[2\pi(x+10)]}$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(x + \frac{5\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} x \right)}{\arcsin 2x^2}$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos \frac{\pi(x+1)}{2}}$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x} - 1}$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin 2x) \cdot \ln 2}{2^{-3x} - 1}$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$$

Задача 9. Вычислить пределы функций.

$$9.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$9.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$$

$$9.3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$$

$$9.4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$$

$$9.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$$

$$9.6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$$

$$9.7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^4}$$

$$9.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$9.9. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$$

$$9.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$$

$$9.13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$$

$$9.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$9.17. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x}$$

$$9.19. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^x - e^\pi}{\sin 5x - \sin 3x}$$

$$9.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^{1-x^2}}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}$$

$$9.23. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$$

$$9.25. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

$$9.10. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$$

$$9.12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$$

$$9.14. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$$

$$9.16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}$$

$$9.18. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$$

$$9.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$$

$$9.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$9.24. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}$$

Задача 10. Вычислить пределы функций.

$$10.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$$

$$10.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$$

$$10.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$$

$$10.4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\ln x - \ln a}$$

$$10.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$10.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$$

$$10.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

$$10.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$$

$$10.9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}$$

$$10.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$10.11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$$

$$10.12. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$$

$$10.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$$

$$10.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$$

- 10.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2\ln x}{h^2}$. 10.16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\log_2 x}$.
- 10.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$. 10.18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$.
- 10.19. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$. 10.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$.
- 10.21. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$. 10.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{(\cos x)}}{1 - \cos \sqrt{x}}$.
- 10.23. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$. 10.24. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^x - 3 \sin x + 1}$.
- 10.25. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}$.

Задача 11. Вычислить пределы функций.

- 11.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$. 11.2. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$.
- 11.3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$. 11.4. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$.
- 11.5. $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$. 11.6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos(\frac{1}{4}\pi-x)}}$.
- 11.7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$. 11.8. $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$.
- 11.9. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$. 11.10. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.
- 11.11. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$. 11.12. $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 4x}}$.
- 11.13. $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$. 11.14. $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}$.
- 11.15. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$. 11.16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}$.
- 11.17. $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{x}{x-1}}$. 11.18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.
- 11.19. $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$. 11.20. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\sec x}$.

$$11.21. \lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}.$$

$$11.22. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}.$$

$$11.23. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}.$$

$$11.24. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg} \frac{x}{2})^{\frac{1}{\cos x}}.$$

$$11.25. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin \frac{xx}{2}}{\ln(2-x)}}.$$

Задача 12. Вычислить предел функции или числовой последовательности.

$$12.1. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos 3x + x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}.$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin x + (2x - \pi) \sin \frac{x}{2x - \pi}}.$$

$$12.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sin n}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^3 - 7}}.$$

$$12.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cos \frac{1}{x} + \lg(2+x)}{\lg(4+x)}.$$

$$12.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + \sin \frac{n}{n^2+1} \cos n}{1 + \cos \frac{1}{n}}.$$

$$12.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2+n^5} - \sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{7n}}.$$

$$12.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + (4x - \pi) \cos \frac{x}{4x - \pi}}{\operatorname{tg}(2 + \operatorname{tg} x)}.$$

$$12.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{n^2+1} \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1} \right).$$

$$12.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{3n^5 - 7}}{(n^2 - n \cos n + 1)\sqrt{n}}.$$

$$12.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \sin n + \sqrt{n-1}}{n + \sqrt{n-1}}.$$

$$12.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos n) \sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}.$$

$$12.12. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(2 + \sqrt{\operatorname{arctg} x \sin \frac{1}{x}} \right).$$

$$12.13. \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{1 + \cos \pi x}{4 + (x+2) \sin \frac{x}{x+2}}}.$$

$$12.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^4 - 3} + \sin n}.$$

$$12.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + \cos n} + \sqrt{3n^2 + 2}}{\sqrt[5]{n^6 + 1}}.$$

$$12.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + 3}{2 - \lg(1 + \sin x)}.$$

$$12.17. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\operatorname{arctg} x \sin^2 \frac{1}{x} + 5 \cos x}.$$

$$12.18. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos x + \sin \frac{1}{x} \ln(1 + x)}.$$

$$12.19. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2 \cos^2 x + (e^x - 1) \sin \frac{1}{x}}.$$

$$12.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln \left(e + x \sin \frac{1}{x} \right)}{\cos x + \sin x}.$$

$$12.21. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(e^{x^2} - \cos x) \cos \frac{1}{x} + \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

$$12.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \ln(1 + x) \sqrt{2 + \cos \frac{1}{x}}}{2 + e^x}.$$

$$12.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2\pi x}{2 + (e^{\sqrt{x-1}} - 1) \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-1}}.$$

$$12.24. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(e^{\sin x} - 1) \cos \frac{1}{x} + 4 \cos x}.$$

$$12.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1+x)}{\left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) + 2}.$$

Задача 13. Для заданной функции найти точки разрыва и исследовать их характер.

$$13.1. y = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad 13.2. y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$13.3. y = \begin{cases} -x - 1, & x < -1, \\ 0, & -1 \leq x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad 13.4. y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$13.5. y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$13.7. y = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

$$13.9. y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$13.11. y = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$13.13. y = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$13.15. y = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$13.17. y = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x < 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

$$13.19. y = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x^2, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$13.21. y = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 2, \\ x^2, & x > 2. \end{cases}$$

$$13.23. y = \begin{cases} -6x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ x+\frac{\pi}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

$$13.6. y = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$13.8. y = \begin{cases} x+4, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

$$13.10. y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$13.12. y = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$13.14. y = \begin{cases} 3x+1, & x < 0, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$13.16. y = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$13.18. y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$13.20. y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x-4, & x > 2. \end{cases}$$

$$13.22. y = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$13.24. y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$13.25. y = \begin{cases} -7x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$$

Задача 14. Для заданной функции найти точки разрыва и исследовать их характер.

$$14.1. y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}.$$

$$14.3. y = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

$$14.5. y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}.$$

$$14.7. y = 5^{\frac{1}{x-4}}.$$

$$14.9. y = \frac{1}{1 + 7^{\frac{1}{x-3}}}.$$

$$14.11. y = \frac{1}{1 + 25^{\frac{1}{x-3}}}.$$

$$14.13. y = 4^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$14.15. y = 8^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$14.17. y = 4^{\frac{1}{3-x}}.$$

$$14.19. y = 5^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$14.21. y = 2^{\frac{1}{x+3}}.$$

$$14.23. y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{1-x}}}.$$

$$14.25. y = 2^{\frac{1}{3-x}}.$$

$$14.2. y = 5^{\frac{1}{x-1}} + 2.$$

$$14.4. y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$14.6. y = 2^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$14.8. y = 6^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$14.10. y = \frac{2}{1 + 10^{\frac{1}{x-6}}}.$$

$$14.12. y = \frac{3}{1 + 9^{\frac{1}{x-7}}}.$$

$$14.14. y = 16^{\frac{1}{6-x}}.$$

$$14.16. y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{6-x}}}.$$

$$14.18. y = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{2-x}}}.$$

$$14.20. y = \frac{1}{1 + 4^{1-x}}.$$

$$14.22. y = 6^{\frac{1}{x+3}}.$$

$$14.24. y = 4^{\frac{1}{x-3}}.$$

Типовой расчет № 2.

Производные и их приложения

Задача 1. Вычислить производную функции в точке x_0 .

$$1.1. \quad y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$1.2. \quad y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}, \quad x_0 = \pi. \quad 1.3. \quad y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}, \quad x_0 = 0.$$

$$1.4. \quad y = \operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arcctg} x, \quad x_0 = 0.$$

$$1.5. \quad y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}, \quad x_0 = 1.$$

$$1.6. \quad y = \ln x^3 - \frac{9}{x} - \frac{27}{2x^2}, \quad x_0 = e. \quad 1.7. \quad y = (x^2 - 7x + 8) \cdot e^x, \quad x_0 = 0.$$

$$1.8. \quad y = e^x \cdot \log_2 x, \quad x_0 = 2. \quad 1.9. \quad y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x, \quad x_0 = 3.$$

$$1.10. \quad y = \frac{\arcsin x}{e^x}, \quad x_0 = \frac{1}{2}. \quad 1.11. \quad y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}, \quad x_0 = \pi.$$

$$1.12. \quad y = x \cdot \operatorname{sh} 2x, \quad x_0 = 1. \quad 1.13. \quad y = x^5 \cdot e^{-x}, \quad x_0 = 5.$$

$$1.14. \quad y = \frac{x^2}{\ln x}, \quad x_0 = e. \quad 1.15. \quad y = \log_2 x \cdot \ln 2x, \quad x_0 = 1.$$

$$1.16. \quad y = \operatorname{arctg} x \cdot \arccos x, \quad x_0 = 0.$$

$$1.17. \quad y = (3x + 2) \cos x + (2x + 3) \sin x, \quad x_0 = 0.$$

$$1.18. \quad y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$1.19. \quad y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x, \quad x_0 = 0.$$

$$1.20. \quad y = x^{\sqrt{5}} - x^{-\sqrt{5}}, \quad x_0 = 2. \quad 1.21. \quad y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}, \quad x_0 = 64.$$

$$1.22. \quad y = x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + x^7 \cdot \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.$$

$$1.23. \quad y = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}, \quad x_0 = 1. \quad 1.24. \quad y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^4}, \quad x_0 = 2.$$

$$1.25. \quad y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4), \quad x_0 = -3.$$

Задача 2. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0 .

$$2.1. \quad y = \frac{3x - 2x^3}{3}, \quad x_0 = 1. \quad 2.2. \quad y = 2x^2 + 3, \quad x_0 = -1.$$

$$2.3. \quad y = \frac{2x+1}{x}, \quad x_0 = 1. \quad 2.4. \quad y = \frac{x^5+1}{x^4+1}, \quad x_0 = 1.$$

$$2.5. y = 3 \cdot (\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), x_0 = 1. \quad 2.6. y = \frac{x}{x^2 + 1}, x_0 = -2.$$

$$2.7. y = \frac{2x}{x^2 + 1}, x_0 = 1. \quad 2.8. y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, x_0 = 1.$$

$$2.9. y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}, x_0 = 1. \quad 2.10. y = \frac{x^2}{10} + 3, x_0 = 2.$$

$$2.11. y = 6 \cdot \sqrt[3]{x} - 16 \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{3}}, x_0 = 1.$$

$$2.12. y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, x_0 = 1.$$

$$2.13. y = \frac{-2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}, x_0 = 1. \quad 2.14. y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}, x_0 = 1.$$

$$2.15. y = \frac{1}{3x + 2}, x_0 = 2. \quad 2.16. y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}, x_0 = 3.$$

$$2.17. y = -2 \cdot (\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), x_0 = 1.$$

$$2.18. y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, x_0 = 1.$$

$$2.19. y = \frac{3x - 2x^3}{3}, x_0 = 1. \quad 2.20. y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}, x_0 = 4.$$

$$2.21. y = 6 \cdot \sqrt[3]{x} + 16 \cdot \sqrt{\frac{x}{3}}, x_0 = 1.$$

$$2.22. y = 2x^2 + 3x - 1, x_0 = -2.$$

$$2.23. y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, x_0 = 4. \quad 2.24. y = \sqrt[3]{x^2} - 20, x_0 = -8.$$

$$2.25. y = \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x}, x_0 = 64.$$

Задача 3. Найти дифференциал dy .

$$3.1. y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$3.2. y = \sqrt{x} - (1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}. \quad 3.3. y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$3.4. y = x \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x). \quad 3.5. y = \ln(\cos \sqrt{x}) + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}.$$

$$3.6. y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right). \quad 3.7. y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}.$$

$$3.8. y = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right). \quad 3.9. y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}.$$

$$3.10. y = \ln(x^2 - 1) - \frac{1}{x^2 - 1}. \quad 3.11. y = \ln(2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}).$$

$$3.12. y = e^x \cdot (\cos 2x + 2 \sin 2x). \quad 3.13. y = \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right) e^{2\sqrt{x-1}}.$$

$$3.14. y = \sqrt{3+x^2} - x \ln(x + \sqrt{3+x^2}).$$

$$3.15. y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}. \quad 3.16. y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}).$$

$$3.17. y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x}).$$

$$3.18. y = \operatorname{tg}(2 \arccos \sqrt{1-2x^2}), x > 0.$$

$$3.19. y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}.$$

$$3.20. y = x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+3}) - \sqrt{x^2+3}.$$

$$3.21. y = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} \right), x > 0.$$

$$3.22. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + \operatorname{sh} x \cdot \ln \operatorname{ch} x.$$

$$3.23. y = \arccos \frac{x^2-1}{x^2 \cdot \sqrt{2}}. \quad 3.24. y = x \cdot \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$3.25. y = 2x + \ln(\sin x + 2 \cos x).$$

Задача 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$$4.1. y = x^4, x = 3,998.$$

$$4.2. y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, x = 1,58.$$

$$4.3. y = \sqrt{x^2+5}, x = 1,97.$$

$$4.4. y = \sqrt[3]{3x+\cos x}, x = 0,01.$$

$$4.5. y = \sqrt[4]{2x + \sin \frac{\pi x}{2}}, x = 1,02. \quad 4.6. y = \sqrt{1+x+\sin x}, x = 0,01.$$

$$4.7. y = x^5, x = 2,997.$$

$$4.8. y = \sqrt{4x-3}, x = 1,78.$$

$$4.9. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x = 4,16.$$

$$4.10. y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}, x = 1,016.$$

$$4.11. y = \sqrt[3]{x}, x = 7,64.$$

$$4.12. y = \sqrt[3]{x^2}, x = 1,03.$$

$$4.13. y = \sqrt{x^2+x+3}, x = 1,97.$$

$$4.14. y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}, x = 0,97.$$

$$4.15. y = \sqrt[3]{x^3+7x}, x = 1,012.$$

$$4.16. y = \sqrt[3]{x^2}, x = 1,03.$$

$$4.17. y = \sqrt{x^3}, x = 0,98.$$

$$4.18. y = x^7, x = 2,002.$$

$$4.19. y = \sqrt{4x-1}, x = 2,56.$$

$$4.20. y = x^7, x = 1,996.$$

$$4.21. y = x^6, x = 2,01.$$

$$4.22. y = x^{21}, x = 0,998.$$

$$4.23. y = x^{11}, x = 1,021.$$

$$4.24. y = \arcsin x, x = 0,08.$$

$$4.25. y = \frac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}, x = 0,98.$$

Задача 5. Найти производную.

$$5.1. y = 2\sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}.$$

$$5.2. y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

$$5.3. y = \frac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

$$5.4. y = \frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}.$$

$$5.5. y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2 + x + 1}.$$

$$5.6. y = \frac{x^2 + 2}{2\sqrt{1-x^4}}.$$

$$5.7. y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}.$$

$$5.8. y = \frac{x+7}{6\sqrt{x^2 + 2x + 7}}.$$

$$5.9. y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$5.10. y = 3\sqrt[3]{\frac{x^2 + x + 1}{x+1}}.$$

$$5.11. y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2 - x}}{x^2}.$$

$$5.12. y = \frac{(2x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 3}}{9x^3}.$$

$$5.13. y = \frac{x-1}{(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5}}.$$

$$5.14. y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}.$$

$$5.15. y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3 + \frac{1}{x}}.$$

$$5.16. y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}.$$

$$5.17. y = \frac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8-x^3}}.$$

$$5.18. y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}.$$

$$5.19. y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}.$$

$$5.20. y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}.$$

$$5.21. y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}.$$

$$5.22. y = \frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}.$$

$$5.23. y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^3)^2}{x^4}}.$$

$$5.24. y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}.$$

$$5.25. y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}.$$

Задача 6. Найти производную.

$$6.1. y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}.$$

$$6.2. y = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}.$$

$$6.3. y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2).$$

$$6.4. y = -\frac{e^{3x}}{3 \sinh^3 x}.$$

$$6.5. y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}).$$

$$6.6. y = \frac{e^x}{2}((x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x).$$

$$6.7. y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right).$$

$$6.8. y = \frac{e^{x^3}}{1+x^3}.$$

$$6.9. y = x + \frac{8}{1+e^x}.$$

$$6.10. y = 2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1}) \frac{1}{\ln 2}.$$

$$6.11. y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}).$$

$$6.12. y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x).$$

$$6.13. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}.$$

$$6.14. y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}.$$

$$6.15. y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}.$$

$$6.16. y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}.$$

$$6.17. y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x.$$

$$6.18. y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}.$$

$$6.19. y = x - \ln \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \operatorname{arcctg} e^x.$$

$$6.20. y = x + \operatorname{ctg} x \ln(1 + \sin x) - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$6.21. y = \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}.$$

$$6.22. y = \frac{1}{\sin^4 x + 1} + \ln \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + 1}.$$

$$6.23. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x}{2} \right).$$

$$6.24. y = \arccos(\sin x^4 - \cos x^4).$$

$$6.25. y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

Задача 7. Найти производную.

$$7.1. y = \ln(\ln^3(\ln^2 x)).$$

$$7.2. y = \ln \ln^2 \ln^3 x.$$

$$7.3. y = \ln \ln \sin \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

$$7.4. y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$$7.5. y = \ln \left(\frac{\ln x}{\sin \frac{1}{x}} \right).$$

$$7.6. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$7.7. y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}).$$

$$7.8. y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}).$$

$$7.9. y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{2}}.$$

$$7.10. y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

$$7.11. y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{4x}}.$$

$$7.12. y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$7.13. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x}).$$

$$7.14. y = \ln \cos \frac{2x + 3}{2x + 1}.$$

$$7.15. y = \lg \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$7.16. y = \frac{x(\cos \ln x + \sin \ln x)}{2}.$$

$$7.17. y = \ln \sin \frac{2x + 4}{2x + 1}.$$

$$7.18. y = \ln \sqrt[4]{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}}.$$

$$7.19. y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

$$7.20. y = \ln^3(1 + \cos x).$$

$$7.21. y = \ln^2(x + \cos x).$$

$$7.22. y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}).$$

$$7.23. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}.$$

$$7.24. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

$$7.25. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x + a}) - \sqrt{x + a}.$$

Задача 8. Найти производную.

$$8.1. y = \sin^3(\cos 2) - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}. \quad 8.2. y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x}}.$$

- 8.3. $y = \cos^2(\sin 3) + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$. 8.4. $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg} \cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$.
- 8.5. $y = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$. 8.6. $y = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$.
- 8.7. $y = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1}{52} \cdot \frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$. 8.8. $y = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$.
- 8.9. $y = \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13} - \frac{1}{48} \frac{\cos^2 24x}{48 \sin 48x}$. 8.10. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$.
- 8.11. $y = \cos \ln 3 - \frac{1}{44} \frac{\cos^2 22x}{44 \sin 44x}$. 8.12. $y = \frac{\operatorname{tg} \ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}$.
- 8.13. $y = \operatorname{ctg} \cos 5 - \frac{1}{40} \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$. 8.14. $y = \frac{\operatorname{ctg} \sin \frac{1}{3} \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}$.
- 8.15. $y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36 \sin 36x}$. 8.16. $y = \frac{\cos \operatorname{tg} \frac{1}{2} \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}$.
- 8.17. $y = \frac{\sin \operatorname{tg} \frac{1}{7} \cdot \cos^2 16x}{32 \sin 32x}$. 8.18. $y = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \frac{1}{5} \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$.
- 8.19. $y = \frac{\cos \operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$. 8.20. $y = \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$.
- 8.21. $y = \ln \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$. 8.22. $y = \operatorname{ctg} \cos 2 + \frac{1}{6} \frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$.
- 8.23. $y = \cos \operatorname{ctg} 2 - \frac{1}{16} \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$. 8.24. $y = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}$.
- 8.25. $y = \cos \ln 2 - \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$.

Задача 9. Найти производную.

$$9.1. y = \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{2}$$

$$9.2. y = \sqrt{1+2x-x^2} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2} \ln(1+x).$$

$$9.3. y = (x+2\sqrt{2}+2) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right) - \sqrt{x}.$$

$$9.4. y = \left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

$$9.5. y = \frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}} \arcsin 2x + \frac{1}{8} \ln(1-4x^2).$$

$$9.6. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

$$9.7. y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) - x.$$

$$9.8. y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$9.9. y = \sqrt{1-x^2} - x \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

$$9.10. y = \arcsin \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}.$$

$$9.11. y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}.$$

$$9.12. y = \frac{2x-5}{4} \sqrt{5x-4-x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{3}}.$$

$$9.13. y = \frac{2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$9.14. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}.$$

$$9.15. y = \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}-1}.$$

$$9.16. y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{\arccos x}{2x^2}.$$

$$9.17. y = 6 \arcsin \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) - \frac{6+x}{2} \sqrt{x(4-x)}.$$

$$9.18. y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}.$$

$$9.19. y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$9.20. y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$9.21. y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}.$$

$$9.22. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$9.23. y = \arcsin \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$$

$$9.25. y = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}$$

$$9.24. y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}$$

Задача 10. Найти производную.

$$10.1. y = \frac{2}{3} \operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{ch} x}{3 \operatorname{sh}^3 x} \quad 10.2. y = -\frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$10.3. y = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \right)$$

$$10.4. y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x$$

$$10.5. y = \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} \quad 10.6. y = \frac{8}{3} \operatorname{cth} 2x - \frac{1}{3 \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}^3 x}$$

$$10.7. y = \frac{1-8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}$$

$$10.8. y = \frac{2}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x$$

$$10.9. y = -\frac{1}{4} \arcsin \frac{5+3\operatorname{ch} x}{3+5\operatorname{ch} x} \quad 10.10. y = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln \frac{4+\sqrt{8}\operatorname{th} \frac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\operatorname{th} \frac{x}{2}}$$

$$10.11. y = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{2} \arcsin(\operatorname{th} x)$$

$$10.12. y = \frac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \frac{3+\operatorname{ch} x}{1+3\operatorname{ch} x} \quad 10.13. y = \frac{1+8\operatorname{ch}^2 x \cdot \ln \operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch}^2 x}$$

$$10.14. y = -\frac{12\operatorname{sh}^2 x + 1}{3\operatorname{sh}^3 x}$$

$$10.15. y = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}$$

$$10.16. y = \frac{\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{\operatorname{ch} 6x}}$$

$$10.17. y = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$$

$$10.18. y = \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$$

$$10.19. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$$

$$10.20. y = \frac{1}{6} \ln \frac{1-\operatorname{sh} 2x}{2+\operatorname{sh} 2x}$$

$$10.21. y = \frac{1}{18\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}\operatorname{cth} 2x}{1-\sqrt{2}\operatorname{cth} 2x}$$

$$10.22. y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2 + \sqrt{5} \operatorname{th} x}{2 - \sqrt{5} \operatorname{th} x}.$$

$$10.23. y = \frac{\operatorname{sh} x}{4 \operatorname{ch}^4 x} + \frac{3 \operatorname{sh} x}{8 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$$

$$10.24. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\operatorname{th} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} x}.$$

$$10.25. y = \frac{3}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x} - \frac{\operatorname{th} x}{4(2 - \operatorname{th}^2 x)}.$$

Задача 11. Найти производную.

$$11.1. y = (\cos 2x)^{\ln \cos 2x}.$$

$$11.2. y = x^{e^x} \cdot x^9.$$

$$11.3. y = x^{29x} 29^x.$$

$$11.4. y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$11.5. y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x}.$$

$$11.6. y = x^{e^{\sin x}}.$$

$$11.7. y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$11.8. y = x^{2^x} 5^x.$$

$$11.9. y = (x^2 + 1)^{\cos x}.$$

$$11.10. y = (\sin x)^{\frac{5\pi}{2}}.$$

$$11.11. y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$11.12. y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh} x}.$$

$$11.13. y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$11.14. y = (x - 5)^{\operatorname{ch} x}.$$

$$11.15. y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)}.$$

$$11.16. y = (\cos 5x)^{e^x}.$$

$$11.17. y = (\sin \sqrt{x})^{\ln \sin \sqrt{x}}.$$

$$11.18. y = (\arcsin x)^{e^x}.$$

$$11.19. y = x^{\arcsin x}.$$

$$11.20. y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$$

$$11.21. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$11.22. y = 2x^{\sqrt{x}}.$$

$$11.23. y = (x^2 + 1)^{\sin x}.$$

$$11.24. y = x^{\sin x}.$$

$$11.25. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

Задача 12. Найти производную.

$$12.1. y = \frac{1}{x} \sqrt{1 - 4x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}.$$

$$12.2. y = \arcsin e^{-2x} + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}).$$

$$12.3. y = \frac{1}{x} \sqrt{1 - 4x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}.$$

$$12.4. y = \sqrt{49x^2 + 1} \operatorname{arctg} 7x - \ln(7x + \sqrt{49x^2 + 1}).$$

$$12.5. y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x-1}}) + \arcsin e^{-3x}.$$

$$12.6. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{2}} + \frac{2x+1}{4x^2+4x+3}.$$

$$12.7. y = \frac{2}{3x-2} \sqrt{-3+12x-9x^2} + \ln \frac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}.$$

$$12.8. y = \ln(5x + \sqrt{25x^2 + 1}) - \sqrt{25x^2 + 1} \operatorname{arctg} 5x.$$

$$12.9. y = \arcsin e^{-4x} + \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x}-1}).$$

$$12.10. y = \frac{2x-1}{4x^2-4x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{2}}.$$

$$12.11. y = \ln \frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2} - \frac{2}{x+2} \sqrt{-3-4x-x^2}.$$

$$12.12. y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x}-1}) + \arcsin(e^{-5x}).$$

$$12.13. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{x^2-2x+3}.$$

$$12.14. y = \ln \frac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x} + \frac{2}{2-x} \sqrt{-3+4x-x^2}.$$

$$12.15. y = \sqrt{x^2-8x+17} \operatorname{arctg}(x-4) - \ln(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}).$$

$$12.16. y = 5x - \ln(1+\sqrt{1-e^{10x}}) - e^{-5x} \arcsin(e^{5x}).$$

$$12.17. y = \frac{x+2}{x^2+4x+6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}}.$$

$$12.18. y = \ln \frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1} + \frac{4}{2x+1} \sqrt{-x-x^2}.$$

$$12.19. y = \frac{x^4}{81} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}, \quad x > 0.$$

$$12.20. y = \frac{2}{x-1} \sqrt{2x-x^2} + \ln \frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}.$$

$$12.21. y = \sqrt{9x^2-12x+5} \operatorname{arctg}(3x-2).$$

$$12.22. y = \ln(3x-2\sqrt{9x^2-12x+5}).$$

$$12.23. y = 2x - \ln(1+\sqrt{1-e^{4x}}) - e^{-2x} \arcsin(e^{2x}).$$

$$12.24. y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{2}}$$

$$12.25. y = \frac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4} + \frac{x^4}{16} \arcsin \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

Задача 13. Найти производную.

$$13.1. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$13.2. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$13.3. y = \arcsin \frac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2+3x+2}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$13.4. y = \frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$13.5. y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$13.6. y = x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{3} \sqrt{1-x}.$$

$$13.7. y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$$

$$13.8. y = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$13.9. y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5 \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{5}}.$$

$$13.10. y = 3 \arcsin \frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2+4x-5}.$$

$$13.11. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$13.12. y = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x).$$

$$13.13. y = \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2-1} \right) \operatorname{arctg} x.$$

$$13.14. y = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

$$13.15. y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1}+1).$$

$$13.16. y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2 + 6x - 3}, \quad 3x+1 > 0.$$

$$13.17. y = 4 \arcsin \frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2 + 12x - 7}, \quad 2x+3 > 0.$$

$$13.18. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$13.19. y = \ln \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}.$$

$$13.20. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

$$13.21. y = \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$13.22. y = x^3 \arcsin x + \frac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1 - x^2}.$$

$$13.23. y = 4 \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} - \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}.$$

$$13.24. y = x(2x^2 + 5) \sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$13.25. y = 3 \arcsin \frac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}, \quad 4x+1 > 0.$$

Задача 14. Найти производную.

$$14.1. y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}}.$$

$$14.2. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3 \cos^3 x}.$$

$$14.3. y = \frac{3^x (\sin 2x - 2 \cos 2x)}{4}.$$

$$14.4. y = \frac{\cos x}{3(2 + \sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}.$$

$$14.5. y = 2 \frac{\cos x}{\sin^4 x} + 3 \frac{\cos x}{\sin^2 x}. \quad 14.6. y = \frac{\ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \alpha)}{\sin \alpha}.$$

$$14.7. y = \frac{2^x (\sin x + \cos x \cdot \ln 2)}{1 + (\ln 2)^2}.$$

$$14.8. y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}.$$

$$14.9. y = \frac{5^x(\sin 3x \ln 5 - 3 \cos 3x)}{9 + \ln^2 5}$$

$$14.10. y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \cos x - 3 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$14.11. y = \frac{4^x(\sin 4x - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 4}$$

$$14.13. y = \frac{3^x(4 \sin 4x + \cos 4x)}{16 + \ln^2 3}$$

$$14.15. y = \arctg \frac{2 \sin x}{\sqrt{9 \cos^2 x - 4}}$$

$$14.17. y = \frac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x \operatorname{ctg} x}$$

$$14.19. y = -\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$14.20. y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$$

$$14.22. y = \arctg \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} \right)$$

$$14.23. y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b} \right), b > 0.$$

$$14.24. y = x \cos \alpha + \sin \alpha \ln \sin(x - \alpha)$$

$$14.25. y = x - \ln(1 + e^{2x}) - 2e^{-\frac{x}{2}} \cdot \arctg e^{\frac{x}{2}}$$

Задача 15. Найти производную y'_x .

$$15.1. \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}), \\ y = \sqrt{1 + t^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t} \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \cdot \ln \cos t + \operatorname{tg} t - t \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \end{cases}$$

- 15.4. $\begin{cases} x = \frac{t^2 \ln t}{1-t^2} + \ln \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
- 15.5. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$
- 15.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t-t^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1-t} \arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$
- 15.7. $\begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 t + \ln \cos t. \end{cases}$
- 15.8. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
- 15.9. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \left(\frac{t+1}{t-1} \right), \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
- 15.10. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$
- 15.11. $\begin{cases} x = t \sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$
- 15.12. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$
- 15.13. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$
- 15.14. $\begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$
- 15.15. $\begin{cases} x = \arccos \left(\frac{1}{t} \right), \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arcsin \left(\frac{1}{t} \right). \end{cases}$
- 15.16. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$
- 15.17. $\begin{cases} x = \ln \left(\frac{1-t}{1+t} \right), \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
- 15.18. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{1-t^2}, \\ y = \arccos^2 t. \end{cases}$
- 15.19. $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \ln \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$
- 15.20. $\begin{cases} x = \ln \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \arcsin \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$
- 15.21. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

$$15.22. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{\frac{t}{2}}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$$

$$15.23. \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$15.24. \begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$15.25. \begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$$

Задача 16. Найти y'_x для дифференцируемой функции $y(x)$, заданной неявно.

$$16.1. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2.$$

$$16.2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$16.3. x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

$$16.4. y^3 - 3y + 2ax = 0.$$

$$16.5. x^4 + y^4 = x^2y^2.$$

$$16.6. \sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y).$$

$$16.7. 2y \ln y = x.$$

$$16.8. x^y = y^x.$$

$$16.9. \cos(xy) = x.$$

$$16.10. y = 1 + xe^y.$$

$$16.11. \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}.$$

$$16.12. y = x + \operatorname{arctg} y.$$

$$16.13. y \sin x - \cos(x-y) = 0.$$

$$16.14. x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$$

$$16.15. x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$$16.16. y = \cos(x+y).$$

$$16.17. x - y = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$16.18. 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

$$16.19. x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0.$$

$$16.20. y^2 - 2xy + b^2 = 0.$$

$$16.21. y^2 \cos x = a^2 \sin 3x.$$

$$16.22. \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y^2} + 2xy = \sqrt{a}.$$

$$16.23. (4-x)y^2 = x^3.$$

$$16.24. y^5 + y^3 + y - x = 0.$$

$$16.25. e^y + xy = e.$$

Задача 17. Найти производную n -го порядка.

$$17.1. y = 3^{2x+5}.$$

$$17.2. y = \frac{7x+1}{17(4x+3)}.$$

$$17.3. y = \log_3(x+5).$$

$$17.4. y = 2^{ax}.$$

$$17.5. y = \frac{11+12x}{6x+5}.$$

$$17.6. y = \sin(3x+1) + \cos 5x.$$

$$17.7. y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}.$$

$$17.8. y = \lg(1+x).$$

17.9. $y = 7^{5x}$.

17.10. $y = \frac{4 + 15x}{5x + 1}$.

17.11. $y = \sin(x + 1) + \cos 2x$.

17.12. $y = \frac{2x + 5}{13(3x + 1)}$.

17.13. $y = \lg(x + 4)$.

17.14. $y = \frac{4x + 7}{2x + 3}$.

17.15. $y = \sin 2x + \cos(x + 1)$.

17.16. $y = xe^{ax}$.

17.17. $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$.

17.18. $y = \lg(5x + 2)$.

17.19. $y = 2^{3x+5}$.

17.20. $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

17.21. $y = \lg(3x + 1)$.

17.22. $y = \frac{4}{x}$.

17.23. $y = a^{2x+3}$.

17.24. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$.

17.25. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Задача 18. Найти производную указанного порядка.

18.1. $y = (x^3 + 2) \cdot e^{4x+3}$, $y^{IV} = ?$ 18.2. $y = \frac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{IV} = ?$

18.3. $y = e^{-x}(\cos 2x - 3 \sin 2x)$, $y^{IV} = ?$

18.4. $y = (5x - 8) \cdot 2^{-x}$, $y^{IV} = ?$ 18.5. $y = x \ln(1 - 3x)$, $y^{IV} = ?$

18.6. $y = e^{\frac{x}{2}} \sin 2x$, $y^{IV} = ?$ 18.7. $y = (3x - 7) \cdot 3^{-x}$, $y^{IV} = ?$

18.8. $y = \frac{1}{x} \sin 2x$, $y^{III} = ?$

18.9. $y = (x^2 + 3) \ln(x - 3)$, $y^{IV} = ?$

18.10. $y = \frac{\ln(3 + x)}{3 + x}$, $y^{III} = ?$ 18.11. $y = (4x + 3) \cdot 2^{-x}$, $y^V = ?$

18.12. $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$, $y^{III} = ?$

18.13. $y = \frac{1}{x^2} \cdot \ln x$, $y^{IV} = ?$ 18.14. $y = (4x^3 + 5) \cdot e^{2x+1}$, $y^V = ?$

18.15. $y = \frac{\ln(x - 1)}{\sqrt{x - 1}}$, $y^{III} = ?$ 18.16. $y = (3 - x^2) \cdot \ln^2 x$, $y^{III} = ?$

18.17. $y = \frac{\ln(2x + 5)}{2x + 5}$, $y^{III} = ?$

18.18. $y = (x + 7) \cdot \ln(x + 4)$, $y^V = ?$

18.19. $y = (2x^3 + 1) \cdot \cos x$, $y^V = ?$

$$18.20. y = \frac{1}{x^3} \cdot \ln x, y^{IV} = ?$$

$$18.21. y = (2x+3) \cdot \ln^2 x, y^{III} = ?$$

$$18.22. y = x^2 \cdot \sin(5x-3), y^{III} = ?$$

$$18.23. y = \frac{\log_2 x}{x^3}, y^{III} = ? \quad 18.24. y = x \cdot \cos x^2, y^{III} = ?$$

$$18.25. y = (2x^2 - 7) \cdot \ln(x-1), y^V = ?$$

Задача 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

$$19.1. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$19.2. \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

$$19.3. \begin{cases} x = \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{t^2 + 1}. \end{cases}$$

$$19.4. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$$

$$19.5. \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$$

$$19.6. \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$$

$$19.7. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

$$19.8. \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

$$19.9. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \left(\frac{t}{2} \right). \end{cases}$$

$$19.10. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

$$19.11. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

$$19.12. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$19.13. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$$

$$19.14. \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$19.15. \begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$$

$$19.16. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$19.17. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

$$19.18. \begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

$$19.19. \begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \end{cases}$$

$$19.21. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

$$19.23. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$19.25. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$$

$$19.20. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$19.22. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$19.24. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$$

Задача 20. Показать, что функция $y(x)$ удовлетворяет заданному уравнению.

$$20.1. y(x) = e^{x+x^2} + 2e^x, y' - y = 2x \cdot e^{x+x^2}.$$

$$20.2. y(x) = -\sqrt{x^4 - x^2}, xy'' - y^2 = x^4.$$

$$20.3. y(x) = \frac{x}{\cos x}, y' - y \operatorname{tg} x = \sec x.$$

$$20.4. y(x) = -x \cos x + 3x, xy' = y + x^2 \sin x.$$

$$20.5. y(x) = \frac{x}{x-1} + x^2, x(x-1)y' + y = x^2(2x-1).$$

$$20.6. y(x) = (x+1)^n(e^x - 1), y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(1+x)^n.$$

$$20.7. y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, xy' = (1-x^2)y.$$

$$20.8. y(x) = \frac{\sin x}{x}, xy' + y = \cos x.$$

$$20.9. y(x) = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}, y' + 2y = e^x.$$

$$20.10. y(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}, (1-x^2)y' + xy = 2x.$$

$$20.11. y(x) = x\sqrt{1-x^2}, yy' = x - 2x^3.$$

$$20.12. y(x) = \frac{c}{\cos x}, y' - y \operatorname{tg} x = 0.$$

$$20.13. y(x) = \ln(c + e^x), y' = e^{x-y}.$$

$$20.14. y(x) = -\frac{1}{3x+c}, y' = 3y^2.$$

$$20.15. y(x) = \ln(c + e^x), y' = e^{x-y}.$$

$$20.16. y(x) = x(c - \ln x), (x - y)dx + xdy = 0.$$

$$20.17. y(x) = \sqrt{x^2 - cx}, (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

$$20.18. y(x) = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}, y' \sin x = y \ln y.$$

$$20.19. y(x) = \frac{1+x}{1-x}, y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

$$20.20. y(x) = \sqrt[3]{2+3x-3x^2}, y^2y' = 1-2x.$$

$$20.21. y(x) = \operatorname{tg} \ln 3x, (1+y^2)dx = xdy.$$

$$20.22. y(x) = \sqrt[3]{x-\ln x-1}, \ln x + y^3 - 3xy^2y' = 0.$$

$$20.23. y(x) = -\sqrt{\frac{2}{x^2}-1}, 1+y^2+yy' = 0.$$

$$20.24. y(x) = (x^2+1)e^{x^2}, y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$$

$$20.25. y(x) = e^{x+x^2} + 2e^x, y' - y = 2xe^{x+x^2}.$$

Задача 21.

21.1. Из бревна, имеющего форму усеченного конуса, надо вырезать балку в форме параллелепипеда. Найти размеры балки, при которых объем ее будет наибольшим, если диаметр большего основания бревна равен 5 дм, диаметр меньшего – 4 дм, длина бревна по оси – 6 м.

21.2. Сосуд, состоящий из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой, должен вмещать 18 л воды. Найти размеры сосуда, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала.

21.3. Полоса жести шириной a должна быть согнута в виде открытого желоба так, чтобы поперечное сечение желоба имело форму кругового сегмента. Каким должен быть центральный угол, опирающийся на этот сегмент, для того, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

21.4. Круговой сектор имеет данный периметр l . Каков должен быть радиус сектора для того, чтобы площадь сектора была наибольшей?

21.5. Требуется изготовить из жести ведро данного объема V цилиндрической формы без крышки. Найти высоту цилиндра и радиус его основания, при которых на ведро уйдет наименьшее количество материала.

21.6. Требуется поставить палатку данного объема V , имею-

щую форму прямого кругового конуса. Найти отношение высоты конуса к радиусу его основания, при котором на палатку уйдет наименьшее количество материала.

21.7. Через точку $A(2; 1)$ провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых ею на осях координат, была наибольшей.

21.8. На странице книги печатный текст должен занимать 216 см^2 . Верхние и нижние поля должны быть по 3 см, правые и левые — по 2 см. Каковы должны быть размеры страницы для того, чтобы ее площадь была наименьшей?

21.9. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 300 см. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

21.10. Найти основание и высоту равнобочкой трапеции, которая при данной площади S имеет наименьший периметр; угол при большем основании трапеции равен α .

21.11. Какова должна быть сторона основания правильной треугольной призмы данного объема V , чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

21.12. Какова должна быть высота равнобедренного треугольника, вписанного в окружность диаметра d , чтобы площадь треугольника была наибольшей?

21.13. Каковы должны быть стороны прямоугольника, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, чтобы площадь его была наибольшей?

21.14. На оси параболы $x^2 = 12y$ на расстоянии 7 единиц длины от вершины в сторону вогнутости параболы дана точка P . Найти на параболе точку, ближайшую к точке P .

21.15. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R .

21.16. В прямоугольной системе координат через точку $P(4; 9)$ проведена прямая, образующая вместе с осями координат треугольник, расположенный в первом квадранте. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые на осях координат, чтобы сумма их была наименьшей?

21.17. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

- 21.18. На прямой, соединяющей два источника света, найти наименее освещенную точку, если силы света источников относятся как 64:27, а расстояние между ними равно 35 м.
- 21.19. Требуется изготовить коническую воронку с образующей l . Какова должна быть высота воронки, чтобы вместимость ее была наибольшей?
- 21.20. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.
- 21.21. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеиваетсяся прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?
- 21.22. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м³ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.
- 21.23. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.
- 21.24. В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.
- 21.25. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R .
- Задача 22.** Построить график функции с помощью производной первого порядка.
- 22.1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$. 22.2. $y = 3x - x^3$.
- 22.3. $y = x^2(x - 2)^2$. 22.4. $y = \frac{x^3 - 9x^2}{4} + 6x - 9$.
- 22.5. $y = 2 - 3x^2 - x^3$. 22.6. $y = (x + 1)^2(x - 1)^2$.
- 22.7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$. 22.8. $y = 3x^2 - 2 - x^3$.
- 22.9. $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$. 22.10. $y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5$.
- 22.11. $y = 6x - 8x^3$. 22.12. $y = 16x^2(x - 1)^2$.
- 22.13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$. 22.14. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$.
- 22.15. $y = (2x + 1)^2(2x - 1)^2$. 22.16. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$.
- 22.17. $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$. 22.18. $y = (2x - 1)^2(2x - 3)^2$.

- 22.19. $y = \frac{27(x^3 - x^2)}{4} - 4.$ 22.20. $y = \frac{x(12 - x^2)}{8}.$
 22.21. $y = \frac{x^2(x - 4)^2}{16}.$ 22.22. $y = \frac{27(x^3 + x^2)}{4} - 5.$
 22.23. $y = \frac{16 - 6x^2 - x^3}{8}.$ 22.24. $y = -\frac{(x^2 - 4)^2}{16}.$
 22.25. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9.$

Задача 23. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

- 23.1. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1, 4].$ 23.2. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1, 4].$
 23.3. $y = \sqrt[3]{2(x - 2)^2(8 - x)} - 1, [0, 6].$
 23.4. $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}, [-3, 3].$ 23.5. $y = 2\sqrt{x} - x, [0, 4].$
 23.6. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x - 1)^2(x - 7)}, [-1, 5].$
 23.7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1, 9].$ 23.8. $y = \frac{10x}{1 + x^2}, [0, 3].$
 23.9. $y = \sqrt[3]{2(x + 1)^2(5 - x)} - 2, [-3, 3].$
 23.10. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59, [2, 4].$
 23.11. $y = 3 - x - \frac{4}{(x + 2)^2}, [-1, 2].$
 23.12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x - 3)}, [-1, 6].$
 23.13. $y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2}, [1, 4].$
 23.14. $y = x - 4\sqrt{x + 2} + 8, [-1, 7].$
 23.15. $y = \sqrt[3]{2(x - 2)^2(5 - x)}, [1, 5].$
 23.16. $y = \frac{4x}{4 + x^2}, [-4, 2].$
 23.17. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8, [-4, -1].$
 23.18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x - 6)}, [-2, 4].$
 23.19. $y = -\frac{2x(2x + 3)}{x^2 + 4x + 5}, [-2, 1].$

$$23.20. y = -\frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 2x + 5}, [-5, 1].$$

$$23.21. y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}, [0, 4].$$

$$23.22. y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13, [2, 5].$$

$$23.23. y = 2\sqrt{x-1} - x + 2, [1, 5].$$

$$23.24. y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}, [-3, 4].$$

$$23.25. y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5, [-2, 1].$$

Задача 24. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

$$24.1. y = x^2 - 4x - (x-2) \ln(x-1), x_0 = 2.$$

$$24.2. y = 4x - x^2 - 2 \cos(x-2), x_0 = 2.$$

$$24.3. y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, x_0 = 2.$$

$$24.4. y = 2 \ln(x+1) - 2x + x^2 + 1, x_0 = 0.$$

$$24.5. y = 2x - x^2 - 2 \cos(x-1), x_0 = 1.$$

$$24.6. y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x, x_0 = -1.$$

$$24.7. y = 2 \ln x + x^2 - 4x + 3, x_0 = 1.$$

$$24.8. y = 1 - 2x - x^2 - 2 \cos(x+1), x_0 = -1.$$

$$24.9. y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}, x_0 = -2.$$

$$24.10. y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}, x_0 = -1.$$

$$24.11. y = (x+1) \sin(x+1) - 2x - x^2, x_0 = -1.$$

$$24.12. y = 6e^{x-1} - 3x - x^3, x_0 = 1.$$

$$24.13. y = 2x + x^2 - (x+1) \ln(2+x), x_0 = -1.$$

$$24.14. y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2, x_0 = -1.$$

$$24.15. y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2), x_0 = -2.$$

$$24.16. y = x^2 + 2 \ln(x+2), x_0 = -1.$$

$$24.17. y = 4x - x^2 + (x-2) \sin(x-2), x_0 = 2.$$

$$24.18. y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5, x_0 = 0.$$

$$24.19. y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}, x_0 = 2.$$

$$24.20. y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4, x_0 = -2.$$

$$24.21. y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x, x_0 = 1.$$

$$24.22. y = x^2 - 2x - (x-1) \ln x, x_0 = 1.$$

$$24.23. y = (x-1) \sin(x-1) + 2x - x^2, x_0 = 1.$$

$$24.24. y = x^2 - 4x + \cos^2(x-2), x_0 = 2.$$

$$24.25. y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x+1 - e^x), x_0 = 0.$$

Задача 25. Найти асимптоты и построить графики функций.

$$25.1. y = \frac{17-x^2}{14x-5}.$$

$$25.3. y = \frac{x^3-4x}{3x^2-4}.$$

$$25.5. y = \frac{4x^3x^2-8x-2}{2-3x^2}.$$

$$25.7. y = \frac{2x^2-6}{x-2}.$$

$$25.9. y = \frac{x^3-5x}{5-3x^2}.$$

$$25.11. y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}.$$

$$25.13. y = \frac{3x^2-7}{2x+1}.$$

$$25.15. y = \frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}.$$

$$25.17. y = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}.$$

$$25.19. y = \frac{x^2-11}{4x-3}.$$

$$25.21. y = \frac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}.$$

$$25.23. y = \frac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}.$$

$$25.25. y = \frac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}}.$$

$$25.2. y = \frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}.$$

$$25.4. y = \frac{4x^2+9}{4x+8}.$$

$$25.6. y = \frac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$25.8. y = \frac{2x^3+2x^2-3x-1}{2-4x^2}.$$

$$25.10. y = \frac{x^2-6x+4}{3x-2}.$$

$$25.12. y = \frac{4x^3-3x}{4x^2-1}.$$

$$25.14. y = \frac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}.$$

$$25.16. y = \frac{21-x^2}{7x+9}.$$

$$25.18. y = \frac{2x^3-3x^2-2x+1}{1-3x^2}.$$

$$25.20. y = \frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$25.22. y = \frac{x^2+2x-1}{2x+1}.$$

$$25.24. y = \frac{x^2+6x+9}{x+4}.$$

Задача 26. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$26.1. y = \frac{x^2 + 4}{x^2}.$$

$$26.3. y = \frac{2}{x^2 + 2x}.$$

$$26.5. y = \frac{12x}{9 + x^2}.$$

$$26.7. y = \frac{4 - x^3}{x^2}.$$

$$26.9. y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}.$$

$$26.11. y = \frac{x^2}{(x - 1)^2}.$$

$$26.13. y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}.$$

$$26.15. y = \frac{-8x}{x^2 + 4}.$$

$$26.17. y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

$$26.19. y = \frac{8(x - 1)}{(x + 1)^2}.$$

$$26.21. y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$26.23. y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$26.25. y = -\left(\frac{x}{x + 2}\right)^2.$$

$$26.2. y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

$$26.4. y = \frac{4x^2}{3 + x^2}.$$

$$26.6. y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}.$$

$$26.8. y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$$

$$26.10. y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}.$$

$$26.12. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2.$$

$$26.14. y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}.$$

$$26.16. y = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2.$$

$$26.18. y = \frac{4x}{(x + 1)^2}.$$

$$26.20. y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}.$$

$$26.22. y = \frac{4}{3 + 2x - x^2}.$$

$$26.24. y = \frac{1}{x^4 - 1}.$$

Задача 27. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$27.1. y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}.$$

$$27.3. y = 3 \ln \frac{x}{x - 3} - 1.$$

$$27.2. y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x + 1)}.$$

$$27.4. y = (3 - x)e^{x-2}.$$

$$27.5. y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$27.6. y = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$$

$$27.7. y = (x-2)e^{3-x}.$$

$$27.8. y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$27.9. y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}.$$

$$27.10. y = -(2x+1)e^{2(x+1)}.$$

$$27.11. y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$27.12. y = \ln \frac{x}{x-2} - 2.$$

$$27.13. y = (2x+5)e^{-2(x+2)}.$$

$$27.14. y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

$$27.15. y = 2 \ln \frac{x}{x+1} - 1.$$

$$27.16. y = (4-x)e^{x-3}.$$

$$27.17. y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$27.18. y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$27.19. y = (2x-1)e^{2(1-x)}.$$

$$27.20. y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}.$$

$$27.21. y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3.$$

$$27.22. y = -(x+1)e^{x+2}.$$

$$27.23. y = \frac{e^{x+3}}{x+3}.$$

$$27.24. y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$$

$$27.25. y = -(2x+3)e^{2(x+2)}.$$

Задача 28. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$28.1. y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}.$$

$$28.2. y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}.$$

$$28.3. y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}.$$

$$28.4. y = \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}.$$

$$28.5. y = \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}.$$

$$28.6. y = \sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}.$$

$$28.7. y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}.$$

$$28.8. y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}.$$

$$28.9. y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}.$$

$$28.10. y = \sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}.$$

$$28.11. y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}.$$

$$28.12. y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}.$$

$$28.13. y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}.$$

$$28.14. y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}.$$

$$28.15. y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}.$$

$$28.16. y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}.$$

$$28.17. y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}.$$

$$28.18. y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

- 28.19. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$. 28.20. $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$.
- 28.21. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$. 28.22. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$.
- 28.23. $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$. 28.24. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.
- 28.25. $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

Задача 29. Провести полное исследование функций и построить их графики.

- 29.1. $y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2,2^2}}$.
- 29.2. $y = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-27)^2}{6}}$.
- 29.3. $y = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{4}}$.
- 29.4. $y = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-24)^2}{8}}$.
- 29.5. $y = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-14)^2}{10}}$.
- 29.6. $y = \frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-23)^2}{1,5}}$.
- 29.7. $y = \frac{1}{3,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-8)^2}{3,5}}$.
- 29.8. $y = \frac{1}{5,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-7)^2}{5,5}}$.
- 29.9. $y = \frac{1}{7,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{7,5}}$.
- 29.10. $y = \frac{1}{9,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-17)^2}{9,5}}$.
- 29.11. $y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{2}}$.
- 29.12. $y = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-11)^2}{4}}$.
- 29.13. $y = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{6}}$.
- 29.14. $y = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-28)^2}{3}}$.
- 29.15. $y = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-18)^2}{5}}$.
- 29.16. $y = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{7}}$.
- 29.17. $y = \frac{1}{9\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-9)^2}{9}}$.
- 29.18. $y = \frac{1}{11\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{11}}$.
- 29.19. $y = \frac{1}{2,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-13)^2}{2,5}}$.
- 29.20. $y = \frac{1}{6,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-12)^2}{6,5}}$.
- 29.21. $y = \frac{1}{6,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-12)^2}{6,5}}$.
- 29.22. $y = \frac{1}{8,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-19)^2}{8,5}}$.
- 29.23. $y = \frac{1}{10,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-18)^2}{10,5}}$.
- 29.24. $y = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-26)^2}{3}}$.
- 29.25. $y = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-18)^2}{5}}$.

Типовой расчет №3.

Интегралы и их приложения

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

1.1. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx.$

1.2. $\int x 3^x dx.$

1.3. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

1.4. $\int \arccos x dx.$

1.5. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$

1.6. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx.$

1.7. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$

1.8. $\int x \cos^2 x dx.$

1.9. $\int \frac{\lg x}{x^3} dx.$

1.10. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$

1.11. $\int \ln(x^2 + 1) dx.$

1.12. $\int x^2 \ln(1+x) dx.$

1.13. $\int (x^2 + 3x - 1) e^{-x} dx.$

1.14. $\int x^3 e^x dx.$

1.15. $\int \ln^2 x dx.$

1.16. $\int \arcsin x dx.$

1.17. $\int \operatorname{arctg} x dx.$

1.18. $\int \ln(x + \sqrt{4+x^2}) dx.$

1.19. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx.$

1.20. $\int \sin x \cdot \ln(\cos x) dx.$

1.21. $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx.$

1.22. $\int x \arcsin 2x dx.$

1.23. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

1.24. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

1.25. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы.

2.1. $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$

2.2. $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$

$$2.3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x \, dx.$$

$$2.4. \int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x \, dx.$$

$$2.5. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x \, dx.$$

$$2.6. \int_0^\pi (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x \, dx.$$

$$2.7. \int_0^\pi (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x \, dx.$$

$$2.8. \int_0^\pi (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x \, dx.$$

$$2.9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x \, dx.$$

$$2.10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x \, dx.$$

$$2.11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x \, dx.$$

$$2.12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x \, dx.$$

$$2.13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x \, dx.$$

$$2.14. \int_0^3 (x^3 - 3x) \sin 2x \, dx.$$

$$2.15. \int_0^\pi (x^3 - 3x + 2) \sin x \, dx.$$

$$2.16. \int_0^{\pi/2} (x^3 - 5x + 6) \sin 3x \, dx.$$

$$2.17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x \, dx.$$

$$2.18. \int_0^{\pi/4} (x^2 + 17, 5) \sin 2x \, dx.$$

$$2.19. \int_0^{\pi/2} (1 - 5x^2) \sin x \, dx.$$

$$2.20. \int_{\pi/4}^3 (3x - x^2) \sin 2x \, dx.$$

$$2.21. \int_1^2 x \ln^2 x \, dx.$$

$$2.22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

$$2.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx.$$

$$2.24. \int_0^1 (x + 1) \ln^2(x + 1) \, dx.$$

$$2.25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx.$$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

$$3.1. \int \sqrt[3]{\sin^2 2x} \cdot \cos 2x dx.$$

$$3.2. \int \sqrt[3]{\arctg x} \cdot \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$3.3. \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$$

$$3.4. \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}.$$

$$3.5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$$

$$3.6. \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2} \arcsin^3 2x}.$$

$$3.7. \int \frac{dx}{x \ln^5 x}.$$

$$3.8. \int (e^{2x} + 5)^2 \cdot e^{2x} dx.$$

$$3.9. \int e^{-x^2} \cdot x dx.$$

$$3.10. \int e^{\arctg 3x} \frac{dx}{1+9x^2}.$$

$$3.11. \int e^{(x^2+x+1)} (2x+1) dx.$$

$$3.12. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$$

$$3.13. \int \sin(e^x) \cdot e^x dx.$$

$$3.14. \int \cos(3e^x + 1) \cdot e^x dx.$$

$$3.15. \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}.$$

$$3.16. \int \frac{x dx}{\cos^2(x^2+1)}.$$

$$3.17. \int x \sin(4-x^2) dx.$$

$$3.18. \int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}.$$

$$3.19. \int \operatorname{tg} 4x dx.$$

$$3.20. \int \frac{\cos x dx}{1+2 \sin x}.$$

$$3.21. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2 \cos x}}.$$

$$3.22. \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$3.23. \int \frac{x dx}{x^4+a^2}.$$

$$3.24. \int \frac{x^2 dx}{x^6+4}.$$

$$3.25. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+a}}.$$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы.

$$4.1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$4.2. \int_0^1 \frac{(x^2+1) dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

$$4.3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$4.4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$4.5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$4.6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$4.7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$4.8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$4.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$4.10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$$

$$4.13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$4.14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$4.15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4.16. \int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx.$$

$$4.17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$4.18. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$4.19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$4.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$4.21. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$4.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$4.23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$4.24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$4.25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Задача 5. Вычислить определенные интегралы.

$$5.1. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}.$$

$$5.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2+\cos x}.$$

$$5.3. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}.$$

$$5.4. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}.$$

$$5.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx.$$

$$5.6. \int_{2 \operatorname{arctg} 2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}.$$

$$5.7. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/3)}^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}.$$

$$5.8. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}.$$

$$5.9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}.$$

$$5.10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx.$$

$$5.11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}.$$

$$5.12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos x) dx}{1+\cos x+\sin x}.$$

$$5.13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}.$$

$$5.14. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx.$$

$$5.15. \int_0^2 \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}.$$

$$5.16. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}.$$

$$5.17. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}.$$

$$5.18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}.$$

$$5.19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$5.20. \int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) \, dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

$$5.21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{(1 + \sin x)^2}.$$

$$5.22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{(1 + \sin x + \cos)^2}.$$

$$5.23. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x \, dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$5.24. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x \, dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$5.25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \, dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

$$6.1. \int \frac{-x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 38x + 48}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16} \, dx.$$

$$6.2. \int \frac{-x^4 - 9x^3 - 32x^2 - 58x - 47}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18} \, dx.$$

$$6.3. \int \frac{-3x^4 + 3x^3 + 17x^2 - 9x - 30}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \, dx.$$

$$6.4. \int \frac{x^4 - 9x^3 + 21x^2 + 9x - 51}{x^3 - 11x^2 + 40x - 48} \, dx.$$

$$6.5. \int \frac{2x^4 - 11x^3 + 13x^2 + 19x - 37}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} \, dx.$$

$$6.6. \int \frac{2x^4 + 18x^3 + 60x^2 + 92x + 58}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18} \, dx.$$

$$6.7. \int \frac{-3x^4 - 8x^3 + 39x^2 + 123x + 66}{x^3 + 2x^2 - 15x - 36} \, dx.$$

$$6.8. \int \frac{-2x^4 - x^3 + 17x^2 + 7x - 47}{x^3 - x^2 - 8x + 12} \, dx.$$

$$6.9. \int \frac{x^4 - 6x^2 - 5x + 30}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \, dx.$$

$$6.10. \int \frac{2x^4 - 13x^3 + 20x^2 + 17x - 40}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18} \, dx.$$

- 6.11. $\int \frac{-x^4 - x^3 + 11x^2 + 21x + 24}{x^3 - 12x - 16} dx.$
- 6.12. $\int \frac{-x^4 + 9x^3 - 25x^2 + 22x - 12}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32} dx.$
- 6.13. $\int \frac{2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 83}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18} dx.$
- 6.14. $\int \frac{3x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 39x - 11}{x^3 + x^2 - 8x - 12} dx.$
- 6.15. $\int \frac{-2x^4 - 4x^3 + 11x^2 + 25x + 21}{x^3 + x^2 - 8x - 12} dx.$
- 6.16. $\int \frac{2x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 50x - 12}{x^3 + 3x^2 - 9x - 27} dx.$
- 6.17. $\int \frac{2x^4 - 9x^3 - 20x^2 + 83x + 73}{x^3 - 5x^2 - 8x + 48} dx.$
- 6.18. $\int \frac{3x^4 - 21x^3 + 39x^2 + 2x - 44}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16} dx.$
- 6.19. $\int \frac{2x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 27x - 11}{x^3 + x^2 - 8x - 12} dx.$
- 6.20. $\int \frac{-3x^4 + 29x^3 - 91x^2 + 84x + 30}{x^3 - 10x^2 + 33x - 36} dx.$
- 6.21. $\int \frac{-2x^4 + 3x^3 + 26x^2 - 24x - 99}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} dx.$
- 6.22. $\int \frac{-3x^4 + 19x^3 - 36x^2 + 11x + 19}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} dx.$
- 6.23. $\int \frac{2x^4 - 19x^3 + 57x^2 - 53x + 10}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32} dx.$
- 6.24. $\int \frac{3x^4 - 6x^3 - 35x^2 + 51x + 99}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} dx.$
- 6.25. $\int \frac{2x^4 - 19x^3 + 58x^2 - 50x - 22}{x^3 - 10x^2 + 33x - 36} dx.$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы.

7.1. $\int \frac{-4x^2 - 13x - 16}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.2. $\int \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$

- 7.3. $\int \frac{-4x^2 - 11x - 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.4. $\int \frac{-4x^2 - 12x - 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.5. $\int \frac{-2x^2 - 8x - 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.6. $\int \frac{-2x^2 - 7x - 8}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.7. $\int \frac{2x^2 + 7x + 8}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.8. $\int \frac{5x^2 + 14x + 12}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.9. $\int \frac{-2x^2 - 8x - 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.10. $\int \frac{3x^2 + 9x + 8}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.11. $\int \frac{3x^2 + 8x + 6}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.12. $\int \frac{-3x^2 - 10x - 12}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.13. $\int \frac{5x^2 + 15x + 14}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.14. $\int \frac{-5x^2 - 13x - 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.15. $\int \frac{5x^2 + 14x + 12}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.16. $\int \frac{4x^2 + 11x + 8}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.17. $\int \frac{3x^2 + 10x + 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.18. $\int \frac{4x^2 + 10x + 6}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.19. $\int \frac{3x^2 + 9x + 8}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.20. $\int \frac{-5x^2 - 15x - 14}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.21. $\int \frac{3x^2 + 10x + 12}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.22. $\int \frac{4x^2 + 11x + 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.23. $\int \frac{4x^2 + 12x + 10}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$ 7.24. $\int \frac{5x^2 + 14x + 14}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$
 7.25. $\int \frac{5x^2 + 15x + 16}{x^3 + 5x^2 + 10x + 8} dx.$

Задача 8. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

- 8.1. $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$
 8.2. $y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 3).$
 8.3. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$
 8.4. $y = \sin x \cos^2 x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$
 8.5. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$
 8.6. $y = x^2\sqrt{4 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2).$

$$8.7. y = \cos x \sin^2 x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$$

$$8.8. y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2.$$

$$8.9. y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3.$$

$$8.10. y = \arccos x, y = 0, x = 0. \quad 8.11. y = (x+1)^2, y^2 = x+1.$$

$$8.12. y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3.$$

$$8.13. y = x\sqrt{36 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 6).$$

$$8.14. x = \arccos y, x = 0, y = 0. \quad 8.15. y = x \operatorname{arctg} x, y = 0, x = \sqrt{3}.$$

$$8.16. y = x^2\sqrt{8 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}).$$

$$8.17. x = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2.$$

$$8.18. y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2).$$

$$8.19. y = x/(1 + \sqrt{x}), y = 0, x = 1.$$

$$8.20. y = 1/(1 + \cos x), y = 0, x = \pi/2, x = -\pi/2.$$

$$8.21. x = (y-2)^3, x = 4y-8.$$

$$8.22. y = \cos^5 x \sin 2x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$$

$$8.23. y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, y = 0, x = 1. \quad 8.24. x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y.$$

$$8.25. x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, x = 0, y = 1, y = e^3.$$

Задача 9. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$9.1. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

$$9.2. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 (y \geq 2). \end{cases}$$

$$9.3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

$$9.4. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

$$9.5. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 (y \geq 3). \end{cases}$$

$$9.6. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 (0 < x < 4\pi, y \geq 3). \end{cases}$$

- 9.7. $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$ 9.8. $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$
 9.9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 (0 < x < 6\pi, x \geq 3). \end{cases}$ 9.10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 (x \geq 4). \end{cases}$
 9.11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3 (y \geq 3). \end{cases}$ 9.12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 (0 < x < 12\pi, y \geq 9). \end{cases}$
 9.13. $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 (x \geq 4). \end{cases}$ 9.14. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4 (y \geq 4). \end{cases}$
 9.15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 (0 < x < 12\pi, y \geq 6). \end{cases}$
 9.16. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$ 9.17. $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2\sqrt{3} (y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$
 9.18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 (0 < x < 20\pi, y \geq 15). \end{cases}$
 9.19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 (x \geq 1). \end{cases}$ 9.20. $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4 (y \geq 4). \end{cases}$
 9.21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 (0 < x < 2\pi, y \geq 1). \end{cases}$
 9.22. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = 1 (x \geq 1). \end{cases}$ 9.23. $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2 (y \geq 2). \end{cases}$
 9.24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12 (0 < x < 16\pi, y \geq 12). \end{cases}$

$$9.25. \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3} (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$$

Задача 10. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

$$10.1. r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 (r \geq 2). \quad 10.2. r = \cos 2\varphi.$$

$$10.3. r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$10.4. r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 (r \geq 2).$$

$$10.5. r = 2 \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$10.6. r = \sin 3\varphi. \quad 10.7. r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 (r \geq 3).$$

$$10.8. r = \cos 3\varphi.$$

$$10.9. r = 2 \sin 4\varphi. \quad 10.10. r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi.$$

$$10.11. r = 6 \cos 3\varphi, r = 3 (r \geq 3). \quad 10.12. r = 2 \cos \varphi, r = 1 (r \geq 1).$$

$$10.13. r = \cos \varphi, r = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$10.14. r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi. \quad 10.15. r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi.$$

$$10.16. r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi. \quad 10.17. r = 2(1 - \cos \varphi), r = 4.$$

$$10.18. r = 1 + \cos \varphi. \quad 10.19. r = 3 \cos 2\varphi.$$

$$10.20. r = (5/2) \sin \varphi, r = (3/2) \sin \varphi.$$

$$10.21. r = (3/2) \cos \varphi, r = (5/2) \cos \varphi.$$

$$10.22. r = 4 \cos 4\varphi. \quad 10.23. r = \sin 6\varphi.$$

$$10.24. r = 2 \cos \varphi, r = 3 \cos \varphi. \quad 10.25. r = 2\sqrt{3} \cos \varphi, r = 2 \sin \varphi.$$

Задача 11. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$11.1. y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}. \quad 11.2. y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2.$$

$$11.3. y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq 7/9.$$

$$11.4. y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$11.5. y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6. \quad 11.6. y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$$

$$11.7. y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, 1/4 \leq x \leq 1.$$

$$11.8. y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3.$$

$$11.9. y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq 8/9.$$

$$11.10. y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq 1/4.$$

$$11.11. y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1. \quad 11.12. y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$11.13. y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$11.14. y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, 0 \leq x \leq 1/4.$$

$$11.15. y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$$

$$11.16. y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 15/16.$$

$$11.17. y = 1 - \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$$

$$11.18. y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4.$$

$$11.19. y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, 1/9 \leq x \leq 1.$$

$$11.20. y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, 0 \leq x \leq 9/16.$$

$$11.21. y = \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2. \quad 11.22. y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$11.23. y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 1.$$

$$11.24. y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 3/4.$$

$$11.25. y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \pi/6.$$

Задача 12. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$12.1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$12.2. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$12.3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$12.4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$12.5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$12.6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

- 12.7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
- 12.8. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$
- 12.9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$
- 12.10. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$
- 12.11. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$
- 12.12. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ \pi/2 \leq t \leq \pi. \end{cases}$
- 12.13. $\begin{cases} x = 2, 5(t - \sin t), \\ y = 2, 5(1 - \cos t), \\ \pi/2 \leq t \leq \pi. \end{cases}$
- 12.14. $\begin{cases} x = 3, 5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3, 5(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$
- 12.15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$
- 12.16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$
- 12.17. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/6. \end{cases}$
- 12.18. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
- 12.19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$
- 12.20. $\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$
- 12.21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi/4. \end{cases}$
- 12.22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
- 12.23. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$
- 12.24. $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq 3\pi/2. \end{cases}$
- 12.25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$

Задача 13. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

- 13.1. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$
- 13.2. $\rho = 2e^{4\varphi/3}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$
- 13.3. $\rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$
- 13.4. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

- 13.5. $\rho = 6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
- 13.6. $\rho = 3e^{3\varphi/4}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 13.7. $\rho = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 13.8. $\rho = \sqrt{2}e^\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 13.9. $\rho = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 13.10. $\rho = 12e^{12\varphi/5}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
- 13.11. $\rho = 1 - \sin \varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6$.
- 13.12. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq -\pi/2$.
- 13.13. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$, $-\pi/6 \leq \varphi \leq 0$.
- 13.14. $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/6$.
- 13.15. $\rho = 5(1 - \cos \varphi)$, $-\pi/3 \leq \varphi \leq 0$.
- 13.16. $\rho = 6(1 + \sin \varphi)$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$.
- 13.17. $\rho = 7(1 - \sin \varphi)$, $-\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6$.
- 13.18. $\rho = 8(1 - \cos \varphi)$, $-2\pi/3 \leq \varphi \leq 0$.
- 13.19. $\rho = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 3/4$.
- 13.20. $\rho = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 4/3$.
- 13.21. $\rho = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 5/12$.
- 13.22. $\rho = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 12/5$.
- 13.23. $\rho = 4\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 3/4$.
- 13.24. $\rho = 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 4/3$.
- 13.25. $\rho = 5\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 12/5$.

Задача 14. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

- 14.1. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, $z = y$, $z = 0$ ($y \geq 0$).
- 14.2. $z = x^2 + 4y^2$, $z = 2$.
- 14.3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$.
- 14.4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1$, $z = 12$.
- 14.5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, $z = 1$, $z = 0$.
- 14.6. $x^2 + y^2 = 9$, $z = y$, $z = 0$.
- 14.7. $z = x^2 + 9y^2$, $z = 3$.
- 14.8. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$.

$$14.9. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$$

$$14.10. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z = 2, z = 0.$$

$$14.11. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0 (y \geq 0).$$

$$14.12. z = 2x^2 + 8y^2, z = 4.$$

$$14.13. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$$

$$14.14. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$$

$$14.15. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0.$$

$$14.16. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0 (y \geq 0).$$

$$14.17. z = x^2 + 5y^2, z = 5.$$

$$14.18. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4.$$

$$14.19. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$$

$$14.20. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 4, z = 0.$$

$$14.21. \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0 (y \geq 0).$$

$$14.22. z = 4x^2 + 9y^2, z = 6.$$

$$14.23. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$$

$$14.24. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$$

$$14.25. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 0.$$

Задача 15. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox , в вариантах 17–25 ось вращения Oy .

$$15.1. y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$$

$$15.2. 2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$$

$$15.3. y = 3 \sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$$

$$15.4. y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0.$$

$$15.5. y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0. \quad 15.6. x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$$

$$15.7. y = xe^x, y = 0, x = 1.$$

$$15.8. y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0.$$

$$15.9. y = 2x - x^2, y = -x + 2.$$

$$15.10. y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$15.11. y = x^2, y^2 - x = 0. \quad 15.12. x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

$$15.13. y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y-2}, x = 1.$$

$$15.14. y = x^2, y = 1, x = 2. \quad 15.15. y = x^3, y = \sqrt{x}.$$

$$15.16. y = \sin(\pi x/2), y = x^2.$$

$$15.17. y = \arccos(x/3), y = \arccos x, y = 0.$$

$$15.18. y = \arcsin(x/5), y = \arcsin x, y = \pi/2.$$

$$15.19. y = x^2, x = 2, y = 0.$$

$$15.20. y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1.$$

$$15.21. y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0, 5.$$

$$15.22. y = \ln x, x = 2, y = 0. \quad 15.23. y = (x - 1)^2, y = 1.$$

$$15.24. y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1.$$

$$15.25. y = x^3, y = x^2.$$

Задача 16.

Варианты 1–8. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочкой трапеции (рис.1). (Размеры даны в метрах). Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, ускорение свободного падения g положить равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

Варианты 9–16. Определить работу (в джоулях), совершающую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_3 = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным $10 \text{ м}/\text{с}^2$.

Вариант	<i>m</i>	<i>H</i>	Вариант	<i>m</i>	<i>H</i>
16.9	7,0	200	16.13	5,0	400
16.10	7,0	250	16.14	5,0	450
16.11	6,0	300	16.15	4,0	500
16.12	6,0	350	16.16	4,0	550

Варианты 17–25. Цилиндр заполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутри цилиндра на *h* м (рис.2).

Указание. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где *p* – давление, *V* – объем.

Задача 17. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

$$17.1. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

$$17.2. \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx.$$

$$17.3. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}.$$

$$17.4. \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$17.5. \int_1^{+\infty} \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$17.6. \int_0^{+\infty} \sin x dx.$$

$$17.7. \int_{-\infty}^0 x \cdot e^x dx.$$

$$17.8. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

$$17.9. \int_0^1 \ln x dx.$$

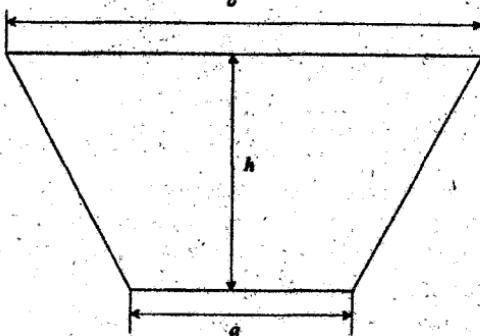
$$17.10. \int_0^1 \ln^2 x dx.$$

$$17.11. \int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$17.12. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x}}.$$

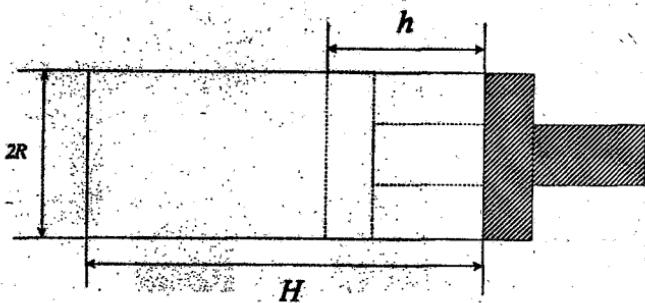
$$17.13. \int_0^3 \frac{dx}{(x - 3)^2}.$$

$$17.14. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4 - x)^2}}.$$



Вариант	a	b	h
16.1	4,5	6,6	3,0
16.2	4,8	7,2	3,0
16.3	5,1	7,8	3,0
16.4	5,4	8,4	3,0
16.5	5,7	9,0	4,0
16.6	6,0	9,6	4,0
16.7	6,3	10,2	4,0
16.8	6,6	10,8	4,0

Рис. 1.



Вариант	H , м	h , м	R , м
16.17	0,4	0,35	0,1
16.18	0,4	0,3	0,1
16.19	0,4	0,2	0,1
16.20	0,8	0,7	0,2
16.21	0,8	0,6	0,2
16.22	0,8	0,4	0,2
16.23	1,6	1,4	0,3
16.24	1,6	1,2	0,3
16.25	1,6	0,8	0,3

Рис. 2.

$$17.15. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$$

$$17.17. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$17.19. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

$$17.21. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

$$17.23. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$17.25. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

$$17.16. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$17.18. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$17.20. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x^4}.$$

$$17.22. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}.$$

$$17.24. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

Типовой расчет № 4.

Дифференциальные уравнения. Элементы теории устойчивости. Функции нескольких переменных

Дифференциальные уравнения

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$1.1. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$$

$$1.2. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$1.3. \quad 2y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{6y}{x} + 3.$$

$$1.4. \quad y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$$

$$1.5. \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{8y}{x} + 4.$$

$$1.6. \quad y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

$$1.7. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{6y}{x} + 6.$$

$$1.8. \quad y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$1.9. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{8y}{x} + 12.$$

$$1.10. \quad y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

$$1.11. \quad 4y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{10y}{x} + 5.$$

$$1.12. \quad y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

$$1.13. \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{10y}{x} + 10.$$

$$1.14. \quad y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

$$1.15. \quad xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

$$1.16. \quad xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$1.17. \quad xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$1.18. \quad xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$1.19. \quad xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$$

$$1.20. \quad xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$1.21. \quad xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$$

$$1.22. \quad xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$1.23. \quad xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$1.24. \quad xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

$$1.25. \quad xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$2.1. y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}.$$

$$2.3. y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}.$$

$$2.5. y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}.$$

$$2.7. y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}.$$

$$2.9. y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}.$$

$$2.11. y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}.$$

$$2.13. y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}.$$

$$2.15. y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}.$$

$$2.17. y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}.$$

$$2.19. y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}.$$

$$2.21. y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}.$$

$$2.23. y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}.$$

$$2.25. y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}.$$

$$2.2. y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}.$$

$$2.4. y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}.$$

$$2.6. y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}.$$

$$2.8. y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}.$$

$$2.10. y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}.$$

$$2.12. y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}.$$

$$2.14. y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}.$$

$$2.16. y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}.$$

$$2.18. y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}.$$

$$2.20. y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}.$$

$$2.22. y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}.$$

$$2.24. y' = \frac{y}{2x + 2y - 2}.$$

Задача 3. Найти решение задачи Коши.

$$3.1. y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$$

$$3.2. xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = 0,5.$$

$$3.3. 2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$$

$$3.4. y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, y(0) = 1.$$

$$3.5. xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, y(1) = 1.$$

$$3.6. 2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$$

$$3.7. 3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$$

$$3.8. 2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), y(0) = 1.$$

$$3.9. y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1.$$

$$3.10. 3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$$

$$3.11. 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$3.12. 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1.$$

$$3.13. 2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1.$$

$$3.14. 3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3.$$

$$3.15. y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$3.16. 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$3.17. y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2}.$$

$$3.18. xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1.$$

$$3.19. 2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x}y^{-1}, y(0) = 2.$$

$$3.20. 4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1.$$

$$3.21. 8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2}.$$

$$3.22. 2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2.$$

$$3.23. y' + xy = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 1.$$

$$3.24. 2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1.$$

$$3.25. y' - y = xy^2, y(0) = 1.$$

Задача 4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$4.1. y'''x \ln x = y''.$$

$$4.2. xy''' + y'' = 1.$$

$$4.3. 2xy''' = y''.$$

$$4.4. xy''' + y'' = x + 1.$$

$$4.5. y'' \operatorname{tg} x - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

$$4.6. x^2y'' + xy' = 1.$$

$$4.7. y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

$$4.8. x^3y''' + x^2y'' = 1.$$

- 4.9. $y''' \operatorname{tg} x = 2y''$.
 4.10. $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''$.
 4.11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.
 4.12. $xy''' + 2y'' = 0$.
 4.13. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$.
 4.14. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$.
 4.15. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$.
 4.16. $xy''' + y'' + x = 0$.
 4.17. $y^{IV} \operatorname{th} x = y'''$.
 4.18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.
 4.19. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$.
 4.20. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$.
 4.21. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''$.
 4.22. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.
 4.23. $y'' \operatorname{cth} x - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$.
 4.24. $(x+1)y''' + y'' = x+1$.
 4.25. $(1+\sin x)y''' = y'' \cos x$.

Задача 5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- 5.1. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.
 5.2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$.
 5.3. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.
 5.4. $y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x$.
 5.5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
 5.6. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5 \sin x - 3 \cos x)$.
 5.7. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.
 5.8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$.
 5.9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.
 5.10. $y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x$.
 5.11. $y'' + 2y' + 5y = -\sin x$.
 5.12. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3 \sin x + 4 \cos x)$.
 5.13. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.
 5.14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$.
 5.15. $y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x$.
 5.16. $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x$.
 5.17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$.
 5.18. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3 \sin x + 5 \cos x)$.
 5.19. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$.
 5.20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$.
 5.21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$.
 5.22. $y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$.

$$5.23. y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$$

$$5.24. y'' - 4y' + 8y = e^x(2 \sin x - \cos x).$$

$$5.25. y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x).$$

Задача 6. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$6.1. y'' - 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x.$$

$$6.2. y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x.$$

$$6.3. y''' - y' = 2e^x + \cos x.$$

$$6.4. y'' - 3y' = 2 \operatorname{ch} 3x.$$

$$6.5. y'' + 4y = -8 \sin 2x + 32 \cos 2x + 4e^{2x}.$$

$$6.6. y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

$$6.7. y'' - 4y' = 16 \operatorname{ch} 4y.$$

$$6.8. y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}.$$

$$6.9. y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4 \cos 2x + 8 \sin 2x.$$

$$6.10. y'' - 5y' = 50 \operatorname{ch} 5x.$$

$$6.11. y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x}.$$

$$6.12. y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18 \sin 3x - 9 \cos 3x.$$

$$6.13. y'' - y' = 2 \operatorname{ch} x.$$

$$6.14. y'' + 25y = 20 \cos 5x - 10 \sin 5x + 50e^{5x}.$$

$$6.15. y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64 \cos 4x - 64 \sin 4x.$$

$$6.16. y'' + 2y' = 2 \operatorname{sh} 2x.$$

$$6.17. y'' + 36y = 24 \sin 6x - 12 \cos 6x + 36e^{6x}.$$

$$6.18. y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}.$$

$$6.19. y'' + 3y' = 2 \operatorname{sh} 3x.$$

$$6.20. y'' + 49y = 14 \sin 7x + 7 \cos 7x - 98e^{7x}.$$

$$6.21. y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x).$$

$$6.22. y'' + 4y' = 16 \operatorname{sh} 4x.$$

$$6.23. y'' + 64y = 16 \sin 8x - 16 \cos 8x - 64e^{8x}.$$

$$6.24. y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x).$$

$$6.25. y'' + 5y' = 50 \operatorname{sh} 5x.$$

Задача 7. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$7.1. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$$

$$7.2. y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x.$$

$$7.3. y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$$

$$7.4. y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$$

$$7.5. y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$$

$$7.6. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x.$$

$$7.7. y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x. \quad 7.8. y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$$

$$7.9. y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x.$$

$$7.10. y''' - 3y' - 2y = -4xe^x.$$

$$7.11. y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}.$$

$$7.12. y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x.$$

$$7.13. y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}.$$

$$7.14. y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x.$$

$$7.15. y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x.$$

$$7.16. y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x.$$

$$7.17. y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x.$$

$$7.18. y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}.$$

$$7.19. y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}.$$

$$7.20. y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x.$$

$$7.21. y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x - 32).$$

$$7.22. y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x.$$

$$7.23. y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x.$$

$$7.24. y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x.$$

$$7.25. y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x.$$

Задача 8. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

$$8.1. \begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

$$8.2. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

$$8.3. \begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

$$8.4. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

$$8.5. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$8.7. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

$$8.9. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

$$8.11. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$$

$$8.13. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

$$8.15. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$8.17. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$$

$$8.19. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$$

$$8.21. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 2x - y - 2 \cos t. \end{cases}$$

$$8.23. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

$$8.25. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t. \end{cases}$$

$$8.6. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

$$8.8. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$8.10. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$

$$8.12. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5 \sin t. \end{cases}$$

$$8.14. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$$

$$8.16. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x - 6y. \end{cases}$$

$$8.18. \begin{cases} \dot{x} = x - y + \sin 2t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

$$8.20. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

$$8.22. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

$$8.24. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

Элементы теории устойчивости

Задача 9. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выясните, являются ли устойчивыми решения уравнений.

$$9.1. (x+1)y' + xy = 0, y(1) = e^{-1}.$$

$$9.2. 3(x-1)y' = y, y(2) = 0.$$

$$9.3. y' + 2xy = e^{-x^2}, y(0) = 1. \quad 9.4. y' = 3x(2+y), y(0) = -1.$$

$$9.5. y' + 2y = e^{-x}, y(0) = 2. \quad 9.6. y' = x(1+y), y(0) = 0.$$

$$9.7. y' + y = \sin x + \cos x, y(0) = e^{-1}.$$

$$9.8. y' = \frac{x}{3}(1+y), y(0) = 0.$$

$$9.9. y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x, y(0) = 1.$$

$$9.10. 3(x-1)y' = y, y(2) = 0. \quad 9.11. y' + 3y = x^2 + 1, y(0) = \frac{38}{27}.$$

$$9.12. y' = x(2+y), y(0) = -1. \quad 9.13. y' + xy = x^3, y(0) = -2.$$

$$9.14. 2xy' = y - y^3, y(1) = 0. \quad 9.15. y' = y + x, y(0) = 1.$$

$$9.16. y' = (2-x^3)y, y(0) = 0. \quad 9.17. xy' - 2y = x^4, y(1) = 1.$$

$$9.18. y' = 2+x, y(0) = 1. \quad 9.19. y' = -y + x^2, y(1) = 1.$$

$$9.20. y' = 2x(y+1), y(0) = 0. \quad 9.21. y' = x-y, y(0) = 1.$$

$$9.22. y' = x(y-1), y(1) = 0.$$

$$9.23. y = x(y' - x \cdot \cos x), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$9.24. y' = 3x(2-y), y(0) = 1. \quad 9.25. y' = 2x(x^2 + y), y(0) = 0.$$

Задача 10. Исследовать устойчивость нулевого решения дифференциальных уравнений двумя методами: а) по критерию Михайлова; б) по алгебраическому критерию устойчивости.

$$10.1. y''' + y'' + y' + 2y = 0. \quad 10.2. y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$$

$$10.3. y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$10.4. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$$

$$10.5. y^{(4)} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$$

$$10.6. y^{(4)} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$$

$$10.7. y^{(4)} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$$

$$10.8. y^{(4)} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0.$$

$$10.9. y^{(4)} + 3, 1y''' + 5, 2y'' + 9, 8y' + 5, 8y = 0.$$

$$10.10. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$$

$$10.11. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0.$$

$$10.12. y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$$

$$10.13. y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$$

$$10.14. y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$$

$$10.15. y^{(5)} + 3y^{(4)} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$$

$$10.16. y^{(5)} + 5y^{(4)} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$$

$$10.17. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0.$$

$$10.18. y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

$$10.19. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

$$10.20. 2y^{(4)} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

$$10.21. 3y^{(4)} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

$$10.22. y''' + 3y'' + 5y' + 2y = 0.$$

$$10.23. y''' + 3y'' + 4y' + y = 0.$$

$$10.24. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + 3y = 0.$$

$$10.25. y^{(4)} + 5y''' + y'' + 2y' + y = 0.$$

Задача 11. Исследовать на устойчивость нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений по первому приближению.

$$11.1. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot{y} = -x - 3y + x(e^{\frac{x^2}{2}} - 1). \end{cases} \quad 11.2. \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$$

$$11.3. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 8 \sin^2 y, \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3. \end{cases} \quad 11.4. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 22 \sin y + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1. \end{cases}$$

$$11.5. \begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^y - 4 \cos y^2, \\ \dot{y} = 2e^x - 2 - y + x^4. \end{cases} \quad 11.6. \begin{cases} \dot{x} = 7x + 2 \sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2. \end{cases}$$

$$11.7. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \sin 2y - x^3 y, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7. \end{cases}$$

$$11.8. \begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}x e^x - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + y e^{-\frac{1}{2}y^2} - y^4 \cdot \cos x. \end{cases}$$

$$11.9. \begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4} \sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3, \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y \cos y - 11y^5. \end{cases}$$

$$11.10. \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^{14}. \end{cases}$$

$$11.11. \begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cdot \cos y - \frac{1}{3}x^3, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \frac{1}{12}x^4 - y^3 e^y. \end{cases}$$

$$11.12. \begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3, \\ \dot{y} = -3x - y^3. \end{cases}$$

$$11.14. \begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

$$11.16. \begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

$$11.18. \begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}. \end{cases}$$

$$11.20. \begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$$

$$11.22. \begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$$

$$11.24. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$$

$$11.13. \begin{cases} \dot{x} = -2y - x^5, \\ \dot{y} = 2x - y^5. \end{cases}$$

$$11.15. \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

$$11.17. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

$$11.19. \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$

$$11.21. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

$$11.23. \begin{cases} \dot{x} = 10 \sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14 \sin y + y^2. \end{cases}$$

$$11.25. \begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$$

Задача 12. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы, построив функцию Ляпунова в виде $\vartheta(x, y) = ax^2 + by^2$, $\vartheta(x, y) = ax^4 + by^4$, $\vartheta(x, y) = ax^4 + by^2$ (подобрав коэффициенты a и b соответствующим образом) и применив теорему Ляпунова или Четаева.

$$12.1. \begin{cases} \dot{x} = -3y - 2x^3, \\ \dot{y} = 2x - 3y^3. \end{cases}$$

$$12.2. \begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = x^4y. \end{cases}$$

$$12.3. \begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^4, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y. \end{cases}$$

$$12.4. \begin{cases} \dot{x} = -y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$$

$$12.5. \begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$$

$$12.6. \begin{cases} \dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5, \\ \dot{y} = -2x - x^3y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$$

$$12.7. \begin{cases} \dot{x} = x + x^3, \\ \dot{y} = -y - y^3. \end{cases}$$

$$12.8. \begin{cases} \dot{x} = xy^4 - 2x^3 - y, \\ \dot{y} = 2x^2y^3 - y^7 + 2x. \end{cases}$$

$$12.9. \begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^5. \end{cases}$$

$$12.10. \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y, \\ \dot{y} = x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$$

$$12.11. \begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2, \\ \dot{y} = x^2y. \end{cases}$$

$$12.12. \begin{cases} \dot{x} = -2y - x(x-y)^2, \\ \dot{y} = 3x - \frac{3}{2}(x-y)^2. \end{cases}$$

$$12.13. \begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$$

$$12.14. \begin{cases} \dot{x} = -x - y - x^3 - y^2, \\ \dot{y} = x - y + xy. \end{cases}$$

$$12.15. \begin{cases} \dot{x} = -y + x^3, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

$$12.16. \begin{cases} \dot{x} = -y + x^5, \\ \dot{y} = x + y^5. \end{cases}$$

$$12.17. \begin{cases} \dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5, \\ \dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$$

$$12.18. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 4xy^2, \\ \dot{y} = y + 2x^2y. \end{cases}$$

$$12.19. \begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$$

$$12.20. \begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -2y^3 - x. \end{cases}$$

$$12.21. \begin{cases} \dot{x} = x(2 + \cos x), \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

$$12.22. \begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{3}y - 2x^2y^2. \end{cases}$$

$$12.23. \begin{cases} \dot{x} = -5y - 2x^3, \\ \dot{y} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

$$12.24. \begin{cases} \dot{x} = 5x^3 + 2y, \\ \dot{y} = -3x + 4y^3. \end{cases}$$

$$12.25. \begin{cases} \dot{x} = y^2 + y, \\ \dot{y} = -x^2 - x. \end{cases}$$

Функции нескольких переменных

Задача 13. Найти область определения функции и изобразить ее геометрически.

$$13.1. z = \ln(y^2 - 4x + 8) + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

$$13.2. u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} \quad (R > r > 0).$$

$$13.3. z = \ln(4 + 4x - y^2).$$

$$13.4. z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

$$13.5. z = \arcsin(x + y) + \frac{1}{\sqrt{x + y}}. \quad 13.6. u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$13.7. u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}. \quad 13.8. z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}.$$

$$13.9. u = \ln(3z^2 - 4x^2 - 5y^2 - 7), 13.10. z = \arccos \frac{x}{x+y}.$$

$$13.11. z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$$

$$13.12. z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)} \quad (a > 0).$$

$$13.13. z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}.$$

$$13.14. z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16(y^2 + 1)}}.$$

$$13.15. z = \frac{\ln x \cdot \ln y}{\sqrt{1-x-y}}.$$

$$13.16. z = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3).$$

$$13.17. z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}.$$

$$13.18. z = \sqrt{\log_a(2 - x^2 - y^2)}.$$

$$13.19. z = \ln(3x + y - 3) + \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{3x - 2y + 8}}.$$

$$13.20. z = \arcsin \frac{x}{x+y}.$$

$$13.21. z = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{x^2+y-2}.$$

$$13.22. u = \frac{1}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}.$$

$$13.23. u = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

$$13.24. u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{3x + y - 3z}.$$

$$13.25. u = \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{1 - x - y}.$$

Задача 14. Найти первый и второй дифференциалы функции двух переменных.

$$14.1. z = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

$$14.2. z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$14.3. z = 2^{-\frac{x}{z}}.$$

$$14.4. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$14.5. z = \ln \sin \frac{x+1}{\sqrt{y}}.$$

$$14.6. z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}.$$

$$14.7. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$14.8. z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$14.9. z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}.$$

$$14.10. z = \arccos \sqrt{x^2 - 2y}.$$

$$14.11. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x^2}.$$

$$14.12. z = (xy)^{2x}.$$

$$14.13. z = \ln \arcsin(x + y^3).$$

$$14.15. z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$14.17. z = x \sin xy + y \cos xy.$$

$$14.19. z = 0,5 \ln(x^2 + y^2).$$

$$14.21. z = e^x \cos(y - x).$$

$$14.23. z = \sqrt{x^2 + 2xy}.$$

$$14.25. z = \operatorname{tg} \frac{y^2}{x}.$$

$$14.14. z = \ln \operatorname{tg}(x + y).$$

$$14.16. z = x^2 \ln(x + y).$$

$$14.18. z = \sin(x + \cos y).$$

$$14.20. z = \cos(ax + e^{-y}).$$

$$14.22. z = x \ln(y + 2x).$$

$$14.24. z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y}).$$

Задача 15. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ по формулам дифференцирования функций двух переменных.

$$15.1. z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{y}}, x = u \sin v, y = v \cos u.$$

$$15.2. z = x^2 \operatorname{tg} y, x = \frac{u}{v}, y = u^2 + v^2.$$

$$15.3. z = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y}, x = \operatorname{tg}^2 u, y = \operatorname{ctg}^2 v.$$

$$15.4. z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, x = 3u + 1, y = 1 - v.$$

$$15.5. z = x^2 y, x = \operatorname{tg} u, y = \cos v.$$

$$15.6. z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, x = u \cos v, y = v \sin u.$$

$$15.7. z = (x^2 + y^2)^{-1}, x = u + v, y = u - v.$$

$$15.8. z = \ln(x^2 + y^2), x = uv, y = \frac{u}{v}.$$

$$15.9. z = x^2 y - y^2 x, x = u \cos v, y = u \sin v.$$

$$15.10. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, x = u \sin v, y = u \cos v.$$

$$15.11. z = \ln \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x}}{y}, x = uv, y = \frac{u}{v}.$$

$$15.12. z = 2y + x \cos \sqrt[3]{xy}, x = u \cos v, y = v \cos u.$$

$$15.13. z = \sqrt[4]{\sin^4 x + \cos^4 y}, x = u^2 - v^2, y = e^{uv}.$$

$$15.14. z = y + \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2}, x = \arcsin u^2, y = u^v.$$

$$15.15. z = y + \ln(3 + \sqrt[3]{x^2 y}), x = u^2 + e^v, y = e^{uv}.$$

$$15.16. z = \operatorname{arctg}(xy + y + \sqrt[3]{x^2 y}), x = \sqrt[3]{u^3 + uv^2}, y = u^2 + e^v.$$

$$15.17. z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}, x = \operatorname{tg} u, y = \sqrt{v}.$$

$$15.18. z = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, x = \frac{u}{v}, y = uv.$$

$$15.19. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x = u \sin v, y = v \cos u.$$

$$15.20. z = \sin x \cos y, x = \frac{u}{v}, y = u^2 + v^2.$$

$$15.21. z = (x-y)^2 - x + 2y, x = \operatorname{tg} u, y = \sin v.$$

$$15.22. z = \sin \frac{x}{y}, x = u+v, y = u-2v.$$

$$15.23. z = e^{x \cos y}, x = uv, y = \frac{u}{v^2}.$$

$$15.24. z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x}, x = \sqrt{uv}, y = \frac{u}{v}.$$

$$15.25. z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, x = u \cos v, y = v \sin u.$$

Задача 16. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции двух независимых переменных, заданной неявно.

$$16.1. z \ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0. \quad 16.2. y \cdot z = \operatorname{arctg}(xz).$$

$$16.3. xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0. \quad 16.4. x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1.$$

$$16.5. z - x = y \operatorname{ctg}(z-x). \quad 16.6. z^2 \ln(z+x) = xy.$$

$$16.7. \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 = 0.$$

$$16.8. x - z = z \ln \frac{z}{y}. \quad 16.9. \pi yz = 4 \operatorname{arctg} xz.$$

$$16.10. ze^z = xe^x + ye^y. \quad 16.11. x \cos y + y \cos x + \ln z^x = 0.$$

$$16.12. x \cos y + y \cos z + z \cos x = 0.$$

$$16.13. 1 + xy - \ln(e^{xz} + e^{-yz}) = 0.$$

$$16.14. x + y + z = e^z.$$

$$16.16. x = z \ln \frac{z}{y}.$$

$$16.18. xy + yz + xz = 1.$$

$$16.20. z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}.$$

$$16.22. xy^2 + z^3 = 12.$$

$$16.24. xyz(z^2 - x^2) = 5 + y^5.$$

$$16.15. x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

$$16.17. x \sin y + y \sin z + z \sin x = a.$$

$$16.19. xe^y + ye^x + ze^x = a.$$

$$16.21. \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}.$$

$$16.23. x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6.$$

$$16.25. e^z - z + xy = 3.$$

Задача 17. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к данной поверхности в указанной точке.

$$17.1. z = 1 + x^2 + y^2, M(1, 1, 3). \quad 17.2. x^2 + y^2 - z^2 = -1, M(2, 2, 3).$$

$$17.3. z = \ln(x^2 + y^2), M(1, 0, 0). \quad 17.4. z = \sin x \cos y, M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

$$17.5. x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21, M\left(1, 0, \sqrt{\frac{20}{3}}\right).$$

$$17.6. \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}, M(0, 0, a).$$

$$17.7. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$

$$17.8. z = (x-y)^2 - x + 2y, M(1, 1, 1).$$

$$17.9. z = x^3 - 3xy + y^3, M(1, 1, -1).$$

$$17.10. z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, M(0, 1, 0).$$

$$17.11. z = \sin\left(\frac{x}{4}\right), M(\pi, 1, 0). \quad 17.12. z = e^{x \cos y}, M(1, 0, e).$$

$$17.13. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, M\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right). \quad 17.14. xy^2 + z^3 = 12, M(1, 2, 2).$$

$$17.15. x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6, M(1, 2, -1).$$

$$17.16. xyz(z^2 - x^2) = 5 + y^5, M(1, 1, 2).$$

$$17.17. \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4, M(2, 3, 6).$$

$$17.18. e^z - z + xy = 3, M(2, 1, 0). \quad 17.19. z = y + \ln \frac{x}{z}, M(1, 1, 1).$$

$$17.20. 2^{\frac{x}{a}} + 2^{\frac{y}{b}} = 8, M(2, 2, 1).$$

$$17.21. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, M(x_0, y_0, z_0).$$

$$17.22. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, M(x_0, y_0, z_0).$$

$$17.23. \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, M(x_0, y_0, z_0).$$

$$17.24. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, M(x_0, y_0, z_0).$$

$$17.25. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, M(x_0, y_0, z_0).$$

Задача 18. Найти экстремумы функции $z = f(x, y)$.

$$18.1. z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y. \quad 18.2. z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2.$$

$$18.3. z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2.$$

$$18.4. z = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1.$$

$$18.5. z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y. \quad 18.6. z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3.$$

$$18.7. z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2. \quad 18.8. z = 3x^3 + y^3 + 3y^2 - x - 1.$$

$$18.9. z = x^3 + y^3 + 3axy.$$

$$18.10. z = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy.$$

$$18.11. z = x^4 + y^4 - 2x^2. \quad 18.12. z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

$$18.13. z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$$

$$18.14. z = xy^2(12 - x - y), x > 0, y > 0.$$

$$18.15. z = x^2y^3(6 - x - y). \quad 18.16. z = \frac{x + y}{xy} - xy.$$

$$18.17. z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y.$$

$$18.18. z = 81 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - (x^2 + xy + y^2).$$

$$18.19. z = xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{y}. \quad 18.20. z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x.$$

$$18.21. z = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}, x > -1, y > -1.$$

$$18.22. z = 1 + x^2 + \sqrt[3]{(y+2)^2}. \quad 18.23. z = 1 + y^2 - \sqrt[3]{(x-2)^4}.$$

$$18.24. z = xy\sqrt{12 - 4x^2 - y^2}. \quad 18.25. z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Задача 19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных на заданном множестве:

19.1. $z = xy + x + y, -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 4.$

19.2. $z = x^2 - xy + y, |x| \leq 2, |y| \leq 3.$

19.3. $z = x^2 + y^2 - 4x, -2 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 3.$

19.4. $z = x^3 + y^3 - 3xy, 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2.$

19.5. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1.$

19.6. $z = x + |x - y|, |x| \leq 1, |y| \leq 2.$

19.7. $z = x^2 - xy + y^2, |x| + |y| \leq 1.$

19.8. $z = (x + y)e^{xy}, -2 \leq x + y \leq 1.$

19.9. $z = 1 + x + 2y, x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$

19.10. $z = x + 3y, x + y \leq 6, x + 4y \geq 4, y \leq 2.$

19.11. $z = x^2 - 2y + 3, y - x \leq 1, x \leq 0, y \geq 0.$

19.12. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y, x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0.$

19.13. $z = xy(6 - x - y), x + y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0.$

19.14. $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y), x + y \leq 2\pi, x \geq 0, y \geq 0.$

19.15. $z = 3 + 2xy, x^2 + y^2 \leq 1.$

19.16. $z = 1 - x^2 - y^2, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1.$

19.17. $z = x^2 + y^2, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$

19.18. $z = x^2 + 2xy - 4x - 8y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$

19.19. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$

19.20. $z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4.$

19.21. $z = xy, x^2 + y^2 \leq 1.$

19.22. $z = x^2 + 3y^2 + x - y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1.$

19.23. $z = \cos x \cos y \cos(x + y), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi.$

19.24. $z = xy + x + y, 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3.$

19.25. $z = x^2y(4 - x - y), 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6, x + y \leq 6.$

Задача 20. Найти условные экстремумы функции $z = f(x, y)$ относительно заданного уравнения связи.

- 20.1. $z = xy, x + y - 1 = 0.$
- 20.2. $z = x^2 + y^2, 3x + 2y - 6 = 0.$
- 20.3. $z = x^2 + y^2, 2x - y - 3 = 0.$
- 20.4. $z = xy^2, x + 2y - 1 = 0.$
- 20.5. $z = \cos^2 x + \cos^2 y, x - y - \frac{\pi}{4} = 0.$
- 20.6. $z = xy, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$
- 20.7. $z = x^2 - y^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$
- 20.8. $z = x^2 + y^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$
- 20.9. $z = xy^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$
- 20.10. $z = 5 - 3x - 4y, x^2 + y^2 = 25.$
- 20.11. $z = 1 - 4x - 8y, x^2 - 8y^2 = 8.$
- 20.12. $z = x^2 + xy + y^2, x^2 + y^2 = 1.$
- 20.13. $z = 2x^2 + 12xy + y^2, x^2 + 4y^2 = 25.$
- 20.14. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, x^2 + y^2 = r^2, r > 0,$
- 20.15. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4, x + y + 3 = 0.$
- 20.16. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, x + y + 3 = 0.$
- 20.17. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}, x^2 + y^2 = 1.$
- 20.18. $z = xy^2, x + 2y = 1.$
- 20.19. $z = 2x + y, x^2 + y^2 = 1.$
- 20.20. $z = x^2 + y^2, \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$
- 20.21. $z = x + y, x^2 + y^2 = 1.$
- 20.22. $z = -x, x^2 + y^2 = 1.$
- 20.23. $z = x^2 + y, x^2 + (y - 4)^2 = 1.$
- 20.24. $z = z^2 + (y - 2)^2, y - \frac{1}{4}x^2 = 0.$
- 20.25. $z = \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} - 1, x + y + 11 = 0.$

Список рекомендуемой литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1985. 383 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные и интегральные исчисления. М.: Наука, 1980. 432 с.
3. Гусац А.А. Пособие по решению задач по высшей математике. Минск: Вышэйш. шк., 1968. 530 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Выш. шк., 1986. 303 с.
5. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. I. М.: Наука, 1982. 600 с.
6. Картузова Т.В., Орлов В.Н. и др. Неопределенные и определенные интегралы. Дифференциальные уравнения: Метод. указания и контрольные задания для студентов-заочников. Чебоксары, 1999. 70 с.
7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учеб. пособие. М.: Наука, 1981. 304 с.
8. Кудрявцев Л.Д., Кутусов Д.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. СПб., 1994. 489 с.
9. Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1984. Т. I.
10. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для вузов. М.: Выш. шк., 1983. 176 с.
11. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. М.: Наука, 1973. 399 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. М.: Наука, 1978. Т. I, 456 с.; Т. II, 575 с.
13. Сборник задач по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1981. 464 с.
14. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. М.: Выш. шк., 1978. Т. I. 384 с.