Элементы линейной алгебры
Аналитическая геометрия
Комплексные числа

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

Элементы линейной алгебры
Аналитическая геометрия
Комплексные числа

Учебное пособие

Чебоксары 2016

УДК 512.64[+514.12+511.14](075.8)
ББК В143я73+В151.54я73+В141я73
Э 45

Рецензенты:

Н. И. Мерлина — доктор пед. наук, профессор кафедры дискретной математики и информатики ПМФиИТ ЧГУ им. И. Н. Ульянова;

Г. Г. Волков — канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой информационных технологий и математики Чебоксарского кооперативного института (филиал РУК).

Авторы-составители:
А. Н. Быкова, Т. В. Картузова, О. И. Кирпикова

Э 45 **Элементы** линейной алгебры. Аналитическая геометрия. Комплексные числа: учеб. пособие / авт.-сост. А. Н. Быкова, Т. В. Картузова, О. И. Кирпикова. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. — 136 с.

ISBN 978-5-7677-2229-7

Изложены теоретические сведения по разделам «Элементы линейной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Комплексные числа» в соответствии с программой курса высшей математики для студентов-заочников технических факультетов. Положения теории продемонстрированы на решениях типовых примеров. По каждому разделу приведены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов I курса технических факультетов.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук,
доцент А. С. Сабиров

Утверждено Учебно-методическим советом университета

ISBN 978-5-7677-2229-7 УДК 512.64[+514.12+511.14](075.8)
ББК В143я73+В151.54я73+В141я73

Введение

В Чувашском государственном университете им. И. Н. Ульянова частично уже изданы следующие пособия: «Пределы. Производные. Функции нескольких переменных. Интегралы», «Дифференциальные уравнения. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Ряды», «Уравнения математической физики. Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления», составляющие математическое обеспечение курса высшей математики для студентов-заочников технических факультетов.

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой курса высшей математики по разделам «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Комплексные числа». Пособие состоит из пяти глав:

1) «Определители и матрицы» (определители и их вычисление, матрицы и действия над ними, решение систем линейных алгебраических уравнений);

2) «Элементы векторной алгебры» (векторы и действия над ними, базис на плоскости и в пространстве, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их свойства);

3) «Линейные пространства и операторы» (линейное пространство и его виды, линейные операторы, собственные числа и собственные векторы линейного оператора, квадратичные формы);

4) «Аналитическая геометрия» (прямая на плоскости, кривые второго порядка, прямая и плоскость в пространстве, поверхности второго порядка);

5) «Комплексные числа» (комплексные числа и действия над ними, различные формы записи комплексных чисел, формулы Муавра).

В начале каждой главы кратко изложены основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приведены подробные решения типовых примеров, даны задачи для самостоятельной работы.

При подборе задач были использованы различные сборники задач по высшей математике, список которых приведен в использованной литературе.

Данное учебное пособие предназначено для проведения лекций и практических занятий для студентов-заочников технических факультетов в реальных условиях острого дефицита времени.

Предлагаемое учебное пособие может быть использовано как под руководством преподавателя, так и при самостоятельном изучении материала студентами.

Глава 1

Определители и матрицы

§ 1.1. Определители и их свойства

Определение 1.1. Выражение вида $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ называется *определителем второго порядка* и вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель второго порядка имеет две строки, элементы которых a_{11}, a_{12} и a_{21}, a_{22}; два столбца, элементами которых являются a_{11}, a_{21} и a_{12}, a_{22}.

Пример 1.1. Вычисление определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -4 - 6 = -10.$$

Определение 1.2. Выражение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

называется *определителем третьего порядка* и вычисляется следующим образом (по *правилу треугольников* или *правилу Саррюса*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Определитель третьего порядка имеет три строки и три столбца с элементами a_{ij} $(i, j = \overline{1, 3})$.

Пример 1.2. Вычисление определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 4 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 -$$

$$- 2\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-1)\cdot 4 = 15.$$

Определение 1.3. *Минором* элемента определителя (1.1) третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых лежит указанный элемент.

Пример 1.3. Минором элемента a_{21}, лежащего во второй строке и первом столбце определителя (1.1), является определитель

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение 1.4. *Алгебраическим дополнением* элемента определителя (1.1) называют минор элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где i — номер строки, j — номер столбца, на пересечении которых лежит данный элемент.

Пример 1.4. Алгебраическое дополнение для элемента a_{21} определителя третьего порядка есть

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим простейшие **свойства определителей:**

1) определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот;

2) при перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет знак;

3) определитель, имеющий две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен нулю;

4) общий множитель элементов строки или столбца можно выносить за знак определителя;

5) если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число k, то определитель умножится на это число;

6) определитель, у которого элементы двух строк (столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю;

7) если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей: у одного из них элементами соответствующей строки (столбца) являются первые слагаемые, а у другого — вторые; остальные элементы у этих двух определителей те же, что и у данного;

8) определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число;

9) определитель равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения. Например, для определителя третьего порядка имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

§ 1.2. Применение определителей к исследованию и решению систем линейных уравнений

1.2.1. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \tag{1.2}$$

где числа a_{ij} — коэффициенты $(i, j = \overline{1, 3})$; b_1, b_2, b_3 — свободные члены. Составим определитель системы (1.2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также вспомогательные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ отличен от нуля, то система (1.2) имеет единственное решение. Его можно найти по *формулам Крамера*:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система (1.2) имеет бесчисленное множество решений.

Если $\Delta = 0$, но среди определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z хотя бы один не равен нулю, то система (1.2) не имеет решений.

Пример 1.5. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет только одно решение. Находим его по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

□

1.2.2. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Предположим, что хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix},$$

например, определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, отличен от нуля. Запишем тогда систему (1.3) в виде

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Дадим z произвольное численное значение. Этому значению z будет соответствовать единственное решение системы (1.4), определяемое по формулам Крамера. Значение z выбиралось произвольно, поэтому система (1.3) имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1.6. Решить систему

$$\begin{cases} 3x - 2y + 7z = 0, \\ x + y + 5z = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, то запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} 3x - 2y = -7z, \\ x + y = -5z. \end{cases}$$

Пусть, например, $z = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 3x - 2y = -7, \\ x + y = -5. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -17,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 8.$$

По формулам Крамера находим $x = -17/5$, $y = 8/5$, $z = 1$. Так как значение z выбиралось произвольно, то система имеет бесчисленное множество решений. □

§ 1.3. Определители высших порядков

Определители высших порядков вводятся как обобщение понятий определителей второго и третьего порядков. Определитель n-го порядка имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Все перечисленные выше свойства для определителей третьего порядка переносятся на определители любого порядка. При их вычислении основную роль играют свойства 8 и 9 из § 1.1.

С помощью свойства 8 добиваются того, чтобы в некоторой выбранной строке (разумеется, вместо строки можно выбрать и столбец) стояли на всех местах нули, кроме, быть может, одного. Затем, применяя свойство 9, разлагают определитель по элементам этой строки и, тем самым, сводят его вычисление к нахождению определителя меньшего порядка. Повторяя этот прием, получают определитель третьего или второго порядка, который вычисляется непосредственно.

Пример 1.7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Выберем первую строку и, используя единицу, сделаем нули на остальных местах этой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 12(28 + 2 + 6 - 7 - 6 - 8) = 12 \cdot 15 = 180. \qquad \square$$

§ 1.4. Матрицы и действия над ними

1.4.1. Определение матрицы

Определение 1.5. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел, которая имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — элементы матрицы ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$).

Матрица $\mathbf{A}$ состоит из m строк и n столбцов, при этом говорят, что дана матрица порядка $m \times n$.

Определение 1.6. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*.

Определение 1.7. Матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ называется *транспонированной* по отношению к матрице $\mathbf{A}$, если строками матрицы $\mathbf{B}$ являются соответствующие столбцы матрицы $\mathbf{A}$.

Определение 1.8. Матрица $\mathbf{A}$ называется *нулевой*, если все ее элементы равны 0, т.е. имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.9. Квадратная матрица $\mathbf{A}$ называется *диагональной*, если все ее недиагональные элементы равны 0, т.е. имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.10. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* и обозначается буквой $\mathbf{E}$.

Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.11. Матрица $\mathbf{A}$ называется *симметрической*, если $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Определение 1.12. Матрица $\mathbf{A}$, состоящая из одной строки, называется *строчной*, и имеет вид

$$\mathbf{A} = (a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n}).$$

Определение 1.13. Матрица $\mathbf{A}$, состоящая из одного столбца, называется *столбцевой*, и имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

1.4.2. Действия над матрицами

1. Сложение матриц. *Суммой* двух матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ одних и тех же порядков $m \times n$ называется матрица $\mathbf{C}$ такого же порядка $m \times n$, элементы c_{ij} которой есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Например, для квадратных матриц 2-го порядка имеем

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц:
1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

2. Умножение матрицы на число:

$$\lambda\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Свойства умножения матриц на число:
1) $\lambda(\mu\mathbf{A})=(\lambda\mu)\mathbf{A}$;
2) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$;
3) $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$.

3. Умножение матриц. *Произведением* матрицы $\mathbf{A}$ порядка $m\times n$ на матрицу $\mathbf{B}$ порядка $n\times p$ называется матрица $\mathbf{C}$ порядка $m\times p$. Необходимо, чтобы число столбцов матрицы A совпало с числом строк матрицы $\mathbf{B}$. Порядок вычисления элементов матрицы произведения (на примере квадратных матриц 3-го порядка):

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц:
1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;
3) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;
4) $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

Пример 1.8.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 14 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.9.

$$(1\ 2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

Пример 1.10.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4\ 5\ 6) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.11.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

§ 1.5. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Определение 1.14. Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется *обратной* к матрице $\mathbf{A}$ порядка $n \times n$, если выполнено равенство $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Определение 1.15. Квадратная матрица $\mathbf{A}$, для которой $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = 0$, называется *вырожденной*.

Вырожденная матрица не имеет обратной.

Определение 1.16. Квадратная матрица $\mathbf{A}$, для которой $|\mathbf{A}| \neq 0$, называется *невырожденной*.

Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(\widetilde{\mathbf{A}})^T, \tag{1.5}$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы $\mathbf{A}$; $(\widetilde{\mathbf{A}})^T$ — транспонированная матрица. Способ нахождения обратной матрицы по формуле (1.5) называется *методом присоединенной матрицы*.

Обратные матрицы применяются при решении матричного уравнения вида

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — заданные матрицы, а $\mathbf{X}$ — искомая матрица, причем $|\mathbf{A}| \neq 0$. Решением этого уравнения является $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Аналогично, из уравнения $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ получаем решение $\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}$.

Матрицы дают возможность кратко записать систему уравнений первой степени. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.6}$$

Обозначим:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Система (1.6) примет вид матричного уравнения $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, решением которого является $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Пример 1.12. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ 5x + y + 3z = 14, \\ 2x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

Решение. Обозначим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

тогда система примет вид $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, откуда $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Вычислим обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ и решим матричное уравнение:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 5 + 6 - 2 - 6 - 10 = -3 \neq 0,$$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad (\widetilde{\mathbf{A}})^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

§ 1.6. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$ порядка $m \times n$. Матрица имеет много миноров, причем некоторые из них могут равняться нулю, а другие — отличны от нуля.

Определение 1.17. *Рангом* матрицы $\mathbf{A}$ называется максимальный порядок r отличного от нуля минора матрицы $\mathbf{A}$.

Обозначение ранга матрицы: r_A или $\operatorname{rang}\mathbf{A}$.

Определение 1.18. Любой минор порядка r, отличный от нуля, называется *базисным минором*.

Теорема 1.1 (о базисном миноре). Ранг матрицы равен рангу системы ее строк (столбцов); при этом система строк (столбцов) матрицы, содержащая базисный минор, образует базис в системе всех строк (столбцов) этой матрицы.

Вычислим ранг матрицы *методом окаймляющих миноров*. Пусть в матрице найден минор k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор k-го порядка. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример 1.13. Найти ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Фиксируем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0.$$

Минор 3-го порядка, окаймляющий минор 2-го порядка, также отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 - 4 = 1 \neq 0.$$

Однако оба минора 4-го порядка, окаймляющие минор 3-го порядка, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому ранг матрицы **A** равен 3. □

Определение 1.19. *Элементарными преобразованиями* матрицы **A** называются следующие действия:

1) умножение какой-либо строки на число k, $k \neq 0$;

2) перестановка двух строк;

3) прибавление к элементам одной строки соответственных элементов другой строки, умноженных на число k, $k \neq 0$.

Аналогичные преобразования можно провести и над столбцами.

С помощью элементарных преобразований матрица $\mathbf{A}$ может приводиться к специальному виду

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.20. Число r единиц, стоящих на главной диагонали, не зависит от способа приведения матрицы $\mathbf{A}$ к матрице $\mathbf{A}_r$ и называется *рангом* матрицы $\mathbf{A}$.

Пример 1.14. Найти ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad r_A = 3.$$

□

§ 1.7. Решение произвольных систем уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.7}$$

или, в матричной форме,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{1.8}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Определение 1.21. Если $\mathbf{B} = 0$, то система уравнений (1.7) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Определение 1.22. Система уравнений называется *совместной*, если у нее существует по крайней мере одно решение; в противном случае она называется *несовместной*.

Определение 1.23. Две системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Теорема 1.2 (Кронекера—Капелли). Для того чтобы система (1.7) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ — расширенная матрица системы (1.7).

Расширенная матрица $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ имеет вид

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Возможны два случая:

1) если $r_A < r_{(A,B)}$, то система (1.7) несовместна и решения не существует;

2) если $r_A = r_{(A,B)} = r$, то для системы (1.7) существует хотя бы одно решение.

При этом:

а) если $r = n$, то система имеет единственное решение;

б) если $r < n$ $(m \leqslant n)$, то система имеет бесконечное число решений.

Пример 1.15. Установить совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

Решение. Вычислим ранг расширенной матрицы

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -13 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вычитая сумму элементов второй, третьей и утроенной первой строки из элементов четвертой строки, получим

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это показывает, что $r_{(A,B)} \leqslant 3$ и четвертое уравнение системы — линейная комбинация первых трех ее уравнений. Далее, минор третьего порядка, расположенный в верхнем левом углу матрицы $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

т.е. $r_{(A,B)} = 3$. Но Δ состоит из первых трех строк матрицы $\mathbf{A}$, т.е. $r_A = 3$. Итак, $r_{(A,B)} = r_A = 3 = n$, поэтому данная система имеет единственное решение, получаемое по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1. \qquad \square$$

Пример 1.16. Установить совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы не превосходит число их строк, т.е. $r \leqslant 4$. С другой стороны, минор второго порядка, расположенный в верхнем левом углу, отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

т.е. ранг системы $r \geqslant 2$. Подвергнем расширенную матрицу следующим преобразованиям: прибавим к третьей строке вторую, а затем вычтем первую, умноженную на 2; аналогично, к четвертой строке прибавим удвоенную вторую, а затем вычтем первую строку, умноженную на 3. Тогда преобразованная матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что последние два уравнения системы являются линейными комбинациями первых двух уравнений системы, ранг $r_A = r_{(A,B)} = 2$, т.е. $r < n$ и система имеет бесчисленное множество решений.

Составим подсистему, состоящую из первых двух уравнений системы, и перенесем в правую часть неизвестные x_3, x_4 и x_5, коэффициенты которых не входят в минор Δ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_3 + x_4 - x_5 + 1, \\ x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 + 2x_5. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$, где c_3, c_4, c_5 — произвольные постоянные, имеем

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + c_3 + c_4 - c_5, \\ x_1 - x_2 = 2c_5 - c_3 - c_4. \end{cases}$$

Решая полученную систему по формулам Крамера, имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 + c_3 + c_4 - c_5 & 1 \\ 2c_5 - c_3 - c_4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1 + c_5),$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 + c_3 + c_4 - c_5 \\ 1 & 2c_5 - c_3 - c_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1 + 3c_3 + 3c_4 - 5c_5).$$

Полученное решение называется *общим решением* системы. □

§ 1.8. Метод Жордана—Гаусса

Системы m уравнений с n неизвестными обычно решают методом последовательных исключений неизвестных — *методом Жордана—Гаусса*. С помощью элементарных преобразований над строками и перестановкой столбцов матрица $\mathbf{A}$ из коэффициентов и расширенная матрица $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, в которой присутствует столбец свободных членов $\mathbf{B}$, могут быть приведены к минимальной форме — треугольной или трапецеидальной, в которых элементы под главной диагональю обращены в нули. При этом определяются ранги матриц и устанавливается совместность системы. Условие совместности: $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (теорема Кронекера—Капелли). Если условие выполнено, то последовательно находим неизвестные, начиная с наименьшего по длине уравнения и положив свободными «лишние» неизвестные.

Пример 1.17. Методом Жордана—Гаусса найти общее решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и применим элементарные преобразования над строками:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & 8 \\ 0 & -11 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -8 \\ 0 & -11 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ \quad 11x_2 + x_3 = -8, \\ \qquad -4x_3 = -12, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. □

Пример 1.18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

(первую строку, умноженную соответственно на 2, 3, 1, вычитаем из следующих)

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

(вторую строку, умноженную соответственно на 2, 3, вычитаем из следующих)

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система привелась к ступенчатой, которая после отбрасывания двух уравнений вида $0 = 0$ превращается в следующую:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\;\; x_3 - 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_3 — главные, а x_2 и x_4 — свободные. Система неопределенна. Из второго уравнения найдем выражение x_3 через x_4; подставив его в первое уравнение, найдем выражение x_1 через x_2 и x_4. Общее решение имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2, \quad x_3 = 5x_4 + 3.$$

Полагая в общем решении, например, $x_2 = 2$, $x_4 = -1$, найдем одно из решений:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -1,$$

которое, в отличие от общего решения, называется *частным решением* данной системы уравнений. □

§ 1.9. Однородная система линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

В матричной форме система (1.9) имеет вид $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$, где $\mathbf{O}$ — нулевой столбец.

Всякая система однородных линейных уравнений имеет *нулевое решение* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ и, значит, совместна.

Для того чтобы система однородных линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг r был меньше числа неизвестных n. Отсюда следует, в частности, что любая система однородных линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных ($m < n$), имеет ненулевое решение.

Для того чтобы система однородных линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Любое решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$ системы линейных уравнений с n неизвестными можно рассматривать как строку (или столбец) $(c_1\ c_2\ ...\ c_n)$. Поэтому имеют смысл такие понятия, как сумма двух решений, произведение решения на число, линейная комбинация решений, линейная зависимость или независимость системы решений.

Свойства решений системы однородных линейных уравнений:

1) сумма двух решений есть решение;

2) произведение решения на любое произвольное число есть решение.

Из этих свойств следует:

3) линейная комбинация решений есть решение.

В частности, если существует хоть одно ненулевое решение, то из него умножением на произвольные числа можно получить бесконечно много решений.

Определение 1.24. *Фундаментальной* (или *основной*) системой решений для системы однородных линейных уравнений (1.9) называется линейно независимая система решений, через которую линейно выражается любое решение системы (1.9).

Если ранг r системы уравнений (1.9) равен числу n неизвестных, то эта система не имеет фундаментальной системы решений, т.к. единственным решением будет нулевое решение, составляющее линейно зависимую систему. Если $r < n$, то система (1.9) имеет бесконечно много фундаментальных систем решений, причем каждая из них состоит из $n-r$ решений и любые $n-r$ линейно независимых решений составляют фундаментальную систему решений.

Правило для построения фундаментальной системы решений. Берут любой определитель M порядка $n-r$, отличный от нуля (например, определитель, у которого элементы главной диагонали равны единице, а остальные — нулю). Свободным неизвестным придают поочередно значения, равные элементам первой, второй и т.д. строк определителя M, и каждый раз из общего решения находят соответствующие значения главных неизвестных. Полученные $n-r$ решений составляют фундаментальную систему. Меняя произвольно исходный определитель M, можно получить всевозможные фундаментальные системы решений.

Пример 1.19. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0, \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$$

Решение. Матрица коэффициентов системы имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Умножая первую строку на 2, а вторую строку на -1, сложим их и получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - 2x_5, \\ \qquad\quad x_2 = 2x_3 + 3x_5, \\ \qquad\qquad\quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$, получим

$$\begin{cases} x_1 = -3c_1 - 5c_2, \\ x_2 = 2c_1 + 3c_2, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение системы

$$\mathbf{X}(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} -3c_1 - 5c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений, давая свободным неизвестным поочередно значения $(1\ \ 0)$ и $(0\ \ 1)$:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{X}(1;0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{X}(0;1) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы общее решение может быть записано в виде

$$\mathbf{X}(c_1, c_2) = c_1\mathbf{E}_1 + c_2\mathbf{E}_2. \qquad \square$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить следующие определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 1) 60; 2) $1/\cos^2\alpha$; 3) -44; 4) -29; 5) 18; 6) 180.

2. Вычислить определители, пользуясь только свойством 8 определителей:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответ: 1) -20; 2) 8; 3) 0; 4) -10.

3. Установить, что системы уравнений имеют единственное решение, и найти их:

1) $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

Ответ: 1) $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$; 2) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$; 3) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; 4) $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 1) 12; 2) 28; 3) 223; 4) 0.

5. Найти матрицу $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 11 & 3 & -1 \\ 3 & 11 & 10 \\ -4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Найти произведение матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, если

$$\mathbf{A} = (3 \quad -5 \quad 4), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: -8.

7. Найти матрицу $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -28 & 61 & -32 \\ -14 & 46 & -19 \\ -12 & 34 & -18 \end{pmatrix}$.

9. Найти многочлен от матрицы $\mathbf{A}$, если

$$f(x) = x^2 - 3x + 5, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Найти матрицу, обратную для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

11. Решить матричное уравнение $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{pmatrix}$.

12. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 15, \\ 3x - y + z = 8, \\ -2x + y + z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. Найти ранг матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) 3; б) 2; в) 4; г) 2.

14. Установить совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_3 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x_3 = -4c_1 + 2c_2 - 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2c_1 - c_2 + 1$.

15. Решить систему методом Жордана—Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $(1 \quad -1 \quad -1 \quad 1)^T$.

16. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\mathbf{E}_1 = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -9/4 \;\; 3/4)^T$, $\mathbf{E}_2 = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -3/2 \;\; 1/2)^T$, $\mathbf{E}_3 = (0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -2 \;\; 1)^T$; $\mathbf{X}(c_1, c_2, c_3) = c_1\mathbf{E}_1 + c_2\mathbf{E}_2 + c_3\mathbf{E}_3$.

Глава 2

Элементы векторной алгебры

Предметом векторной алгебры является описание операций над векторами. Впервые скалярное и векторное произведения в 1777 г. использовал Лагранж в связи с изучением тетраэдров. А терминологию ввел Гамильтон в 1846 г. Векторная алгебра имеет широкое применение в различных разделах физики, математики, механики и т.д.

§ 2.1. Векторы и основные линейные операции над ними

Определение 2.1. *Вектором* называется направленный отрезок. Вектор обозначается символами $\bar{a}$ или $\overline{AB}$, где A — начальная точка или начало вектора, B — конечная точка или конец вектора.

Определение 2.2. Длина направленного отрезка называется *модулем вектора* и обозначается символом $|\bar{a}|$.

Определение 2.3. Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то он называется *нулевым* и длина его равна нулю. Направление нулевого вектора не определено.

Определение 2.4. Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным* или *ортом*.

Определение 2.5. Векторы, расположенные на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Определение 2.6. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение 2.7. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные модули.

Таким образом, при параллельном переносе получается новый вектор, равный прежнему. Верно и обратное — векторы, совпадающие при параллельном переносе, равны.

Определение 2.8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют *противоположными*, если их длины равны, а направления противоположны.

Рассмотрим основные операции над векторами.

2.1.1. Умножение вектора на скаляр (число)

Определение 2.9. *Произведение ненулевого вектора* $\bar{a}$ *на действительное число* α называют вектор $\bar{c} = \alpha\bar{a}$, определяемый следующими условиями:

1) $|\bar{c}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|$;

2) $\bar{c}$ коллинеарен $\bar{a}$;

3) векторы $\bar{c}$ и $\bar{a}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

Свойства умножения вектора на скаляр:

1) $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого $\bar{a}$ справедливо равенство $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ (сочетательный закон);

2) для любых двух коллинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$ существует, и при том только одно, число λ, такое, что $\bar{c} = \lambda\bar{a}$ (признак коллинеарности векторов);

3) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$;

4) $\forall\ \bar{a} \quad 0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

2.1.2. Сложение векторов

Определение 2.10. *Суммой векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$, расположенных так, что начало вектора $\bar{b}$ совпадает с концом вектора $\bar{a}$, называется вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}$ (правило треугольника) (рис. 2.1, *а*). При этом пишут $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Аналогично определяется сумма n векторов:

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = \bar{c}.$$

А именно, суммой называют вектор $\bar{c}$, проведенный из начала первого в конец последнего вектора, при условии, что начало вектора $\bar{a}_2$ совпадает с концом вектора $\bar{a}_1$, начало

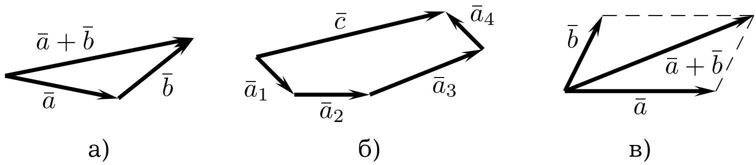

Рис. 2.1

вектора $\bar{a}_3$ совпадает с концом вектора $\bar{a}_2$ и т.д. (правило многоугольника) (рис. 2.1, *б*).

Замечание. Если на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить параллелограмм, поместив их начало в общую точку, то сумма $\bar{a}+\bar{b}$ будет лежать на диагонали параллелограмма, выходящей из общего начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (правило параллелограмма) (рис. 2.1, *в*).

Свойства сложения векторов:

1) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$ (свойство поглощения нулевого вектора);

2) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ (перестановочное или, по-другому, коммутативное свойство);

3) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ (сочетательное или, по-другому, ассоциативное свойство);

4) для всякого ненулевого вектора $\bar{a}$ существует противоположный вектор $-\bar{a}$, такой, что $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$.

2.1.3. Вычитание векторов

Определение 2.11. Вектор $\bar{c}$ называется *разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$*, т.е. $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$, если $\bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$.

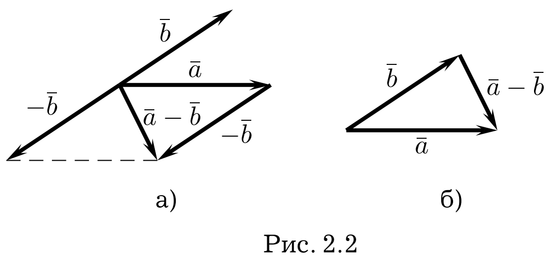

Рис. 2.2

Из последнего равенства следует, что $\bar{c}=\bar{a}+(-\bar{b})$, т.е. вычитание векторов сведено к сложению (рис. 2.2). Нетрудно заметить, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, разность этих векторов $\bar{a} - \bar{b}$ лежит на диагонали параллелограмма, проведенной из конца вектора $\bar{b}$ в конец вектора $\bar{a}$.

§ 2.2. Линейная зависимость и независимость векторов. Базисы на плоскости и в пространстве

2.2.1. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеется n векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ и n постоянных коэффициентов c_1, c_2, ... , c_n.

Определение 2.12. Выражение

$$c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + ... + c_n\bar{a}_n \tag{2.1}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$.

Определение 2.13. Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа c_1, c_2, ... , c_n, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю:

$$c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + ... + c_n\bar{a}_n = \bar{0}. \tag{2.2}$$

С учетом определения 2.12 определение 2.13 можно записать следующим образом:

Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ называются линейно зависимыми, если хотя бы один вектор из этой системы можно выразить в виде линейной комбинации остальных.

Определение 2.14. Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если линейная комбинация $c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + ... + c_n\bar{a}_n = \bar{0}$ лишь при условии $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

С учетом определения 2.12 определение 2.14 можно записать следующим образом:

Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ называются линейно независимыми, если ни один из этих векторов нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Заметим, что если один из векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ является нулевым, то совокупность векторов линейно зависима.

Определение 2.15. Ненулевые векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях.

Из сказанного выше следует, что три компланарных вектора линейно зависимы.

2.2.2. Базисы на плоскости и в пространстве

Определение 2.16. Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих данной плоскости, называется *базисом на этой плоскости*. Если $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — базис на плоскости, то для любого вектора $\bar{a}$, лежащего в этой плоскости, можно найти единственным образом такие числа x_1 и x_2, что будет $\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$. Числа x_1 и x_2 называются *координатами вектора* $\bar{a}$ в данном базисе.

Определение 2.17. Совокупность любых трех линейно независимых векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ в пространстве называется *базисом в пространстве*. Если $\bar{a}$ — произвольный вектор, то всегда можно найти единственным образом числа x_1, x_2, x_3 такие, что будет иметь место представление $\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$. Коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении данного вектора по базису называются *координатами вектора* $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

2.2.3. Прямоугольная декартова система координат

Если из всех возможных базисов $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ в пространстве выбрать такой, что все векторы, входящие в этот базис, были попарно ортогональны ($(\widehat{\bar{e}_i, \bar{e}_j}) = \pi/2$, $i, j = 1, 2, 3$) и, далее, каждый базисный вектор выбрать единичной длины (т.е. $\bar{e}_i^0 = \bar{e}_i/|\bar{e}_i|$, $i = 1, 2, 3$), то такой базис называется *ортонормированным*.

Определение 2.18. Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятых в указанном порядке и приложенных к одной точке, называют *тройкой векторов*.

Определение 2.19. Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется *правой*, если при наблюдении с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ происходит против движения часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левой*.

Ограничимся выбором правой тройки базисных векторов $\bar{e}_1^0$, $\bar{e}_2^0$, $\bar{e}_3^0$. Поместим далее начала векторов, входящих в выбранный базис, в общую точку O и из этой точки проведем оси Ox, Oy, Oz, направления которых совпадают с направлениями векторов $\bar{e}_1^0$, $\bar{e}_2^0$, $\bar{e}_3^0$. Получим так называемую *пространственную прямоугольную правую декартову систему координат* $Oxyz$. Причем принято орты обозначать так: $\bar{e}_1^0 = \bar{i}$, $\bar{e}_2^0 = \bar{j}$, $\bar{e}_3^0 = \bar{k}$ (рис. 2.3). Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*, ось Oz — *осью аппликат*.

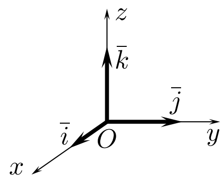

Рис. 2.3

Если базис состоит из двух векторов $\bar{i}$ и $\bar{j}$, получим *прямоугольную правую декартову систему координат на плоскости* — систему Oxy.

2.2.4. Проекция вектора на ось. Координаты вектора

Рассмотрим вектор $\overline{AB}$ и ось Ox. Пусть точки A_1 и B_1 являются проекциями точек A и B на ось Ox. Рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$. Тогда *проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* Ox (она обозначается символом $\text{пр}_{Ox}\,\overline{AB}$) называется модуль вектора $\overline{A_1B_1}$, если $\overline{A_1B_1}$ и Ox направлены одинаково, и модуль вектора $\overline{A_1B_1}$, взятый со знаком «−», если они направлены противоположно, т.е.

$$\text{пр}_{Ox}\,\overline{AB} = \begin{cases} |\overline{AB}|, & \text{если } \overline{A_1B_1} \text{ и } Ox \text{ одинаково направлены;} \\ -|\overline{AB}|, & \text{если } \overline{A_1B_1} \text{ и } Ox \text{ противоположны.} \end{cases}$$

Если через φ обозначить угол между вектором и осью и он берется из диапазона $\varphi \in [0; \pi]$, то

$$\text{пр}_{Ox}\,\overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi. \tag{2.3}$$

Аналогичным образом определяется и *проекция вектора на вектор*.

Если же через x_A, x_B обозначить координаты проекций точек A, B на ось Ox соответственно, то

$$\text{пр}_{Ox}\,\overline{AB} = x_B - x_A. \qquad (2.4)$$

Важно отметить, что при линейных операциях над векторами, т.е. при их сложении или умножении вектора на число, соответствующие операции происходят и над их проекциями, т.е.

$$\text{пр}(\bar{a} \pm \bar{b}) = \text{пр}\,\bar{a} \pm \text{пр}\,\bar{b}, \quad \text{пр}(\lambda\bar{a}) = \lambda\,\text{пр}\,\bar{a}. \qquad (2.5)$$

Теперь рассмотрим в пространстве декартову систему координат и обозначим через a_x, a_y, a_z проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат. Оказывается, что вектор с точностью до параллельного переноса однозначно определяется своими проекциями. Другими словами, каждому вектору соответствует единственный набор этих проекций и каждой тройке проекций соответствует единственный вектор. Это дает основания отождествлять вектор с наборами своих проекций и писать $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Тогда, в частности,

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z) \quad \text{и} \quad \lambda\bar{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Исходя из перечисленных выше способов описания проекций, можно сформулировать и три способа задания векторов:

1) путем задания своих проекций, т.е. величин a_x, a_y, a_z;

2) путем задания модуля вектора $\bar{a}$ и его *направляющих косинусов*, т.е. величин $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, где α, β, γ — углы, которые образует вектор с осями координат. Действительно, в этом случае имеется возможность определить проекции вектора на оси выражениями $a_x = |\bar{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\bar{a}|\cos\beta$, $a_z = |\bar{a}|\cos\gamma$ и тем самым определить сам вектор;

3) путем задания координат начальной $A(x_A, y_A, z_A)$ и конечной $B(x_B, y_B, z_B)$ точек вектора. В этом случае проекции равны $a_x = x_B - x_A$, $a_y = y_B - y_A$, $a_z = z_B - z_A$ и вектор, следовательно, также становится определен.

Заметим, что в прямоугольной системе координат квадрат длины вектора всегда равен сумме квадратов своих проекций, т.е.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \qquad (2.6)$$

так как вектор является диагональю прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого являются a_x, a_y, a_z.

Итак, любой вектор $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ в декартовой прямоугольной системе координат можно представить в виде комбинации этих векторов и имеет место разложение

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \tag{2.7}$$

Пример 2.1. Найти координаты вектора $\bar{d}(-4; 7; 1)$ в базисе векторов $\bar{a}(1; 2; 3)$, $\bar{b}(-1; 2; 0)$, $\bar{c}(2; 1; 5)$.

Решение. Найдем координаты α, β, γ вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, представив $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$ в координатах:

$$-4\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 + \bar{e}_3 =$$
$$= \alpha(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3) + \beta(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \gamma(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 5\bar{e}_3) =$$
$$= (\alpha - \beta + 2\gamma)\bar{e}_1 + (2\alpha + \beta + \gamma)\bar{e}_2 + (3\alpha + 5\gamma)\bar{e}_3,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = -4, \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 7, \\ 3\alpha + 5\gamma = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы дает $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = -1$ — координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, т.е. $\bar{d} = 2\bar{a} + 4\bar{b} - \bar{c}$.

Ответ: $\bar{d} = 2\bar{a} + 4\bar{b} - \bar{c}$. □

§ 2.3. Скалярное произведение векторов

2.3.1. Определение скалярного произведения и его свойства

Определение 2.20. *Скалярным произведением* $\bar{a} \cdot \bar{b}$ двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}). \tag{2.8}$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

Если $\bar{a} = \bar{b}$, то $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$, так как $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{a}}) = 1$. Отсюда следует, что $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}$. Скалярное произведение

$\bar{a} \cdot \bar{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\bar{a}^2$. Следовательно,

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}\,.$$

Заметим, что иногда скалярное произведение обозначают через $(\bar{a}, \bar{b})$.

Свойства скалярного произведения:

1) скалярное произведение можно определить через проекцию векторов:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a}.$$

Действительно, $\text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$, но

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b}.$$

Отсюда можно получить также

$$\text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|};$$

2) коммутативность: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$. Это свойство очевидно, так как $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$;

3) ассоциативность относительно числового множителя λ:

$$(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b});$$

4) дистрибутивность относительно сложения векторов:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$

Доказательство.

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot (\text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c}) =$$
$$= |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$

Следствие.

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot \bar{d}.$$

2.3.2. Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов

Напомним, что два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *ортогональными*, если они образуют прямой угол, т.е. $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \pi/2$.

Теорема 2.1. Для того чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение обращалось в нуль.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны, тогда $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 0.$

Достаточность. Пусть $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$. Так как векторы ненулевые, то отсюда следует, что $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0$, а это и означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны.

2.3.3. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами

Пусть $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Очевидно, что

$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1, \quad \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{j}\cdot\bar{i} = 0,$$
$$\bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i} = 0, \quad \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{j} = 0.$$

В силу свойства 4 получим

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = \\ = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

В частности,

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

2.3.4. Угол между двумя векторами

Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — ненулевые векторы, то, принимая во внимание определение вектора и п. 4, получим такое выражение для угла $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \arccos\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \\ = \arccos\frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.9)$$

Отсюда нетрудно получить *условие ортогональности* (*перпендикулярности*) двух векторов в координатной форме:

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0. \qquad (2.10)$$

2.3.5. Механический смысл скалярного произведения

Если $\bar{F}$ — сила, действующая при перемещении $\bar{S}$, то работа A этой силы на указанном перемещении, как известно, равна $|\bar{F}|\cdot|\bar{S}|\cos(\widehat{\bar{F},\bar{S}})$, т.е. $A=\bar{F}\cdot\bar{S}$ (рис. 2.4).

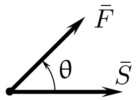

Рис. 2.4

Пример 2.2. Даны три точки $A(2;3;5)$, $B(1;2;3)$, $C(3;5;4)$. Найти $\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB}$ и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

Решение. а) $\overline{AB}=\{-1;-1;-3\}$, $\overline{BC}=$ $=\{2;3;2\}$.

$$\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB}=|\overline{AB}|\cdot\cos(\widehat{\overline{AB},\overline{BC}})=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|}=$$

$$=\frac{(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 3+(-3)\cdot 2}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=-\frac{11}{\sqrt{17}}.$$

б) $\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{11}}$, $\cos\beta=\dfrac{-1}{\sqrt{11}}$, $\cos\gamma=\dfrac{-3}{\sqrt{17}}$. □

Пример 2.3. Дан вектор $\bar{a}=\bar{m}+\bar{n}$, $|\bar{m}|=|\bar{n}|=2$, $(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=$ $=\pi/3$. Найти длину вектора $\bar{a}$.

Решение. Найдем скалярный квадрат вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a}^2=(\bar{m}+\bar{n})\cdot(\bar{m}+\bar{n}).$$

Раскроем скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$(\bar{m}+\bar{n})\cdot(\bar{m}+\bar{n})=\bar{m}^2+\bar{n}\cdot\bar{m}+\bar{m}\cdot\bar{n}+\bar{n}^2=$$

$$=\bar{m}^2+2\bar{m}\cdot\bar{n}+\bar{n}^2=|\bar{m}|^2+2|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos(\widehat{\bar{m},\bar{n}})+|\bar{n}|^2=$$

$$4+2\cdot 2\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}+4=12;\quad |\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}=\sqrt{12}.$$ □

Пример 2.4. При каком значении α векторы $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+\alpha\bar{j}+2\bar{k}$ ортогональны?

Решение. Принимая во внимание условие ортогональности двух векторов $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$, получим $1\cdot 2+$ $+2\cdot\alpha+1\cdot 2=0$. Следовательно, $\alpha=-2$. □

§ 2.4. Векторное произведение векторов

2.4.1. Определение векторного произведения и его свойства

Определение 2.21. *Векторным произведением* $\bar{a} \times \bar{b}$ ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет трем условиям:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$, т.е. длина вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах;

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая (рис. 2.5).

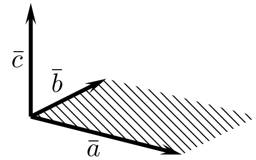

Рис. 2.5

Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ нулевой, то по определению $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Заметим, что иногда векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом $[\bar{a}; \bar{b}]$.

Свойства векторного произведения:

1) коммутативность: $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$. Это очевидно, так как при перестановке векторов изменится ориентация тройки;

2) ассоциативность относительно числового множителя λ: $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$;

3) дистрибутивность относительно сложения векторов:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}.$$

Следствие.

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{d} + \bar{b} \times \bar{d}.$$

Другими словами, скобки можно раскрывать как при обыкновенном умножении, не переставляя при этом местами сомножители.

2.4.2. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух ненулевых векторов

Теорема 2.2. Для того чтобы два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, тогда они лежат на одной прямой, следовательно, $\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\bar{a} \times \bar{b}| = 0$. Значит, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Достаточность. Пусть векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$. Так как $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$, то значит $\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0$, т.е. $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0$ или $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \pi$, а это означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Замечание. Если два вектора $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ коллинеарны, то существует такое число λ, при котором $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, т.е.

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \lambda(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} a_x &= \lambda b_x \\ a_y &= \lambda b_y \\ a_z &= \lambda b_z \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Итак, мы доказали, что если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны (признак коллинеарности векторов).

2.4.3. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами

Заметим, что $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$. Далее очевидно, что $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$, $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$, $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{i} \times \bar{j} = -\bar{k}$.

Применяя свойство 3, перемножим векторно векторы $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= a_xb_x\bar{i} \times \bar{i} + a_yb_x\bar{j} \times \bar{i} + a_zb_x\bar{k} \times \bar{i} + a_xb_y\bar{i} \times \bar{j} + a_yb_y\bar{j} \times \bar{j} +$$

$$+ a_zb_y\bar{k} \times \bar{j} + a_xb_z\bar{i} \times \bar{k} + a_yb_z\bar{j} \times \bar{k} + a_zb_z\bar{k} \times \bar{k} =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2.11)$$

2.4.4. Механический смысл векторного произведения

Если сила $\bar{F}$ поворачивает тело вокруг оси l, то момент $\bar{M}$ силы $\bar{F}$, как известно, равен $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$ (рис. 2.6).

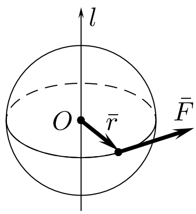

Рис. 2.6

Пример 2.5. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;1;2)$, $B(2;3;2)$ и $C(1;2;-1)$.

Решение. $\overline{AB}(3;2;0)$, $\overline{AC}(2;1;-3)$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\bar{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2}\bar{j} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\bar{k} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6\bar{i} + 9\bar{j} - \bar{k};$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-1)^2} = \sqrt{118}\,.$$

Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, следовательно, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{118}\,/2$.

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{118}\,/2$ кв. ед. □

Пример 2.6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 3$, $\varphi = (\widehat{\bar{p},\bar{q}}) = 3\pi/4$.

Решение. Искомая площадь равна $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$. Отсюда

$$S = |(3\bar{p} + 2\bar{q}) \times (2\bar{p} - \bar{q})| =$$

$$= |3\bar{p} \times 2\bar{p} - 3\bar{p} \times \bar{q} + 2\bar{q} \times 2\bar{p} - 2\bar{q} \times \bar{q}| =$$

$$= \langle \text{т.к. } \bar{p} \times \bar{p} = \bar{q} \times \bar{q} = 0,\ \bar{p} \times \bar{q} = -\bar{q} \times \bar{p} \rangle = 7|\bar{p} \times \bar{q}| =$$

$$= 7|\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \sin(\widehat{\bar{p},\bar{q}}) = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = 84 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}\,.$$

Ответ: $S = 42\sqrt{2}$ кв. ед. □

§ 2.5. Смешанное произведение трех векторов

2.5.1. Определение смешанного произведения

Определение 2.22. *Смешанным произведением* ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется скалярное произведение вектора $\bar{a}$ и векторного произведения вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, т.е. выражение $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

2.5.2. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов

Теорема 2.3. Для того чтобы ненулевые векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны. Тогда их можно поместить в одной плоскости, и вектор $\bar{b} \times \bar{c}$ окажется перпендикулярным вектору $\bar{a}$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$.

Достаточность. Пусть $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$. Так как векторы ненулевые, то может быть:

1) $\bar{b} \times \bar{c} = \bar{0}$, тогда $\bar{b} = \lambda\bar{c}$, следовательно, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ можно поместить в одной плоскости, т.е. они компланарны;

2) $\bar{b} \times \bar{c} \neq \bar{0}$, но $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} \perp (\bar{b} \times \bar{c})$. Это значит, что вектор $\bar{a}$ лежит в одной плоскости с векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

2.5.3. Геометрический смысл смешанного произведения

Предположим, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарны. Построим параллелепипед на этих векторах, принимая за основание параллелограмм, построенный на векторах $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 2.7).

1. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая тройка. Тогда угол между векторами $\bar{a}$ и $(\bar{b} \times \bar{c})$ острый, т.е. векторы $\bar{a}$ и $(\bar{b} \times \bar{c})$ лежат в одном полупространстве относительно плоскости, которая проходит через векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Очевидно, что

$|\bar a|\cdot\cos(\widehat{\bar a, (\bar b\times\bar c)}) = \text{пр}_{\bar b\times\bar c}\,\bar a = h$ дает нам высоту параллелепипеда, следовательно, $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$ есть не что иное, как объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$.

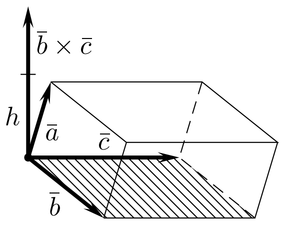

Рис. 2.7

2. Если $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ — левая тройка, то векторы $\bar a$ и $(\bar b\times\bar c)$ будут лежать в разных полупространствах, а тогда $|\bar a|\cdot\cos(\widehat{\bar a, (\bar b\times\bar c)}) = -h$, следовательно, $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$ будет равно объему параллелепипеда, взятому со знаком минус.

Итак, объем параллелепипеда равен

$$V = \pm\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) \quad \text{или} \quad V = |\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)|. \tag{2.12}$$

Вывод: абсолютная величина смешанного произведения трех ненулевых векторов дает нам объем параллелепипеда, построенного на этих векторах.

2.5.4. Свойства смешанного произведения

1. $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = \bar b\cdot(\bar c\times\bar a) = \bar c\cdot(\bar a\times\bar b)$, т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке перемножаемых векторов.

Действительно, каждое произведение имеет один и тот же модуль в силу геометрического смысла смешанного произведения. Знаки их также совпадают, так как ориентация тройки не меняется при циклической перестановке векторов.

2. $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = -\bar a\cdot(\bar c\times\bar b)$.

Действительно, при перестановке двух соседних векторов модуль смешанного произведения не меняется, а знак меняется на противоположный, так как тройка меняет свою ориентацию.

3. $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = \bar c\cdot(\bar a\times\bar b) = (\bar a\times\bar b)\cdot\bar c$.

Действительно, в силу первого свойства $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = \bar c\cdot(\bar a\times\bar b)$. С другой стороны, $\bar c\cdot(\bar a\times\bar b) = (\bar a\times\bar b)\cdot\bar c$, откуда и следует окончательно $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = (\bar a\times\bar b)\cdot\bar c$. Поэтому иногда смешанное произведение обозначают $(\bar a, \bar b, \bar c)$.

4. Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

Действительно,

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (a_x, a_y, a_z) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right) =$$

$$= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 2.7. В пространстве даны точки $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$ и $D(2;4;7)$. Найти объем треугольной пирамиды (тетраэдра) $ABCD$ и длину высоты DE.

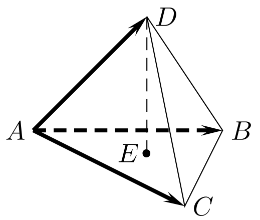

Рис. 2.8

Решение. Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A: $\overline{AB}(3;3;3)$, $\overline{AC}(2;4;4)$, $\overline{AD}(1;3;6)$. Вычислим смешанное произведение этих трех векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

С одной стороны, $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}}$ (как известно из школьного курса геометрии). С другой стороны, $V_{\text{пар-да}} = |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$ (геометрический смысл смешанного произведения векторов). Тогда

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3 \text{ куб. ед.}$$

Определим теперь площадь S грани ABC. Имеем $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$. Найдем координаты векторного произведения двух векторов:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0\bar{i} - 6\bar{j} + 6\bar{k},$$

тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-6)^2 + 6^2} = 3\sqrt{2} \text{ кв. ед.}$$

Учтем теперь, что $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot DE$, где DE — высота тетраэдра, опущенная из вершины D. Отсюда

$$DE = \frac{3V_{\text{тетр}}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 3}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ед.}$$

Ответ: $V_{\text{тетр}} = 3$ куб. ед; $h = DE = 3\sqrt{2}/2$ ед. □

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$ и $\overline{CM}$ направлены по медианам. Выразить их через векторы $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$.

Ответ: $\overline{AK} = (\bar{a} + \bar{b})/2$; $\overline{BL} = (\bar{b} - \bar{a})/2$; $\overline{CM} = (\bar{a} - \bar{b})/2$.

2. Даны три вектора $\bar{a}(3; -2)$, $\bar{b}(-2; 1)$, $\bar{c}(7; -4)$. Определить коэффициенты разложения каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

Ответ: $\bar{a} = 2\bar{b} + \bar{c}$; $\bar{b} = (\bar{a} - \bar{c})/2$; $\bar{c} = \bar{a} - 2\bar{b}$.

3. Векторы $\overline{AB}(1; 3)$ и $\overline{AC}(2; 1)$ совпадают со сторонами треугольника. Определить координаты векторов $\overline{AM_1}$, $\overline{BM_2}$, $\overline{CM_3}$, совпадающих с его медианами.

Ответ: $\overline{AM_1}(3/2; 2)$; $\overline{BM_2}(0; -5/2)$; $\overline{CM_3}(-3/2; 1/2)$.

4. Даны три вершины параллелограмма $A(2; 5; 4)$, $B(0; 1; 0)$ и $C(4; 1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D.

Ответ: $D(6; 5; 7)$.

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны координаты четырех вершин $A(2; -1; 1)$, $B(1; 3; 4)$, $A_1(4; 2; 0)$, $D(6; 0; 1)$. Найти координаты остальных вершин.

Ответ: $B_1(3; 6; 2)$, $C_1(7; 7; 3)$, $D_1(8; 3; 0)$, $C(5; 4; 4)$.

6. Даны координаты вершин треугольника $A(2; 1; \sqrt{2})$, $B(1; 0; 0)$ и $C(1 + \sqrt{3}; \sqrt{3}; -\sqrt{6})$. Найти углы треугольника.

Ответ: 30°, 60°, 90°.

7. Пользуясь векторным произведением, вычислить площадь треугольника ABC, если $A(2;1;0)$, $B(-3;-6;4)$, $C(-2;4;1)$.

Ответ: $\sqrt{2331}/2$.

8. Вычислить синус угла A треугольника ABC, если $A(3;4;1)$, $B(2;1;6)$, $C(4;0;2)$.

Ответ: $\sin\angle A = \sqrt{187/315}$.

9. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;-1)$, $B(5;-1;2)$, $C(3;0;-3)$, $D(6;0;-1)$.

Ответ: $V = 0{,}5$ куб. ед.

10. Найти длину высоты AH тетраэдра $ABCD$, вершины которого находятся в точках $A(2;-4;5)$, $B(-1;-3;4)$, $C(5;5;-1)$, $D(1;-2;2)$.

Ответ: $AH = 3$ ед.

Глава 3
Линейные пространства и операторы

Линейное (или векторное) пространство является основным предметом изучения линейной алгебры. Первые работы относятся к XVIII в. (Декарт, Ферма), а современное их определение принадлежит Пеано (1888 г.). Широко используются в различных разделах математики.

§ 3.1. Линейное пространство. Базис. Размерность

3.1.1. Определение линейного пространства

Определение 3.1. Множество L элементов $\bar{x}$, $\bar{y}$, ... , $\bar{z}$ называется *линейным пространством*, если:

1) для любых двух элементов $\bar{x} \in L$ и $\bar{y} \in L$ определена операция сложения этих элементов, т.е. дано правило нахождения элемента линейного пространства L, называемого их *суммой* и обозначаемого $\bar{x} + \bar{y}$;

2) для любого элемента $\bar{x} \in L$ и любого числа α — вещественного или комплексного — определена операция умножения элемента $\bar{x}$ на число α, т.е. дано правило нахождения элемента линейного пространства L, называемого *произведением* элемента $\bar{x}$ на число α и обозначаемого $\alpha \cdot \bar{x}$;

3) определено равенство элементов из L, обозначаемое знаком =;

4) операции сложения и умножения на число удовлетворяют условиям:

а) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (коммутативность сложения);

б) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (ассоциативность сложения);

в) $\alpha(\beta \cdot \bar{x}) = (\alpha\beta) \cdot \bar{x}$ (ассоциативность умножения на число);

г) $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y}$ (дистрибутивность умножения по отношению к сложению чисел);

д) $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$ (дистрибутивность умножения на число по отношению к сложению элементов из L);

е) существует элемент $\bar{0}$, называемый *нулевым* и такой, что для любого элемента $\bar{x} \in L \quad \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$;

ж) для любого элемента $\bar{x} \in L$ имеет место равенство $\bar{x} \cdot 1 = 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$;

з) для любого элемента $\bar{x}$ существует элемент $-\bar{x}$, называемый *противоположным* элементу $\bar{x}$ и такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$.

Заметим, что если произведение $\alpha\bar{x}$ определено только для вещественных чисел, то пространство L называется *вещественным линейным пространством*, если же α — комплексное число, то линейное пространство L называется *комплексным линейным пространством*.

Свойства линейного пространства:

1) в каждом линейном пространстве существует единственный элемент $\bar{0}$;

2) в каждом линейном пространстве любому элементу соответствует единственный противоположный элемент;

3) для всякого элемента $\bar{x} \in L$ справедливо равенство $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$. Произведение любого числа α на нулевой элемент линейного пространства равно нулевому элементу, т.е. $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$;

4) для каждого элемента $\bar{x} \in L$ противоположный элемент равен произведению этого элемента на число -1, т.е. $-\bar{x} = (-1) \cdot \bar{x}$.

3.1.2. Базис линейного пространства и координаты вектора. Размерность линейного пространства

Пусть векторы (элементы) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ принадлежат линейному пространству L и пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ какие-то произвольные числа.

Выражение $c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \ldots + c_n\bar{a}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* (элементов) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, а числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — *коэффициентами этой линейной комбинации*.

Определение 3.2. Векторы (элементы) $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если

$$c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + ... + c_n\bar{a}_n = \bar{0}, \tag{3.1}$$

при условии, что не все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю; если же соотношение (3.5) выполняется лишь при условии, что $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Нетрудно показать, что если векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных и наоборот; кроме того, если векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ линейно независимы, то ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных и наоборот.

Определение 3.3. Любая совокупность n линейно независимых векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$ линейного пространства L называется *базисом* этого пространства, если всякий вектор $\bar{x} \in L$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$, т.е. $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$.

Такое представление вектора $\bar{x}$ называется *разложением по данному базису*. Числа x_1, x_2, ... , x_n, которые являются коэффициентами в разложении вектора по данному базису, называются *координатами вектора в этом базисе* и записываются так: $\bar{x} = (x_1, x_2, ... , x_n)$, или $[x_1, x_2, ... , x_n]$, или в виде матрицы-столбца

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Координаты вектора $\bar{x} \in L$ относительно некоторого базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$ этого линейного пространства определяются единственным образом.

Определение 3.4. Говорят, что линейное пространство имеет *размерность*, равную n, если n — число базисных векторов; пространство при этом обозначают L^n.

Введенное ранее линейное пространство с базисом $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — пространство обычных векторов — обозначают R^3 и называют *геометрическим пространством*, или *координатным пространством*. Понятие геометрического (координатного) пространства можно обобщить в смысле увеличения его размерности, т.е. можно рассматривать геометрическое (координатное) пространство R^n.

В заключение заметим, что если базис состоит из конечного числа элементов, то такое линейное пространство называется *конечномерным*, если же существует бесконечно много линейно независимых векторов, то такое линейное пространство называется *бесконечномерным*. Примером бесконечномерного пространства может служить пространство всевозможных функций, непрерывных на данном промежутке, линейные операции в котором определяются обычным образом.

§ 3.2. Евклидово пространство E^n

3.2.1. Определение евклидова пространства

Определение 3.5. Вещественное линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем определена операция, ставящая в соответствие любым двум векторам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из этого пространства число, называемое *скалярным произведением* векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и обозначаемое $(\bar{x}, \bar{y})$, для которого выполнены условия:

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;

2) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$, где $\bar{z}$ — любой вектор, принадлежащий данному линейному пространству;

3) $(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, где α — любое число;

4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geqslant 0$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$.

Например, в линейном пространстве одностолбцовых матриц скалярное произведение векторов

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

можно определить формулой

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Евклидово пространство размерности n обозначают E^n. Заметим, что существуют как конечномерные, так и бесконечномерные евклидовы пространства.

Определение 3.6. *Длиной* (*модулем*) вектора $\bar{x}$ в евклидовом пространстве E^n называют $\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ и обозначают ее так: $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$.

Очевидно, что у всякого вектора евклидова пространства существует длина, причем у нулевого вектора она равна нулю.

Умножая ненулевой вектор $\bar{x}$ на число $\alpha = 1/|\bar{x}|$, мы получим вектор $\bar{x}^0 = \bar{x}/|\bar{x}|$, длина которого равна единице. Эта операция называется *нормированием вектора* $\bar{x}$.

Например, в пространстве одностолбцовых матриц длину вектора $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ можно определить формулой

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

3.2.2. Неравенство Коши—Буняковского

Пусть $\bar{x} \in E^n$ и $\bar{y} \in E^n$ — любые два вектора. Для них имеет место *неравенство Коши—Буняковского*:

$$|(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|.$$

3.2.3. Неравенство треугольника

Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — произвольные векторы евклидова пространства E^n, т.е. $\bar{x} \in E^n$ и $\bar{y} \in E^n$. Для них имеет место *неравенство треугольника*:

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leqslant |\bar{x}| + |\bar{y}|.$$

3.2.4. Норма евклидова пространства

Определение 3.7. Линейное пространство L называется *метрическим*, если любым двум элементам этого пространства $\bar{x}$ и $\bar{y}$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(\bar{x}, \bar{y})$, называемое *расстоянием* между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ($\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant 0$), причем выполняются условия (аксиомы):

1) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}$;

2) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$ (симметрия);

3) для любых трех векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ этого пространства $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{x}, \bar{z}) + \rho(\bar{z}, \bar{y})$.

Замечание. Элементы метрического пространства обычно называют *точками*.

Очевидно, что евклидово пространство E^n — метрическое, причем в качестве расстояния между векторами $\bar{x} \in E^n$ и $\bar{y} \in E^n$ можно взять $|\bar{x} - \bar{y}|$. Так, например, в пространстве одностолбцовых матриц, где

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

получим

$$\bar{x} - \bar{y} = (x_1 - y_1 \;\; x_2 - y_2 \;\; ... \;\; x_n - y_n)^T,$$

следовательно,

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}\,. \qquad (3.2)$$

Определение 3.8. Линейное пространство L называется *нормированным*, если каждому вектору $\bar{x}$ из этого пространства поставлено в соответствие неотрицательное число, называемое его *нормой* $\|\bar{x}\|$. При этом выполняются аксиомы:

1) $\|\bar{x}\| \geqslant 0 \; \forall \, \bar{x} \in L$; $\|\bar{x}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \bar{x} = \bar{0}$;

2) $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ для $\forall \, \bar{x} \in L$ и любого числа λ;

3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leqslant \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ для $\forall \, \bar{x} \in L$ и $\forall \, \bar{y} \in L$ (неравенство треугольника).

Нетрудно видеть, что нормированное пространство является метрическим пространством. В самом деле, в качестве расстояния между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ можно взять $\|\bar{x} - \bar{y}\|$. В евклидовом пространстве E^n в качестве нормы любого вектора $\bar{x} \in E^n$ принимается его длина, т.е. $\|\bar{x}\| = |\bar{x}|$. Нетрудно убедиться, что все аксиомы нормы выполняются для выбранной таким образом нормы евклидова пространства E^n.

Итак, евклидово пространство E^n является метрическим пространством и, более того, евклидово пространство E^n является нормированным пространством.

3.2.5. Угол между векторами

Заметим, что из неравенства Коши—Буняковского следует, что

$$\frac{|(\bar{x},\bar{y})|}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|} \leqslant 1 \quad (\bar{x}\neq\bar{0},\ \bar{y}\neq\bar{0}).$$

Определение 3.9. *Углом* между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ евклидова пространства E^n называют число $\varphi\in[0;\pi]$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}. \tag{3.3}$$

Определение 3.10. Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ евклидова пространства E называются *ортогональными*, если для них выполняется равенство $(\bar{x},\bar{y})=0$.

Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — ненулевые, то из последнего определения следует, что угол между ними равен $\pi/2$. Заметим, что нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.

Пример 3.1. В геометрическом (координатном) пространстве R^3, которое является частным случаем евклидова пространства, орты $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ взаимно ортогональны.

3.2.6. Ортонормированный базис

Определение 3.11. Базис $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ евклидова пространства E^n называется *ортогональным*, если векторы этого базиса попарно ортогональны, т.е. если $(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=0$ $(i\neq j;\ i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$.

Определение 3.12. Если все векторы ортогонального базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ единичны, т.е. $|\bar{e}_i|=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, то базис называется *ортонормированным*, т.е. для ортонормированного базиса

$$(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=\begin{cases}0, & i\neq i,\\ 1, & i=j\end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n).$$

Теорема 3.2 (о построении ортонормированного базиса). Во всяком евклидовом пространстве E^n существуют ортонормированные базисы.

Итак, если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ — ортонормированный базис в E^n, то для любого вектора $\bar{x} \in E^n$ имеет место единственное разложение

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n, \tag{3.4}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\bar{x}$ в этом ортонормированном базисе.

В дальнейшем мы будем рассматривать только ортонормированные базисы.

§ 3.3. Линейные операторы и действия над ними. Матрица линейного оператора

3.3.1. Линейный оператор. Матрица линейного оператора

Определение 3.13. Если задан закон, который каждому вектору $\bar{x} \in L$ ставит в соответствие вектор $\bar{y} \in L$, то говорят, что в линейном пространстве L задан *оператор* A, при этом пишут

$$\bar{y} = A\bar{x}. \tag{3.5}$$

Определение 3.14. Оператор A называется *линейным*, если для любых $\bar{x}_1 \in L$ и $\bar{x}_2 \in L$ и произвольного числа α выполняются условия:

1) $A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2$;
2) $A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x}$.

Рассмотрим теперь в евклидовом пространстве E^n базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, и пусть в этом пространстве определен линейный оператор A: $\bar{y} = A\bar{x}$. Разложим векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n, \tag{3.6}$$

$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \ldots + y_n\bar{e}_n. \tag{3.7}$$

В силу линейности оператора A можно написать

$$A\bar{x} = x_1A\bar{e}_1 + x_2A\bar{e}_2 + \ldots + x_nA\bar{e}_n.$$

Заметим, что каждый вектор $A\bar{e}_i \in E^n$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, следовательно, его также можно разложить по базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$, т.е.

$$A\bar{e}_i = a_{1i}\bar{e}_1 + a_{2i}\bar{e}_2 + \dots + a_{ni}\bar{e}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{y} = A\bar{x} &= x_1(a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n) + \\ &+ x_2(a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{n2}\bar{e}_n) + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ x_n(a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\bar{e}_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\bar{e}_2 + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)\bar{e}_n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу единственности разложения по данному базису мы можем приравнять коэффициенты при базисных векторах в правых частях формул (3.7) и (3.8); тогда получим:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Итак, линейному оператору A в данном базисе соответствует квадратная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей линейного оператора* A, i-й столбец которой состоит из координат вектора $A\bar{e}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ относительно данного базиса. Отметим, что матрица $\mathbf{A}$ оператора A зависит от выбора базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ пространства L^n.

Введем теперь в рассмотрение одностолбцовые матрицы

$$\mathbf{X} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)^T,$$

соответствующие векторам $\bar{x} \in E^n$ и $\bar{y} \in E^n$. Тогда соотношения (3.9) в матричном виде можно записать так:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}.$$

Итак, мы показали, что всякому линейному оператору A в евклидовом пространстве E^n соответствует матрица $\mathbf{A}$. Можно доказать и обратное утверждение: всякую квадратную матрицу $\mathbf{A}$ можно рассматривать как матрицу некоторого линейного оператора A в данном базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$.

Представляют интерес невырожденные линейные операторы, т.е. такие операторы, матрицы которых имеют обратную $\mathbf{A}^{-1}$, т.е. также являются невырожденными. В этом случае каждому вектору $\bar{y}$ (*образу*), определенному соотношением (3.5), отвечает единственный вектор $\bar{x}$ (*прообраз*) и при этом имеет место матричное равенство $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$.

3.3.2. Действия над операторами

1. Сложение линейных операторов. Пусть $\bar{x} \in E^n$, A и B — два линейных оператора в этом пространстве.

Определение 3.15. *Суммой линейных операторов A и B* в E^n называется оператор C, определяемый равенством $Cx = Ax + Bx$, где $\bar{x}$ — любой вектор из E^n.

Очевидно, что сумма линейных операторов является линейным оператором, причем его матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы линейных операторов A и B.

2. Умножение линейного оператора на число. Пусть $\bar{x} \in E^n$, линейный оператор A определен в E^n, α — некоторое число.

Определение 3.16. *Произведением линейного оператора A на число* α называется оператор αA, определяемый равенством $(\alpha A)\bar{x} = \alpha(A\bar{x})$, $\forall\, \bar{x} \in E^n$.

Очевидно, что αA является линейным оператором, а матрица этого линейного оператора получается из матрицы $\mathbf{A}$ умножением ее на число α, т.е. она равна $\alpha \cdot \mathbf{A}$.

3. Умножение линейных операторов. Пусть $\bar{x} \in E^n$, $\bar{y} \in E^n$, $\bar{z} \in E^n$ и, кроме того, в E^n определены линейные операторы A и B таким образом, что $\bar{y} = B\bar{x}$, $\bar{z} = A\bar{y}$.

Определение 3.17. *Произведением* $A \cdot B$ *линейных операторов* A *и* B называется оператор C, определяемый соотношением $C\bar{x} = A(B\bar{x})$.

Таким образом, перемножение линейных операторов состоит в последовательном их применении по отношению к вектору $\bar{x}$.

Рассмотрим матрицы-столбцы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$$

и обозначим через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно матрицы линейных операторов A, B и C. Тогда очевидно, что $\mathbf{Z} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$. Таким образом, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, т.е. произведение матриц линейных операторов также является матрицей линейного оператора. Действительно:

а) $(A \cdot B)(\bar{x} + \bar{y}) = A(B(\bar{x} + \bar{y})) = A(B\bar{x} + B\bar{y}) = A(B\bar{x}) + A(B\bar{y}) = (A \cdot B)\bar{x} + (A \cdot B)\bar{y}$;

б) $(A \cdot B)(\alpha\bar{x}) = A(B(\alpha\bar{x})) = A(\alpha B\bar{x}) = \alpha A(B\bar{x}) = \alpha(A \cdot B)\bar{x}$.

Отсюда следует, что свойства умножения линейных операторов вытекают из свойств умножения матриц.

§ 3.4. Замена базиса

3.4.1. Матрица преобразования координат

Возьмем в пространстве E^n два различных базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$ и $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, ... , $\bar{E}_n$. Рассуждение проведем для случая $n = 3$.

Очевидно, что один и тот же вектор $\bar{x}$ относительно различных базисов имеет различные координаты. Действительно, ограничиваясь случаем $n = 3$, можем написать:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3, \tag{3.10}$$

$$\bar{x} = x'_1\bar{E}_1 + x'_2\bar{E}_2 + x'_3\bar{E}_3. \tag{3.11}$$

Любой вектор второго базиса можем разложить по первому базису, т.е.

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \tau_{11}\bar{e}_1 + \tau_{21}\bar{e}_2 + \tau_{31}\bar{e}_3, \\ \bar{E}_2 &= \tau_{12}\bar{e}_1 + \tau_{22}\bar{e}_2 + \tau_{32}\bar{e}_3, \\ \bar{E}_3 &= \tau_{13}\bar{e}_1 + \tau_{23}\bar{e}_2 + \tau_{33}\bar{e}_3. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Подставим (3.12) в (3.11):

$$\begin{gathered} \bar{x} = x_1'(\tau_{11}\bar{e}_1 + \tau_{21}\bar{e}_2 + \tau_{31}\bar{e}_3) + x_2'(\tau_{12}\bar{e}_1 + \tau_{22}\bar{e}_2 + \tau_{32}\bar{e}_3) + \\ + x_3'(\tau_{13}\bar{e}_1 + \tau_{23}\bar{e}_2 + \tau_{33}\bar{e}_3) = (\tau_{11}x_1' + \tau_{12}x_2' + \tau_{13}x_3')\bar{e}_1 + \\ + (\tau_{21}x_1' + \tau_{22}x_2' + \tau_{23}x_3')\bar{e}_2 + (\tau_{31}x_1' + \tau_{32}x_2' + \tau_{33}x_3')\bar{e}_3. \end{gathered} \tag{3.13}$$

В силу единственности разложения по данному базису мы должны приравнять коэффициенты при векторах $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ в правых частях формул (3.10) и (3.13). Тогда получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_{11}x_1' + \tau_{12}x_2' + \tau_{13}x_3', \\ x_2 &= \tau_{21}x_1' + \tau_{22}x_2' + \tau_{23}x_3', \\ x_3 &= \tau_{31}x_1' + \tau_{32}x_2' + \tau_{33}x_3'. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения (3.14) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'.$$

Матрица $\mathbf{T}$ называется *матрицей преобразования координат* при переходе от старого базиса к новому, т.е. от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$ к базису $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, ... , $\bar{E}_n$. Причем столбцами матрицы преобразования координат являются координаты вектора нового базиса $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, ... , $\bar{E}_n$ относительно старого базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$.

3.4.2. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть в пространстве E^n определен линейный оператор A, т.е. $\bar{y} = A\bar{x}$ или

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \tag{3.15}$$

где $\mathbf{Y} = (y_1\ y_2\ ...\ y_n)^T$, $\mathbf{X} = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)^T$ — матрицы-столбцы, составленные из координат векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ относительно данного базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$; $\mathbf{A}$ — матрица линейного оператора A.

Выберем в том же пространстве E^n другой базис $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, ..., $\bar{E}_n$. Относительно нового базиса матрица линейного оператора A будет иной. Обозначим через $\mathbf{T}$ матрицу преобразования координат, а через $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{Y}'$ — одностолбцовые матрицы, составленные из координат векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ относительно нового базиса, т.е.

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}', \tag{3.16}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}'. \tag{3.17}$$

Подставим (3.16) и (3.17) в (3.15), тогда получим

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'. \tag{3.18}$$

Умножая левую и правую части равенства (3.18) слева на $\mathbf{T}^{-1}$, получим

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'. \tag{3.19}$$

Если к тому же $\mathbf{T}$ — ортогональная матрица, т.е. осуществляет переход от одного ортонормированного базиса к другому, то

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'. \tag{3.20}$$

Итак, если в E^n перейти к новому базису, то матрица линейного оператора также изменится и в самом общем случае будет равна $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$.

§ 3.5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть A — линейный оператор. Пусть $\bar{x} \in E_1^n$, где E_1^n — некоторое подпространство пространства E^n. Вектор $\bar{y} = A\bar{x}$ может принадлежать подпространству E_1^n, а может и не принадлежать.

Определение 3.18. Ненулевой вектор $\bar{x}$ называется *собственным вектором линейного оператора* A, если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство

$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. При этом число λ называют *собственным значением* (*собственным числом*) *оператора* A, соответствующим вектору $\bar{x}$.

Остановимся на отыскании собственных значений и собственных векторов линейного оператора A. Рассмотрение проведем для случая $n = 3$.

Итак, пусть в некотором базисе оператор A имеет матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и пусть одностолбцовая матрица $\mathbf{X} = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ соответствует вектору $\bar{x}$. Тогда в силу определения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{X} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = 0. \tag{3.21}$$

Итак, дело свелось к решению системы линейных однородных уравнений, записанной в матричном виде. Очевидно, что эта система имеет ненулевое решение, если $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Уравнение $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ называется *характеристическим* или *вековым уравнением* оператора A; многочлен $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ называется соответственно *характеристическим многочленом* оператора A. В координатной форме характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.22}$$

Решив его, найдем λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения линейного оператора.

После того как найдены собственные значения линейного оператора A, остается подставить их по очереди в уравнение (3.21) и найти соответствующие собственные векторы $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$, $\bar{x}^{(3)}$.

Пример 3.2. Найти собственные значения и собственные числа линейного оператора, матрица которого

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В силу определения собственного вектора можем написать $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}-\lambda\mathbf{X} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=0$, где $\mathbf{X}= (x_1\ x_2)^T$ — матрица-столбец, соответствующая искомому вектору $\bar{x}$ линейного оператора A. В матричной форме получим

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Система однородная, следовательно, она имеет бесчисленное множество решений, если определитель системы равен нулю, т.е. имеем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Решая его, найдем собственные значения $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$.

Найдем соответствующие собственные векторы.

1. $\lambda_1=-1$ подставим в (3.23), получим

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x_1^{(1)}+x_2^{(1)}=0 \quad\Rightarrow\quad x_1^{(1)}=-x_2^{(1)}=t^{(1)},$$

где $t^{(1)}$ — некоторый параметр. Таким образом, имеем множество коллинеарных векторов, соответствующих первому собственному числу $\lambda_1=-1$: $\bar{X}^{(1)}=(t^{(1)}\quad -t^{(1)})^T$. Этот вектор нетрудно пронормировать, тогда мы получим единичный собственный вектор, соответствующий первому собственному числу $\lambda_1=-1$, т.е.

$$\bar{X}^{(10)}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_2=3$ подставим в (3.23), получим

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x_1^{(2)}-x_2^{(2)}=0 \quad\Rightarrow\quad x_1^{(2)}=x_2^{(2)}=t^{(2)},$$

т.е.

$$\bar{X}^{(2)}=\begin{pmatrix} t^{(2)} \\ t^{(2)} \end{pmatrix},\quad \bar{X}^{(20)}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

□

§ 3.6. Квадратичные формы

3.6.1. Квадратичные формы и приведение их к каноническому виду

Пусть в вещественном пространстве E^n выбран произвольный базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, в котором некоторый вектор $\bar{x} \in E^n$ имеет координаты $x_1, x_2, \dots, \bar{x}_2$. Тогда этому вектору можно поставить в соответствие одностолбцовую матрицу $\mathbf{X} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$.

Определение 3.19. Выражение вида

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &\quad + a_{nn}x^n, \end{aligned} \tag{3.24}$$

содержащее в качестве слагаемых только квадраты координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ и все их попарные произведения, называется *квадратичной формой* координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, а числа a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ — *коэффициентами квадратичной формы*.

Положим $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, тогда квадратичную форму (3.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \dots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов этой квадратичной формы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ называется *матрицей квадратичной формы*. Очевидно, что она симметрична относительно главной диагонали и квадратичную форму (3.24) в матричном виде можно записать так:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}. \qquad (3.25)$$

Оператор A, имеющий матрицу $\mathbf{A}$, самосопряженный. Допустим, что оператор A имеет n различных собственных значений λ_1, λ_2, ..., λ_n, которым соответствуют n взаимно ортогональных собственных векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$. Примем эти векторы за новый базис. Обозначим через $\mathbf{T}$ матрицу преобразования координат. Ясно, что матрица $\mathbf{T}$ — ортогональная.

Итак, положим

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}', \qquad (3.26)$$

где $\mathbf{X}' = (x_1' \ x_2' \ \ldots \ x_n')^T$ — вектор-столбец, составленный из координат вектора относительно нового базиса. Подставим (3.26) в (3.25), тогда получим квадратичную форму относительно нового базиса:

$$\Phi(x_1', x_2', \ldots, x_n') = (\mathbf{T}\mathbf{X}')^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{X}').$$

Напомним, что $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$. Учитывая, кроме того, что $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$, так как $\mathbf{T}$ — ортогональная матрица, получим

$$\Phi(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \mathbf{X}'^T \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'. \qquad (3.27)$$

Итак, матрица квадратичной формы относительно нового базиса равна $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$. Нетрудно заметить, что она диагональная, причем на главной диагонали стоят собственные значения λ_1, λ_2, ..., λ_n оператора A. Заметим (это было показано раньше), что в качестве столбцов матрицы $\mathbf{T}$ следует взять координаты собственных векторов оператора A в исходном базисе.

Приведение квадратичной формы к виду, при котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид, называется *приведением квадратичной формы к каноническому виду*.

3.6.2. Геометрические приложения теории квадратичных форм в пространствах R^2 и R^3

Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0. \qquad (3.28)$$

На первые три слагаемых можно смотреть как на квадратичную форму

$$\Phi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2.$$

Матрица этой квадратичной формы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристические числа этой матрицы λ_1 и λ_2 и соответствующие им единичные векторы $\bar{X}^{(10)}$ и $\bar{X}^{(20)}$, которые примем за орты нового базиса $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$. Переход от базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$ к новому базису $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ осуществляется матрицей $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{X}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}', \tag{3.29}$$

где

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} E_{11} & E_{22} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

причем в качестве столбцов этой матрицы берутся координаты векторов $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$ в исходном базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$. После такого преобразования квадратичная форма относительно базиса $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ имеет вид $\Phi(x',y')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$.

Теперь остается преобразовать линейные члены уравнения (3.28). Для этого достаточно заменить в линейных слагаемых x и y по формулам

$$x=E_{11}x'+E_{12}y',\quad y=E_{21}x'+E_{22}y', \tag{3.31}$$

которые следуют из формул (3.29) и (3.30).

Заметим, что преобразование (3.31) представляет собой переход от старой системы координат xOy к новой $x'Oy'$, повернутой относительно старой системы на некоторый угол α. Напомним, что формулы преобразования координат при повороте координатных осей на угол α имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Правые части этих соотношений совпадают с правыми частями соотношений (3.31), откуда и можно определить угол α. В результате таких преобразований уравнение (3.28) будет иметь вид

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+a_1'x'+a_2'y'+a_0=0. \tag{3.32}$$

Теперь остается выполнить второй этап упрощения кривой — сделать параллельный перенос координатных осей. При этом возможны следующие ситуации:

1) λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют одинаковый знак. Выполняя параллельный перенос, мы приведем далее уравнение (3.32) к виду

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0'' = 0.$$

Очевидно, что если a_0'' имеет такой же знак, что и собственные числа λ_1 и λ_2 или обращается в нуль, то либо данному уравнению не отвечает никакая кривая, либо соответствует точка $(0; 0)$. Если a_0'' имеет противоположный знак, то данная кривая — эллипс;

2) λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки. Если после параллельного переноса свободный член не обращается в нуль, то получим гиперболу, в противном случае — пару пересекающихся прямых;

3) λ_1 или λ_2 обращается в ноль. После параллельного переноса мы можем получить параболу. Отметим, что не может оказаться, что оба собственных числа обращаются в нуль, так как в противном случае уравнение (3.28) было бы линейным.

Приведенные рассуждения позволяют сделать вывод, что общее уравнение второго порядка вида (3.28) является уравнением либо эллипса (окружности), либо гиперболы, либо параболы. Заметим, что здесь содержатся и вырожденные кривые: эллипс (окружность), сжавшийся в точку; пара пересекающихся прямых; мнимый эллипс; пара параллельных прямых и т.п.

Остановимся теперь кратко на идее приложения теории квадратичных форм к приведению общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Суть метода совершенно аналогична изложенному выше. А именно, в начале рассматривается квадратичная форма

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{21}yx + a_{22}y^2 + \\ + a_{23}yz + a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2 \quad (a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, 2, 3),$$

которая приводится к каноническому виду. Затем, используя матрицу преобразования координат, следует преобразовать линейные члены и на втором этапе осуществить параллельный перенос координатных осей.

Пример 3.3. Привести к каноническому виду уравнение поверхности $x^2 + 4xz + 6y^2 + z^2 = 0$.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + 4xz + 6y^2 + z^2.$$

Запишем ее так:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= 1 \cdot x^2 + 0 \cdot xz + 2xz + \\ &+ 0 \cdot yx + 6y^2 + 0 \cdot yz + \\ &+ 2 \cdot zx + 0 \cdot zy + 1 \cdot z^2.\end{aligned}$$

Ясно, что матрица данной квадратичной формы равна

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем единичные собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$: $\bar{\gamma}^{(1)}$, $\bar{\gamma}^{(2)}$, $\bar{\gamma}^{(3)}$. Напомним, что $\bar{\gamma}$ называется собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}\bar{\gamma} = \lambda\bar{\gamma} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \bar{\gamma} = 0.$$

Для данной матрицы $\mathbf{A}$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Эта однородная система линейных алгебраических уравнений, записанная в матричном виде, имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю, т.е. должно быть

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получили характеристическое уравнение, корни которого равны соответственно $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -1$.

Найдем соответствующие этим значениям собственные векторы $\bar{\gamma}^{(1)}$, $\bar{\gamma}^{(2)}$ и $\bar{\gamma}^{(3)}$.

1. $\lambda_1 = 3$ подставим в систему (3.33):

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} -2\gamma_1^{(1)} + 2\gamma_3^{(1)} = 0 \\ 3\gamma_2^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^{(1)} = \gamma_3^{(1)} = t,\ \gamma_2^{(1)} = 0,$$

где t — параметр. Имеем $\bar{\gamma}^{(1)} = (t\ \ 0\ \ t)^T$. Нормируя этот вектор, получим

$$\bar{\gamma}^{(10)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. Аналогично для $\lambda_2 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \gamma_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} -5\gamma_1^{(2)} + 2\gamma_3^{(2)} = 0 \\ 2\gamma_1^{(2)} - 5\gamma_3^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^{(2)} = \gamma_3^{(2)} = 0,\ \gamma_2^{(2)} = t;$$

$$\bar{\gamma}^{(2)} = (0\ t\ 0)^T, \quad \bar{\gamma}^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Для $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(3)} \\ \gamma_2^{(3)} \\ \gamma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2\gamma_1^{(3)} + 2\gamma_3^{(3)} = 0 \\ 7\gamma_2^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^{(3)} = -\gamma_3^{(3)} = -t,\ \gamma_2^{(3)} = 0;$$

$$\bar{\gamma}^{(3)} = (-t\ 0\ t)^T, \quad \bar{\gamma}^{(30)} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Возьмем теперь координаты единичных собственных векторов в качестве матрицы преобразования координат:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Преобразование $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'$ дает

$$\left.\begin{aligned} &x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ &y = y' \\ &z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{aligned}\right\}.$$

Ясно, что при таком преобразовании совершается поворот координатных осей вокруг оси Oy на угол $\alpha = \pi/4$. Относительно новых координат $Ox'y'z'$ квадратичная форма имеет вид $\Phi(x', y', z') = 3x'^2 + 6y'^2 - z'^2$. Следовательно, наша поверхность относительно новой системы координат имеет уравнение

$$3x'^2 + 6y'^2 - z'^2 = 0.$$

Это конус, вытянутый вдоль оси Oz' (рис. 3.1). □

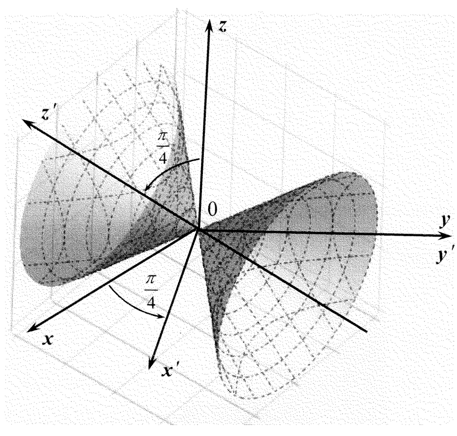

Рис. 3.1

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан вектор $\bar{x} = 8\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 - 18\bar{e}_4$. Разложить этот вектор по новому базису, связанному со старым базисом уравнениями

$$\bar{e}_1' = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4, \quad \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4,$$
$$\bar{e}_3' = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3 + \bar{e}_4, \quad \bar{e}_4' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 - 6\bar{e}_4.$$

Ответ: $\bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 + 4\bar{e}_4$.

2. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 3z, \\ y' &= 4x + 5y + 6z, \\ z' &= 7x + 8y + 9z \end{aligned} \quad (\mathbf{A}) \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x' &= x + 3y + 4{,}5z, \\ y' &= 6x + 7y + 9z, \\ z' &= 10{,}5x + 12y + 13z \end{aligned} \quad (\mathbf{B}).$$

Найти $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

Ответ: $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \mathbf{E}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, матрица которого

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 11$; $\bar{x}^{(1)} = \dfrac{4}{\sqrt{41}}\bar{i} - \dfrac{5}{\sqrt{41}}\bar{j}$, $\bar{x}^{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$.

4. Привести к каноническому виду уравнение линии

$$6x^2 + 2\sqrt{5}\,xy + 2y^2 - 21 = 0.$$

Ответ: $\dfrac{x'^2}{21} + \dfrac{y'^2}{3} = 1$.

5. Привести к каноническому виду уравнение линии

$$4xy + 3y^2 + 16 = 0.$$

Ответ: $\dfrac{x'^2}{16} - \dfrac{y'^2}{4} = 1$.

Глава 4
Аналитическая геометрия

§ 4.1. Прямая на плоскости

4.1.1. Задание прямой на плоскости

Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением одного из следующих нижеприведенных видов.

1. Общее уравнение прямой. Всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y, т.е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{4.1}$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты (причем $A^2 + B^2 \neq 0$), определяет на плоскости прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, $B \neq 0$, то уравнение приводится к виду $y = b$, где $b = -C/B$ (это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox);

2) если $B = 0$, $A \neq 0$, то уравнение прямой приводится к виду $x = a$, где $a = -C/A$ (прямая параллельна оси Oy);

3) если $C = 0$, то уравнение приводится к виду $Ax + By = 0$ (прямая проходит через начало координат).

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y = kx + b, \tag{4.2}$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$. Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox.

3. Уравнение прямой в отрезках. Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив обе его части на $(-C)$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{4.3}$$

где $a = -C/A$, $b = -B/A$. Здесь a и b — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k, то уравнение прямой имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{4.4}$$

Данное уравнение с различными значениями коэффициента k называют также *уравнением пучка прямых с центром в точке* $M_0(x_0, y_0)$.

5. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то уравнение прямой имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{4.5}$$

где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Если $y_2 = y_1$, то прямая имеет уравнение $y = y_1$, в случае $x_2 = x_1$ — уравнение $x = x_1$.

6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Если прямая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\bar{n}(A, B)$, то уравнение прямой имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4.6}$$

Вектор $\bar{n}(A, B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

7. Полярное уравнение прямой. Положение прямой в полярных координатах определено, если указано расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (рис. 4.1).

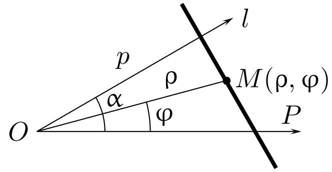

Рис. 4.1

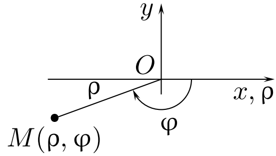

Рис. 4.2

Для любой точки $M(\rho, \varphi)$ на данной прямой имеем

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p. \qquad (4.7)$$

Прямоугольные координаты (x, y) точки M и ее полярные координаты (ρ, φ) связаны соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi;$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

где ρ — полярный радиус; φ — полярный угол точки M (рис. 4.2).

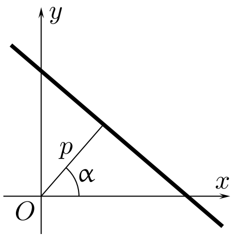

Рис. 4.3

9. Нормальное уравнение прямой. Если прямая определяется заданием p и α (рис. 4.3), то уравнение (4.7) прямой в прямоугольной системе координат имеет вид

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \qquad (4.8)$$

Это уравнение можно получить из общего уравнения прямой (4.1), умножив обе части данного уравнения на нормирующий множитель

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

учитывая, что знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 4.1. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

Решение. Найдем нормирующий множитель:

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0. \qquad \square$$

4.1.2. Угол между прямыми

Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ соответственно, то тангенс угла между этими прямыми можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \tag{4.9}$$

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, то косинус угла между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_1^2}}. \tag{4.10}$$

4.1.3. Условие параллельности двух прямых

Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1 = k_2$.

Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $A_1/B_1 = A_2/B_2$.

4.1.4. Условие перпендикулярности двух прямых

Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1k_2 = -1$.

Для того чтобы прямые L_1 и L_2, заданные общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Пример 4.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; -5)$ перпендикулярно прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

Решение. Из уравнения прямой выражаем y, получаем

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

Следовательно, угловой коэффициент равен $k = -3/4$. Для прямой, проходящей через точку M перпендикулярно данной, угловой коэффициент будет $k_1 = -1/k = 4/3$. Используя формулу (4.4), получаем

$$y + 5 = \frac{4}{3}(x + 2) \quad \text{или} \quad 4x - 3y - 7 = 0. \qquad \square$$

4.1.5. Расстояние от точки до прямой

Если прямая L задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ не принадлежит данной прямой, то расстояние d от точки до прямой находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{4.11}$$

Пример 4.3. Найти расстояние от точки $M(2; -1)$ до прямой $-3x + 4y + 15 = 0$.

Решение. По формуле (4.11) получаем

$$d = \frac{|-3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 15|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1. \qquad \square$$

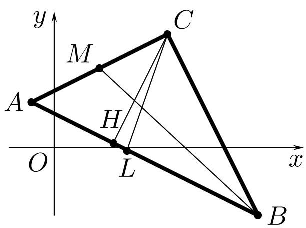

Рис. 4.4

Пример 4.4. Даны вершины треугольника $A(-1; 2)$, $B(9; -3)$, $C(5; 5)$. Найти: а) уравнения сторон; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы BM; г) уравнение биссектрисы CL (рис. 4.4).

Решение. а) Уравнения сторон треугольника находим по формуле

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставляя координаты точек A и B, получаем

$$\frac{x + 1}{9 - (-1)} = \frac{y - 2}{-3 - 2} \quad \text{или} \quad \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{-1},$$

т.е. уравнение стороны AB: $x + 2y - 3 = 0$. Находим по аналогии уравнения других сторон: BC: $2x + y - 15 = 0$ и AC: $x - 2y + 5 = 0$.

б) Из уравнения стороны AB находим угловой коэффициент $k_{AB} = -1/2$. Прямые CH и AB перпендикулярны, поэтому $k_{CH} = -1/k_{AB} = 2$. Применяя уравнение $y - y_0 = = k(x - x_0)$, получаем

$$y - 5 = 2(x - 5) \quad \text{или} \quad y = 2x - 5.$$

в) Медиана BM треугольника соединяет вершину B треугольника с точкой M — серединой стороны AB. Координаты точки M ищем по формулам деления отрезка пополам:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}.$$

Составляем уравнение прямой, проходящей через точки B и M:

$$\frac{x-9}{2-9} = \frac{y+3}{\frac{7}{2}+3} \quad \text{или} \quad 13x + 14y - 75 = 0.$$

г) Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам, т.е. $AL/LB = AC/BC$. Длины сторон треугольника находим по формуле расстояния между двумя точками:

$$|AB| = \sqrt{(9-(-1))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5},$$

$$|BC| = \sqrt{(5-9)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$

$$|AC| = \sqrt{(5-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Тогда

$$\frac{AL}{LB} = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{4},$$

т.е. точка L делит отрезок AB в отношении $\lambda = 3/4$. Координаты точки L находим по формулам деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_L = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{4}\cdot 9}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{23}{7},$$

$$y_L = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{3}{4}\cdot(-3)}{1 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{7}.$$

Уравнение биссектрисы CL:

$$\frac{x - x_C}{x_L - x_C} = \frac{y - y_C}{y_L - y_C} \quad \text{или} \quad \frac{x-5}{\frac{23}{7} - 5} = \frac{y-5}{-\frac{1}{7} - 5},$$

откуда $3x - y - 10 = 0$. $\square$

Пример 4.5. В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения сторон AB: $2x + y - 1 = 0$, AD: $3x - 2y - 5 = 0$ и точка $K(-3; 5)$ пересечения диагоналей AC и BD. Найти уравнения сторон BC и CD.

Решение. Вершину A параллелограмма найдем как точку пересечения прямых AB и AD:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 3x - 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A(1; -1)$.

Координаты точки C находим из того, что K — середина AC:

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Подставляя в эти равенства координаты точек A и K, получаем уравнения для нахождения координат точки C:

$$-3 = \frac{1 + x_C}{2}, \quad 5 = \frac{-1 + y_C}{2};$$

отсюда $C(-7; 11)$.

Так как стороны BC и AD параллельны, то их угловые коэффициенты равны между собой: $k_{BC} = k_{AD} = 3/2$. Аналогично, $k_{CD} = k_{AB} = -2$. Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Для стороны BC:

$$y - 11 = \frac{3}{2}(x + 7) \quad \text{или} \quad 3x - 2y + 43 = 0.$$

Для стороны CD:

$$y - 11 = -2(x + 7) \quad \text{или} \quad 2x + y + 3 = 0. \qquad \square$$

§ 4.2. Кривые второго порядка

4.2.1. Определение кривых второго порядка

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (4.12)$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из чисел A, B и C не равно нулю. Такие линии называются *линиями* (*кривыми*) *второго порядка*.

В общем случае может оказаться, что уравнение (4.12) определяет так называемую *вырожденную кривую* (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая невырожденная, то для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих трех видов (каноническое уравнение):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0;$$

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

При этом кривая называется соответственно *эллипсом* (в частном случае — *окружностью*), *гиперболой* или *параболой*.

4.2.2. Окружность

Определение 4.1. *Окружность* — это множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (*центра*) на данное расстояние (*радиус*).

Если R — радиус окружности, точка $C(x_0, y_0)$ — ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{4.13}$$

Пример 4.6. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

Решение. Разделим исходное уравнение на 2, сгруппируем выражения относительно x и y:

$$(x^2 - 4x) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y\right) = 4.$$

Дополним выражения, стоящие в скобках, до полных квадратов:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + \left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16} = 4$$

$$\text{или}\quad (x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

Таким образом, координаты центра окружности $x_0 = 2$, $y_0 = -5/4$; радиус окружности равен $R = 11/4$. □

4.2.3. Эллипс

Определение 4.2. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как на рис. 4.5, а фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получится простейшее (*каноническое*) *уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.14}$$

Здесь a — *большая*, b — *малая полуоси*, причем a, b и c (c — половина расстояния между фокусами) связаны соотношением $a^2-b^2=c^2$.

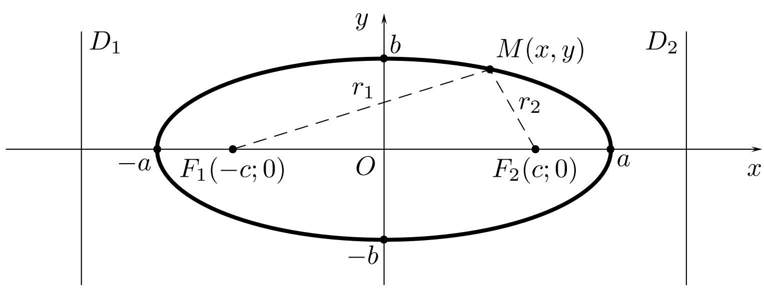

Рис. 4.5

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $\varepsilon = c/a$. При $\varepsilon = 0$ эллипс является окружностью.

Расстояния некоторой точки эллипса M от его фокусов называются *фокальными радиус-векторами* этой точки.

Их обычно обозначают r_1 и r_2. Для любой точки эллипса в силу определения $r_1 + r_2 = 2a$.

Фокальные радиус-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам $r_1 = a - \varepsilon x$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2 = a + \varepsilon x$ (левый фокальный радиус-вектор).

Прямые D_1: $x = -a/\varepsilon$ и D_2: $x = a/\varepsilon$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии a/ε от центра, называются *директрисами* эллипса.

Пример 4.7. Установить, что уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + {}$ ${}+ 18y + 9 = 0$ определяет эллипс. Найти его центр, полуоси, эксцентриситет.

Решение. Сгруппируем выражения относительно x и y:

$$(5x^2 - 30x) + (9y^2 + 18y) + 9 = 0.$$

Из первой скобки вынесем 5, из второй 9 и дополняем эти скобки до полных квадратов:

$$5(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 2y + 1) - 5 \cdot 9 - 9 \cdot 1 + 9 = 0,$$

$$5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 45.$$

Разделив обе части на 45, получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Отсюда центр эллипса $O_1(3; -1)$, полуоси $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ (рис. 4.6). Вычисляем $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$. Тогда эксцентриситет равен $\varepsilon = c/a = 2/3$. □

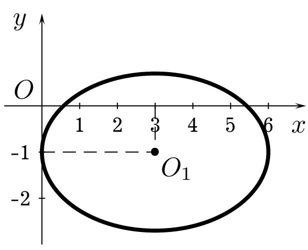

Рис. 4.6

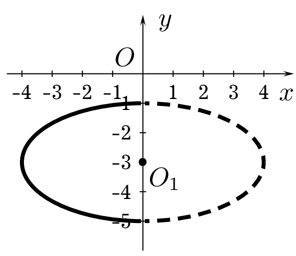

Рис. 4.7

Пример 4.8. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 11 = 0$;

б) $x^2 + 3y^2 + 4x + 6y + 19 = 0$;

в) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

Решение. а) Дополняем члены уравнения, содержащие x и y, до полных квадратов и переносим свободный член в правую часть равенства:

$$(x+3)^2 + 2(y-1)^2 = 0.$$

Это уравнение определяет единственную точку $O(-3; 1)$.

б) Выделение полных квадратов приводит исходное уравнение к виду

$$(x+2)^2 + 3(y+1)^2 = -12 \quad \text{или} \quad \frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{4} = -1.$$

Это уравнение мнимого эллипса.

в) Замечаем, что $x \leqslant 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x^2 = 4(-5 - 6y - y^2).$$

Выделяя полный квадрат относительно переменной x, получаем

$$x^2 + 4(y+3)^2 = 16 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1.$$

Следовательно, искомая линия есть половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости (рис. 4.7). □

4.2.4. Гипербола

Определение 4.3. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$, то получим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.15}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $A_1A_2 = 2a$, называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $B_1B_2 = 2b$, — *мнимой осью*. При этом $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$.

Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние точки $M(x,y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm(b/a)x$. На рис. 4.8 указано взаимное расположение гиперболы и ее асимптот.

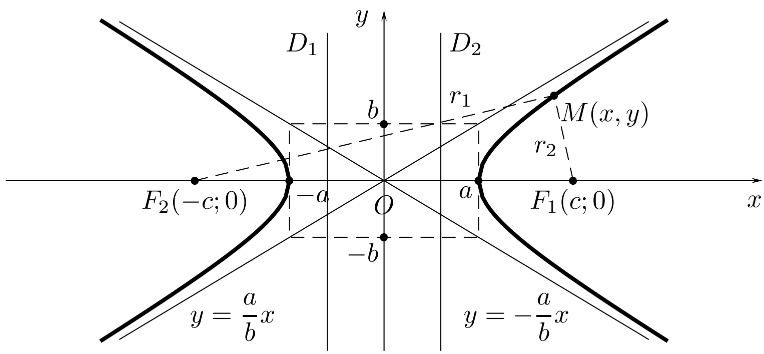

Рис. 4.8

Отношение $\varepsilon = c/a > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиус-векторы правой ветви гиперболы: $r_1 = \varepsilon x - a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2 = \varepsilon x + a$ (левый фокальный радиус-вектор).

Фокальные радиус-векторы левой ветви гиперболы: $r_1 = -\varepsilon x + a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2 = -\varepsilon x - a$ (левый фокальный радиус-вектор).

Прямые D_1: $x = -a/\varepsilon$ и D_2: $x = a/\varepsilon$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии a/ε от центра гиперболы, называются *директрисами* гиперболы.

Пример 4.9. Показать, что уравнение $5x^2 - 4y^2 + 30x + 8y + 21 = 0$ представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, полуоси, вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты этой гиперболы.

Решение. Сгруппируем отдельно члены, содержащие переменные x и y:

$$(5x^2 + 30x) - (4y^2 - 8y) + 21 = 0.$$

В каждой из скобок вынесем коэффициент при квадрате переменной, а затем выделим полный квадрат:

$$5(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 2y) + 21 = 0,$$

$$5(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) - 45 + 4 + 21 = 0,$$

$$5(x + 3)^2 - 4(y - 1)^2 = 20, \quad \frac{(x + 3)^2}{4} - \frac{(y - 1)^2}{5} = 1.$$

Обозначим $x' = x + 3$, $y' = y - 1$. Таким образом мы производим преобразование параллельного переноса осей координат в точку $O_1(-3; 1)$. В новой системе координат данное уравнение принимает вид

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1,$$

т.е. определяет гиперболу с центром $O_1(-3; 1)$ и полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{5}$ (рис. 4.9).

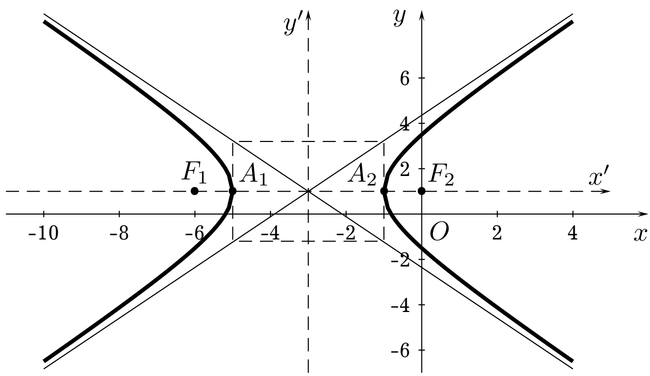

Рис. 4.9

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$, то $\varepsilon = c/a = 3/2$. Находим координаты вершин и фокусов в новой координатной системе: $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$. Так как $x = x' - 3$, $y = y' + 1$, то в старой системе координат получаем $A_1(-5; 1)$, $A_2(-1; 1)$, $F_1(-6; 1)$, $F_2(0; 1)$.

В новой системе координат уравнения асимптот имеют вид

$$y' = \pm\frac{b}{a}x', \quad \text{т.е.} \quad y' = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x'.$$

Заменяя x' на $x+3$, а y' на $y-1$, получаем уравнения асимптот в первоначальной системе координат:

$$y - 1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+3). \qquad \square$$

Пример 4.10. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $2x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 11 = 0$;

б) $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$;

в) $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Решение. а) Путем выделения полных квадратов это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y-1)^2}{2} = -1.$$

Это уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(-2;1)$, с действительной полуосью $a = \sqrt{3}$ и мнимой $b = \sqrt{2}$. Действительная ось гиперболы параллельна оси Oy.

б) После дополнения членов, содержащих x и y, до полных квадратов приходим к уравнению

$$4(x+1)^2 - (y+4)^2 = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(2x - y - 2)(2x + y + 6) = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые: $2x - y - 2 = 0$ и $2x + y + 6 = 0$.

в) Заметим, что $y \leqslant 7$. Запишем уравнение в виде

$$y - 7 = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$$

Возведем обе части в квадрат, выделяем полный квадрат с переменной x, получаем уравнение гиперболы

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1.$$

Линией будет являться ветвь гиперболы, расположенная ниже прямой $y = 7$. $\square$

4.2.5. Парабола

Определение 4.4. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.

Если директрисой параболы является прямая $x = -p/2$, а фокусом — точка $F(p/2; 0)$, то уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{4.16}$$

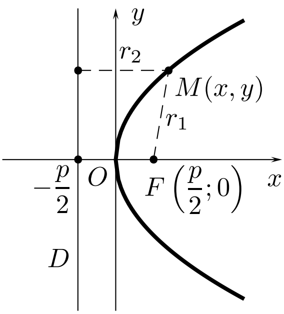

Рис. 4.10

Парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс (рис. 4.10, где $p > 0$). При $p > 0$ ветви параболы обращены в положительную сторону.

Длина фокального радиус-вектора параболы $y^2 = 2px$ определяется по формуле $r = x + p/2$ $(p > 0)$.

Пример 4.11. Показать, что уравнение $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$ представляет собой уравнение параболы. Найти вершину, фокус, ось и директрису этой параболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого выразим x через y и в полученном выражении выделим полный квадрат:

$$x = \frac{1}{4}(11 - y^2 - 2y), \quad x = -\frac{1}{4}(y^2 + 2y + 1) + \frac{1}{4} + \frac{11}{4},$$

$$x = -\frac{1}{4}(y + 1)^2 + 3.$$

Следовательно,

$$(y + 1)^2 = -4(x - 3).$$

Вершина параболы $O_1(3; -1)$. Введем обозначения $x' = x - 3$, $y' = y + 1$, тогда в новой системе координат $x'O'y'$ уравнение параболы будет иметь вид $y'^2 = -4x'$. Отсюда $2p = 4$, $p = 2$, $p/2 = 1$. В новой системе координат фокус $F(-1; 0)$, ось параболы $O'x'$ (уравнение $y' = 0$), а уравнение директрисы $x' = 1$. Возвращаясь к старой системе координат, получаем $O_1(3; -1)$, $F(2; -1)$, уравнение оси параболы $y = -1$, уравнение директрисы $x = 4$. □

4.2.6. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение (4.12) кривой второго порядка определяет на плоскости Oxy эллипс, гиперболу или параболу (с возможными случаями распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат:

1) если $AC - B^2 > 0$, то определяемая этим уравнением кривая есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку);

2) если $AC - B^2 < 0$, то соответствующая кривая является гиперболой;

3) если $AC - B^2 = 0$, то уравнение определяет параболу.

Если кривая второго порядка задана уравнением (4.12), то, применив преобразование поворота осей координат с помощью формул

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{cases}$$

следует соответствующим выбором α освободиться в уравнении от члена с произведением координат и свести исходное уравнение к одному из трех вышеперечисленных типов.

Пример 4.12. Привести к каноническому виду уравнение $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулами поворота осей координат:

$$5(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + 4(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + \\ + 8(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 + 8(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) + \\ + 14(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + 5 = 0;$$

$$(5\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha)x'^2 + \\ + (5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha)y'^2 + \\ + [6\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]x'y' + \\ + (8\cos\alpha + 14\sin\alpha)x' + (14\cos\alpha - 8\sin\alpha)y' + 5 = 0.$$

Найдем α из условия

$$4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 6\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

т.е. приравняем к нулю коэффициент при $x'y'$. Получим уравнение

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -1/2$. Заметим, что эти значения $\operatorname{tg}\alpha$ соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому, взяв $\operatorname{tg}\alpha = 2$ вместо $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$, мы только меняем ролями оси x' и y' (рис. 4.11).

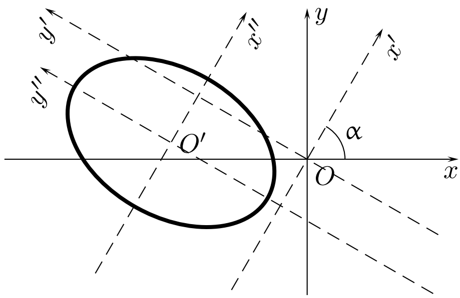

Рис. 4.11

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = 2$, тогда $\sin\alpha = \pm 2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$. Возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Тогда уравнение принимает вид

$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0$$

или

$$9\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) = -5.$$

Выражения, стоящие в скобках, дополним до полных квадратов:

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{33}{5} + \frac{1}{20} - 5,$$

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Приняв за новое начало точку $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$, применим формулы преобразования координат

$$x' = x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y' = y'' + \frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

Получим

$$9x''^2 + 4y''^2 = \frac{9}{4} \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{1/4} + \frac{y''^2}{9/16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса. □

§ 4.3. Линии в полярной системе координат

4.3.1. Полярные координаты на плоскости

Полярные координаты определяются заданием на плоскости *полюса* O и *полярной оси* ρ (рис. 4.12). Координаты точки M в полярных координатах задаются длиной радиус-вектора $|\overline{OM}| = \rho$ этой точки и углом φ его наклона к полярной оси. При этом $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \infty$. Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, называется *главным*.

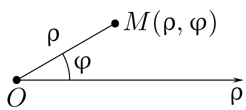

Рис. 4.12

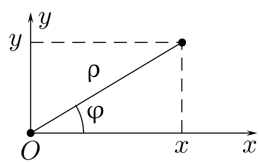

Рис. 4.13

4.3.2. Связь полярных координат с декартовыми

Совместим начало декартовой системы с полюсом полярной системы координат, а ось Ox — с полярной осью ρ (рис. 4.13). Найдем связь координат точки $M(x, y)$ и $M(\rho, \varphi)$. Она выражается следующей системой уравнений:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Если известны координаты точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то проекции отрезка связаны соотношением

$$AB = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\},$$

а полярный угол отрезка по координатам его начала и конца находится по формулам

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{\rho},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

4.3.3. Уравнение линий в полярной системе координат и их геометрическое изображение

Кривые второго порядка. Построим линию в полярных координатах, заданную уравнением $\rho = a\cos\varphi$, $a = \text{const} > 0$.

Координата ρ принимает только положительные значения. При $\varphi = 0$ имеем $\cos\varphi = 1$ и $\rho = a$, получаем точку $A(a; 0)$.

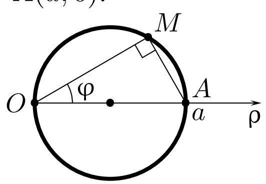

Рис. 4.14

Рассмотрим произвольную точку $M(\rho, \varphi)$ (рис. 4.14). Из уравнения линии следует $\cos\varphi = \rho/a$, значит, угол OMA — прямой. С возрастанием угла φ от 0 до $\pi/2$ косинус этого угла убывает от 1 до 0. Таким образом, ρ убывает от a до 0 в точке $O(0; \pi/2)$, и радиус-вектор точки M описывает верхнюю половину окружности. Нижняя ее половина получается при изменении φ от $3\pi/2$ до 2π. Этим значениям угла соответствуют положительные значения $\cos\varphi$, возрастающие от 0 до 1, что приводит к возрастанию ρ от 0 до a и геометрическому замыканию окружности.

Итак, уравнение $\rho = a\cos\varphi$ задает окружность с центром в точке $(a/2; 0)$ и радиусом $a/2$.

Такой же результат получается, если в уравнении линии $\rho = a\cos\varphi$ перейти к декартовым координатам. Тогда

$$\sqrt{x^2+y^2} = a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x^2+y^2-ax = 0, \quad \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Получили каноническое уравнение окружности с центром в точке $(a/2; 0)$ и радиусом $a/2$.

В полярных координатах кривые второго порядка имеют уравнения

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \tag{4.17}$$

если полюс находится в фокусе, полярная ось направлена из фокуса к ближайшей вершине (для гиперболы этим уравнением определяется только одна ветвь); p — фокальный параметр, ε — эксцентриситет кривой. Для эллипса $0 \leqslant \varepsilon < 1$, гиперболы $\varepsilon > 1$, параболы $\varepsilon = 1$.

Спирали. *1. Архимедова спираль:*

$$\rho = a\varphi, \quad 0 < \varphi < \infty, \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Для построения архимедовой спирали нужно вычислить значения ρ при различных значения φ:

$$OA = a\frac{\pi}{2}, \quad OB = 2OA = 2a\frac{\pi}{2}, \quad OC = 3OA = 3a\frac{\pi}{2}$$

и так далее. Кривая представляет собой путь (рис. 4.15), описываемый точкой, движущейся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω, причем $a = v/\omega$.

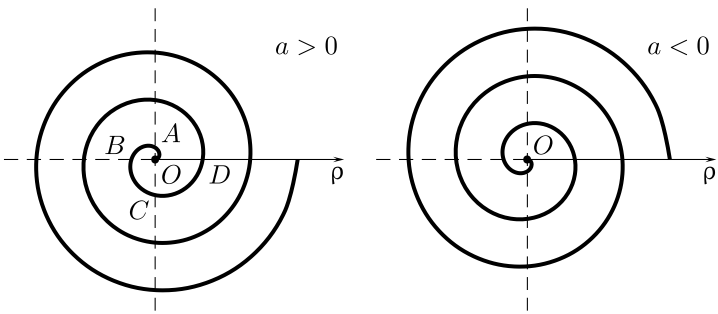

Рис. 4.15

2. Гиперболическая спираль:

$$\rho = a/\varphi, \quad \varphi \in (0; \infty), \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

3. Логарифмическая спираль:

$$\rho = a^{\varphi}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \varphi \in [0; \infty), \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Розы. При построении графиков будем считать, что параметр $a > 0$.

1. Двухлепестковые розы.

1) $\rho = a\sin 2\varphi, \quad a > 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a.$ (4.21)

φ°	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
$\rho(a)$	0	0,3	0,6	0,86	0,99	1	0,99	0,86	0,6	0,3	0

Для нахождения вида кривой $\rho = a\sin 2\varphi$ обратимся к графику функции при $\varphi \in [0; 2\pi)$ (рис. 4.16). Функция $\rho = a\sin 2\varphi$ при $a > 0$ принимает допустимые неотрица-

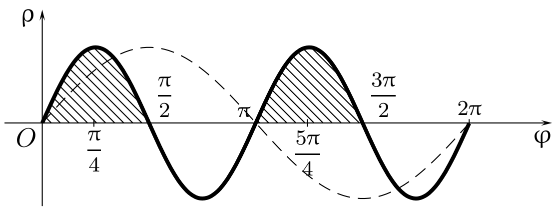

Рис. 4.16

тельные значения $\rho \geqslant 0$ при $\varphi \in [0; \pi/2] \cup [\pi; 3\pi/2]$; принимает максимальные значения, равные a, при $\varphi_1 = \pi/4$ и $\varphi_2 = 5\pi/4$. Интервалами возрастания функции являются $\varphi \in [0; \pi/4] \cup [\pi; 5\pi/4]$, убывания — $\varphi \in (\pi/4; \pi/2] \cup \cup (5\pi/4; 3\pi/2]$. В результате график функции принимает вид, изображенный на рис. 4.17.

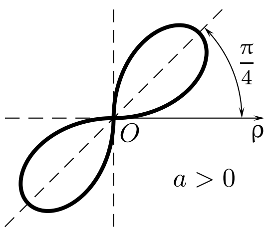

Рис. 4.17

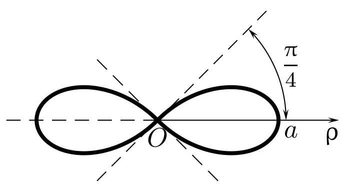

Рис. 4.18

2) $\rho = a\cos 2\varphi, \quad a > 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a.$ (4.22)

φ°	0	5	10	20	30	40	45
$\rho(a)$	1	0,98	0,94	0,76	0,5	0,17	0

Кривая имеет вид, приведенный на рис. 4.18.

2. Четырехлепестковые розы.

$$\rho = a|\cos 2\varphi|, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad \rho \in \mathbb{R}; \tag{4.23}$$

$$\rho = a|\sin 2\varphi|, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Вид кривых приведен на рис. 4.19 и 4.20 соответственно.

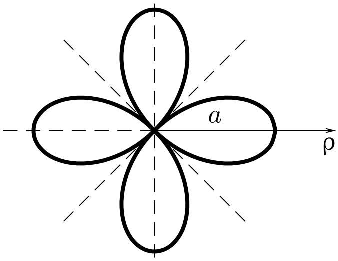

Рис. 4.19

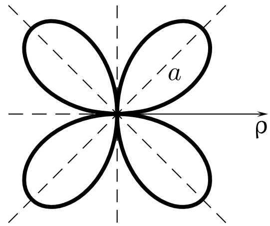

Рис. 4.20

3. Трехлепестковые розы.

$$\rho = a\sin 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad a > 0; \tag{4.25}$$

$$\rho = a\cos 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad a > 0. \tag{4.26}$$

Вид кривых приведен на рис. 4.21 и 4.22 соответственно.

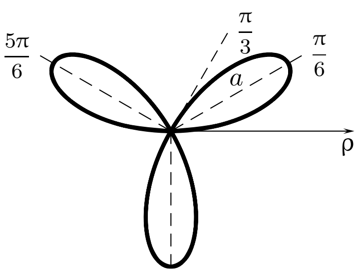

Рис. 4.21

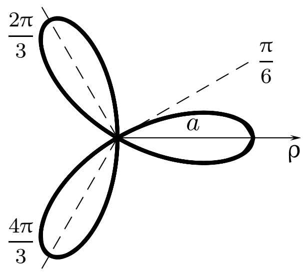

Рис. 4.22

§ 4.4. Параметрическое задание линий

Параметрические уравнения линий задаются в виде зависимости текущих координат x и y от некоторого параметра t. Каждому значению t соответствуют два значения: x и y. При изменении параметра t текущая точка $M(x, y)$

описывает некоторую кривую на плоскости. Методом исключения параметра уравнение линии приводится к уравнению в декартовых координатах и, наоборот, линия, заданная в декартовых координатах, может быть приведена к виду кривой, заданной параметрически.

4.4.1. Окружность

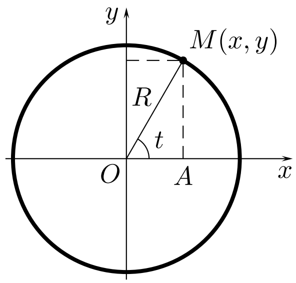

Рис. 4.23

Пусть $M(x,y)$ — текущая точка окружности с центром в начале координат и радиусом R. В качестве параметра t выберем угол, который составляет радиус-вектор точки M с осью Ox (рис. 4.23). Из треугольника OMA

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad (4.27)$$

— *параметрические уравнения окружности.*

Исключим из параметрических уравнений параметр t. Для этого возведем эти уравнения в квадрат и сложим их:

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2.$$

Таким образом, получено уравнение окружности в декартовых координатах.

4.4.2. Циклоида

Обыкновенной циклоидой называется кривая, описываемая точкой круга, катящегося без скольжения по прямой линии (рис. 4.24).

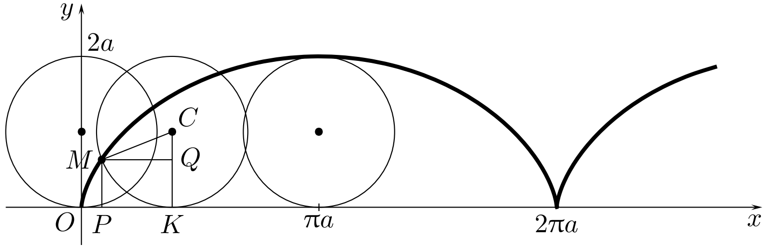

Рис. 4.24

Пусть Ox — прямая, по которой катится круг радиусом a. Тогда $MC = CK = a$, где K — точка касания. За параметр t примем угол поворота MC относительно CK: $t = \angle MCK$ — угол качения (в радианах). Так как качение окружности происходит без скольжения, то

$$OK = \smile{MK} = at.$$

Из рис. 4.24 видно, что

$$x = OP = OK - PK = OK - MQ =$$
$$= at - a\sin t = a(t - \sin t),$$
$$y = PM = KC - QC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Таким образом, *параметрические уравнения циклоиды* имеют вид

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad -\infty < t < \infty. \tag{4.28}$$

При $0 \leqslant t < 2\pi$ получаем первую арку циклоиды. Укажем, что длина одной арки циклоиды равна $L = 8a$, а площадь, ограниченная одной аркой, $S = 3\pi a^2$.

4.4.3. Астроида

Астроидой называется кривая, которую описывает точка окружности радиуса $R/4$, когда окружность катится без скольжения внутри окружности радиуса R (рис. 4.25).

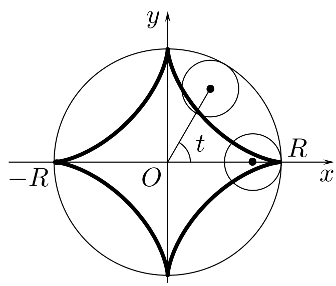

Рис. 4.25

Параметрические уравнения астроиды:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t, \\ y = R\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t < 2\pi. \tag{4.29}$$

Уравнение астроиды в декартовых координатах:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}. \tag{4.30}$$

Длина астроиды равна $L = 6R$, а площадь, ограниченная астроидой, $S = 3\pi R^2/8$.

4.4.4. Кривые третьего порядка

Полукубическая парабола. Уравнение полукубической параболы в декартовых координатах (рис. 4.26):

$$a^2x^3 - y^2 = 0, \quad a > 0. \tag{4.31}$$

Параметрические уравнения полукубической параболы:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = at^3, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty. \tag{4.32}$$

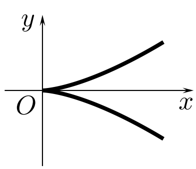

Рис. 4.26

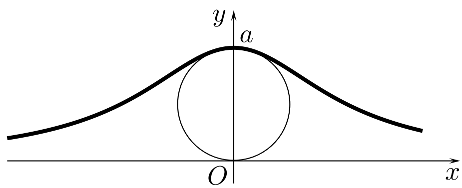

Рис. 4.27

Локон Аньези. Уравнение локона Аньези в декартовых координатах (рис. 4.27):

$$x^2y = a^2(a - y). \tag{4.33}$$

Уравнение локона Аньези в полярных координатах:

$$\rho \sin \varphi = \frac{a^3}{a^2 + \rho^2 \cos \varphi}. \tag{4.34}$$

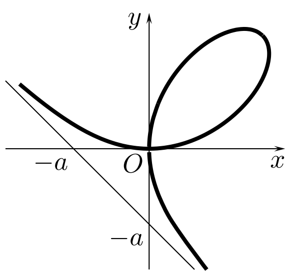

Рис. 4.28

Локон Аньези имеет асимптоту $y = 0$ при $x \to \pm\infty$. Точки перегиба $(\pm a/\sqrt{3}\,; 3a/4)$. Площадь между локоном Аньези и асимптотой $S = \pi a^2$.

Декартов лист. Уравнение декартова листа в декартовых координатах (рис. 4.28):

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0; \tag{4.35}$$

в полярных координатах —

$$\rho = \frac{3}{2}a\frac{\sin 2\varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}. \tag{4.36}$$

Параметрические уравнения декартова листа:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, & -\infty < t < -1, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, & -1 < t < \infty. \end{cases} \tag{4.37}$$

Декартов лист имеет асимптоту

$$x + y + a = 0 \quad \text{или} \quad \rho = \frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Площадь петли декартова листа $S = 3a^2/2$.

4.4.5. Кривые четвертого порядка

Улитка Паскаля. Уравнение улитки Паскаля в декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2), \tag{4.38}$$

в полярных координатах —

$$\rho = a\cos\varphi + b. \tag{4.39}$$

Параметрические уравнения улитки Паскаля:

$$\begin{cases} x = a\cos t(\cos t + b), \\ y = \sin t(\sin t + b), \end{cases} \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Из уравнения кривой нетрудно видеть, что улитка Паскаля получается при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки окружности на постоянный отрезок b. В зависимости от соотношения между a и b улитка Паскаля приобретает различный вид, как это показано на рис. 4.29.

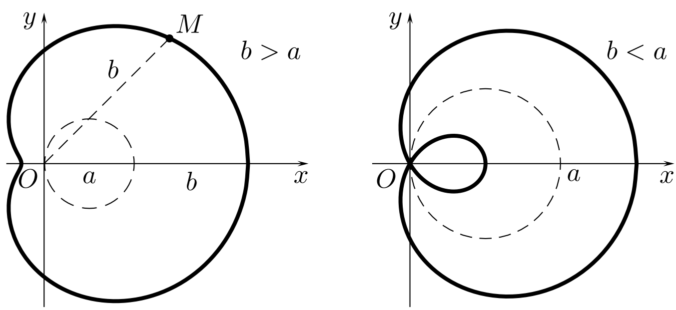

Рис. 4.29

Кардиоида. Уравнение кардиоиды в декартовых координатах (рис. 4.30):
$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax)-a^2y^2=0, \tag{4.40}$$
в полярных координатах —
$$\rho = a(1+\cos\varphi), \quad a>0. \tag{4.41}$$
Параметрические уравнения кардиоиды:
$$\begin{cases} x = a\cos t(1+\cos t), \\ y = a\sin t(1+\cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t < 2\pi. \tag{4.42}$$

Кардиоида является частным случаем улитки Паскаля при $a=b$. Вершина кардиоиды находится в точке $A(2a;0)$.

Укажем, что площадь кардиоиды $S = 3\pi a^2/2$, а длина $L=8a$.

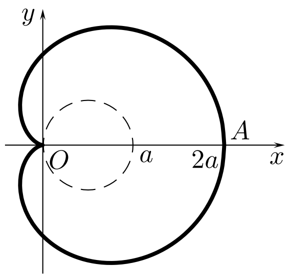

Рис. 4.30

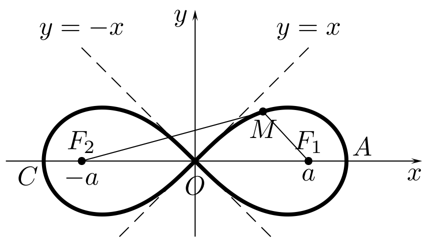

Рис. 4.31

Лемниската Бернулли. Лемниската Бернулли — линия, представляющая геометрическое место точек, расстояние которых от двух данных точек (фокусов) есть постоянная величина, равная квадрату половины межфокусного расстояния (рис. 4.31).

Уравнение лемнискаты Бернулли в декартовых координатах:
$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0, \tag{4.43}$$
в полярных координатах —
$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi, \quad a>0. \tag{4.44}$$

Укажем, что точка M лежит на кривой, если выполнено условие
$$|F_1M|\cdot|F_2M| = \left(\frac{|F_1F_2|}{2}\right)^2.$$

Вершины кривой находятся в точках $A(\sqrt{2}\,a;0)$, $C(-\sqrt{2}\,a;0)$. Площадь каждой петли $S=a^2$.

§ 4.5. Плоскость в пространстве

4.5.1. Задание плоскости в пространстве

Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих нижеприведенных видов.

1. Общее уравнение плоскости P имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (4.45)$$

где $\bar{N}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$ — *нормальный вектор* плоскости (рис. 4.32).

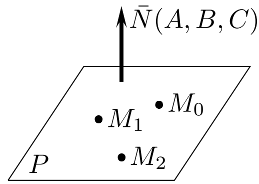

Рис. 4.32

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1) если $D=0$, то оно принимает вид $Ax+By+Cz=0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае плоскость проходит через начало координат;

2) если $C=0$, то имеем уравнение $Ax+By+D=0$. Нормальный вектор $\bar{N}=(A;B;0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, плоскость параллельна Oz (если $B=0$ — параллельна оси Oy, если $A=0$ — параллельна оси Ox);

3) если $C=D=0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$ параллельно оси Oz, т.е. плоскость $Ax+By=0$ проходит через ось Oz (аналогично, уравнениям $By+Cz=0$ и $Ax+Cz=0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy);

4) если $A=B=0$, то уравнение (4.45) принимает вид $Cz+D=0$, т.е. $z=-D/C$. Плоскость параллельна плоскости Oxy (аналогично, уравнениям $Ax+D=0$ и $By+D=0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz);

5) если $A=B=D=0$, то уравнение (4.45) примет вид $Cz=0$, т.е. $z=0$. Это уравнение плоскости Oxy (аналогично $y=0$ — уравнение плоскости Oxz, $x=0$ — уравнение плоскости Oxy).

2. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.46}$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Если в пространстве $Oxyz$ плоскость p задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\bar{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 4.33), то уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.47}$$

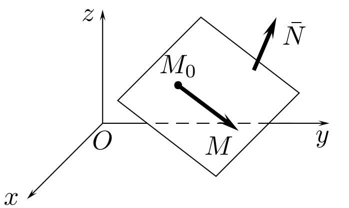

Рис. 4.33

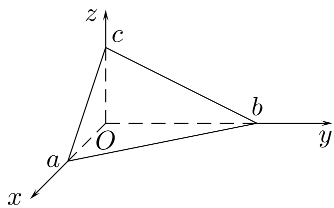

Рис. 4.34

4. Уравнение плоскости в отрезках. Если плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки a, b, c (рис. 4.34), т.е. проходит через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$, то уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{4.48}$$

Замечание. Уравнением (4.48) удобно пользоваться при построении плоскостей.

5. Нормальное уравнение плоскости. Положение плоскости P определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, проведенного на плоскость из начала координат, и длиной $p = |OK|$ этого перпендикуляра (рис. 4.35).

Если α, β, γ — это углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, то уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{4.49}$$

Замечание. Общее уравнение плоскости (4.45) можно привести к нормальному уравнению (4.49), умножив обе части уравнения (4.45) на нормирующий множитель

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

учитывая, что знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

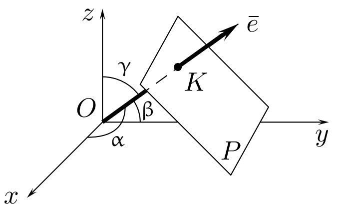

Рис. 4.35

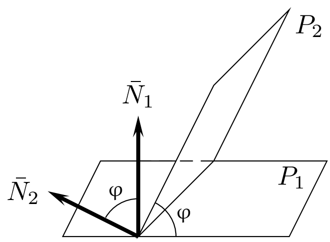

Рис. 4.36

4.5.2. Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\bar{N}_1 = A_1\bar{i} + B_1\bar{j} + C_1\bar{k}$ и $\bar{N}_2 = A_2\bar{i} + B_2\bar{j} + C_2\bar{k}$ (рис. 4.36), определяется как угол между $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$. Косинус этого угла находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\cdot|\bar{N}_2|}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (4.50)$$

Пример 4.13. Найти угол между плоскостью P_1, проходящей через точки $A_1(2;-4;1)$, $A_2(-1;2;0)$, $A_3(0;-2;3)$, и плоскостью P_2, заданной уравнением $5x+2y-3z+1=0$.

Решение. Уравнение плоскости P_1 найдем по трем точкам по формуле (4.46):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -1-2 & 2+4 & 0-1 \\ 0-2 & -2+4 & 3-1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$7(x-2)+4(y+4)+3(z-1)=0,$$
$$7x+4y+3z-1=0.$$

По уравнениям плоскостей определим их нормальные векторы: $\bar{N}_1 = 7\bar{i}+4\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{N}_2 = 5\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$. Угол φ между плоскостями P_1 и P_2 найдем по формуле (4.50):

$$\cos\varphi = \frac{\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\cdot|\bar{N}_2|} \approx 0{,}64,$$

откуда $\varphi = \arccos 0{,}64$. □

4.5.3. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть заданы две плоскости P_1 и P_2 в виде общих уравнений плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ соответственно.

Для того чтобы плоскости P_1 и P_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Для того чтобы плоскости P_1 и P_2 были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

4.5.4. Расстояние от точки до плоскости

Если плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ не принадлежит данной плоскости, то расстояние d от точки до плоскости находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.51}$$

Пример 4.14. Найти расстояние от точки $M_0(-3;-6;-8)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(5;2;0)$, $M_2(2;5;0)$, $M_3(1;2;4)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, находим по формуле (4.46):

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad x+y+z-7=0.$$

Подставляя в формулу (4.51), получаем
$$d = \frac{|-3\cdot 1 + 1\cdot(-6) + 1\cdot(-8) - 7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 8\sqrt{3}\,. \qquad \square$$

Пример 4.15. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$ и $M_2(0;2;1)$ параллельно вектору $\bar{a}(2;0;1)$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка искомой плоскости P. Тогда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\bar{a}$ компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю, т.е.
$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \bar{a}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
откуда $x + y - 2z = 0$. $\square$

Пример 4.16. Написать уравнение плоскости P', проходящей через заданные точки $M_1(0;1;1)$, $M_2(2;0;1)$ перпендикулярно заданной плоскости P: $2x - y + z + 1 = 0$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка плоскости P'. Тогда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\bar{N}$ компланарны, где $\bar{N}$ — нормальный вектор плоскости P. Вычисляем их смешанное произведение:
$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \bar{N}) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
откуда получаем уравнение плоскости P': $x + 2y - 2 = 0$. $\square$

§ 4.6. Прямая в пространстве

4.6.1. Задание прямой в пространстве

Прямая L в пространстве может быть задана следующими нижеприведенными уравнениями.

1. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, имеет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{4.52}$$

2. Прямая может быть задана **уравнениями двух плоскостей**

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{4.53}$$

пересекающихся по этой прямой.

3. Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{4.54}$$

определяет прямую, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=l\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$, который называется *направляющим вектором прямой*.

4. Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0, \\ z=nt+z_0. \end{cases} \tag{4.55}$$

Пример 4.17. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(4;-3;1)$, $A_2(5;-3;0)$.

Решение. Используя формулу (4.52), получим

$$\frac{x-4}{5-4}=\frac{y-(-3)}{-3-(-3)}=\frac{z-1}{0-1} \quad \text{или} \quad \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{-1}.$$

Равенство нулю второй дроби означает, что прямая принадлежит плоскости $y=-3$. □

Пример 4.18. Написать каноническое уравнение заданной прямой:

$$\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$$

Решение. Прямая задана общим уравнением (в виде пересечения двух плоскостей). Пусть $z=t$, тогда

$$\begin{cases} 6x-5y=4t-8, \\ 6x+5y=-3t-4. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$x=\frac{t}{12}-1, \quad y=-\frac{7}{10t}+\frac{2}{5}.$$

Параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{12} - 1, \\ y = -\dfrac{7}{10}t + \dfrac{2}{5}, \\ z = t. \end{cases}$$

Выражая параметр t из каждого уравнения, получаем

$$\frac{x+1}{\dfrac{1}{2}} = \frac{y - \dfrac{2}{5}}{-\dfrac{7}{10}} = \frac{z}{1} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y - \dfrac{2}{5}}{-42} = \frac{z}{60}.$$

□

4.6.2. Угол между двумя прямыми

Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{4.56}$$

Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (*условие компланарности двух прямых*):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если величины l_1, m_1, n_1 не пропорциональны величинам l_2, m_2, n_2, то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

4.6.3. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (4.57)$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al + Bm + Cn = 0;$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Пример 4.19. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$$

и плоскости $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$x = -t + 2, \quad y + -t + 3, \quad z = 4t - 1.$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, получим

$$-t + 2 - 2t + 6 + 12t - 3 - 14 = 0,$$

откуда находим $t = 1$. Подставив это значение в параметрические уравнения прямой, находим координаты точки пересечения: $M(1; 2; 3)$. □

Пример 4.20. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой

$$\frac{x-4{,}5}{1} = \frac{y+3}{-0{,}5} = \frac{z-2}{1}.$$

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно вектору $\bar{s} = \{1; -0{,}5; 1\}$:

$$x - 2 - 0{,}5(y+1) + (z-1) = 0 \quad \text{или} \quad 2x - y + 2z - 7 = 0.$$

Далее находим точку M_0 пересечения прямой и плоскости (аналогично примеру 4.19). Получаем $M_0(2{,}5; -2; 0)$. Точка M_0 является серединой отрезка $M'M$. Из формул деления отрезка пополам

$$x_{M_0} = \frac{x_M + x_{M'}}{2}, \quad y_{M_0} = \frac{y_M + y_{M'}}{2}, \quad z_{M_0} = \frac{z_M + z_{M'}}{2}$$

находим

$$x_{M'} = 2x_{M_0} - x_M = 3, \quad y_{M'} = 2y_{M_0} - y_M = -3,$$
$$z_{M'} = 2z_{M_0} - z_M = -1.$$

Итак, $M'(3; -3; -1)$. □

4.6.4. Пучок плоскостей

Пусть прямая L определена общим уравнением (4.53), α и β — произвольные числа, одновременно не равные нулю. Тогда уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ + \beta((A_2x + B_2y + C_2z + D_2)) = 0 \qquad (4.58)$$

определяет плоскость, проходящую через прямую L. Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется *пучком плоскостей*. Уравнение вида (4.58) называется *уравнением пучка плоскостей*.

Если $\alpha \neq 0$, то уравнение (4.58) можно привести к виду

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda((A_2x + B_2y + C_2z + D_2)) = 0,$$

где $\lambda = \beta/\alpha$.

Пример 4.21. Найти проекцию прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

на плоскость $2x - 3y - 4z + 5 = 0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в виде уравнений двух плоскостей:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} \quad \text{или} \quad 3x - 2y - 5 = 0;$$
$$\frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{или} \quad x + 2z - 5 = 0.$$

Записываем уравнение пучка плоскостей, проходящих через заданную прямую:

$$3x - 2y - 5 + \lambda(x + 2z - 5) = 0$$
$$\text{или} \quad (3+\lambda)x - 2y + 2\lambda z - 5 - 5\lambda = 0.$$

Выбираем из пучка плоскость, перпендикулярную к заданной. Условием перпендикулярности двух плоскостей является равенство $\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = 0$, где $\bar{N}_1 = \{2; -3; -4\}$, $\bar{N}_2 = \{3+\lambda; -2; 2\lambda\}$ — нормальные вектора плоскостей. Вычисляя скалярное произведение, получаем

$$\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = 2 \cdot (3+\lambda) - 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2\lambda = 0$$

или $12 - 6\lambda = 0$, откуда $\lambda = 2$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка плоскостей, находим уравнение проектирующей плоскости: $5x - 2y + 4z - 15 = 0$. Искомая проекция — линия пересечения плоскости проекции и проектирующей плоскости — определяется уравнениями

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5 = 0, \\ 5x - 2y + 4z - 15 = 0. \end{cases}$$ □

§ 4.7. Поверхности второго порядка

4.7.1. Основные понятия

Определение 4.5. *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0, \quad (4.59)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00} — действительные числа, причем a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не равны нулю одновременно.

В теории поверхностей второго порядка классифицируют и изучают различные виды поверхностей. Методом их изучения является так называемый *метод сечения*: исследуются сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным, или самими координатными плоскостями, и по виду сечений делается вывод о форме поверхности.

Существует семнадцать видов поверхностей второго порядка. Идея классификации поверхностей основана на приведении их уравнений к каноническому виду в результате преобразования системы координат в каноническую.

Рассмотрим подробнее шесть видов поверхностей второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, конус, эллиптический параболоид и гиперболический параболоид.

4.7.2. Эллипсоид

Эллипсоидом (рис. 4.37) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.60}$$

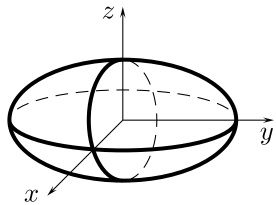

Рис. 4.37

В частности, если $a = b = c$, то получаем *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с центром в начале координат и радиусом a.

Числа a, b, c называются *полуосями* эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Точки пересечения эллипсоида с осями координат $A_1(-a;0;0)$, $a_2(a;0;0)$, $B_1(0;-b;0)$, $B_2(0;b_2;0)$, $C_1(0;0;-c)$, $C_2(0;0;c)$ называются его *вершинами*.

Оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсоида, начало координат — его центром симметрии, а координатные плоскости — плоскостями симметрии.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью xOy: $z = 0$. Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

и представляет собой эллипс с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рассматривая аналогично сечения эллипсоида координатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, а также плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$, $z = h_3$), получаем кривые второго порядка эллиптического типа. Это — либо эллипс (при $h_1 < a$, $h_2 < b$, $h_3 < c$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $|h_1| = a$, $|h_2| = b$, $|h_3| = c$, либо мнимый эллипс (при $h_1 > a$, $h_2 > b$, $h_3 > c$).

4.7.3. Однополостный гиперболоид

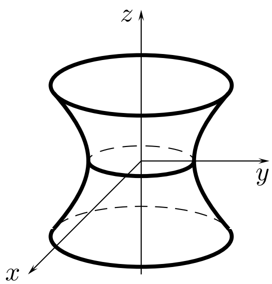

Рис. 4.38

Однополостным гиперболоидом (рис. 4.38) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (4.61)$$

Оси канонической системы координат являются осями симметрии однополостного гиперболоида, начало координат — его центром симметрии, а координатные плоскости — плоскостями симметрии. Оси абсцисс и ординат пересекают однополостный гиперболоид в точках $A_1(-a; 0; 0)$, $A_2(a; 0; 0)$, $B_1(0; -b; 0)$, $B_2(0; b; 0)$, которые называются его *вершинами*. Ось аппликат Oz, не имеющая с гиперболоидом общих действительных точек, называется его *мнимой осью*.

Если рассмотреть сечения однополостного гиперболоида плоскостью xOy: $z = 0$ или плоскостями, параллельными ей ($z = h_3$), то в сечении получаются эллипсы. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется *горловым*.

Теперь возьмем сечение однополостного гиперболоида плоскостью xOz: $y = 0$. Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

и представляет собой гиперболу с действительной осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассматривая аналогично сечения гиперболоида плоскостью yOz: $x = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскостям xOz: $y = h_2$ и yOz: $x = h_1$, получаем кривые второго порядка гиперболического типа. Это — либо гипербола (при $|h_1| \neq a$, $|h_2| \neq b$), либо пара пересекающихся прямых (при $|h_1| = a$, $|h_2| = b$). Например, сечение однополостного гиперболоида плоскостью $x = a$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a \end{cases}$$

и представляет собой пару пересекающихся прямых с каноническим уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

4.7.4. Двуполостный гиперболоид

Двуполостным гиперболоидом (рис. 4.39) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (4.62)$$

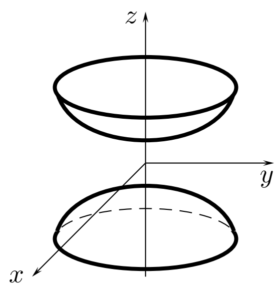

Рис. 4.39

Ось аппликат Oz канонической системы координат является осью симметрии двуполостного гиперболоида, начало координат — его центром симметрии, а координатные плоскости — плоскостями симметрии. Ось аппликат пересекает гиперболоид в точках $C_1(0; 0; -c)$, $C_2(0; 0; c)$, которые называются его *вершинами*. Сама ось аппликат называется *действительной осью* гиперболоида.

Если рассмотреть сечение двуполостного гиперболоида координатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, и плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$), то в сечении получаются гиперболы.

Рассматривая аналогично сечения гиперболоида плоскостью xOy: $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy: $z = h$, получаем кривые второго порядка эллиптического типа. Это — либо эллипс (при $|h| > c$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $|h| = c$), либо мнимый эллипс (при $|h| < c$). Например, при $|h| > c$ сечение двуполостного гиперболоида плоскостью

$z = h$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

и каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right) a^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right) b^2} = 1.$$

4.7.5. Конус второго порядка

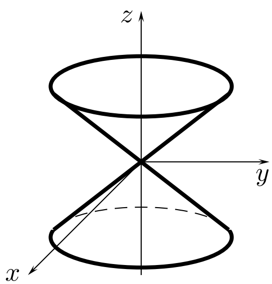

Рис. 4.40

Конус второго порядка (рис. 4.40) в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (4.63)$$

Эта поверхность второго порядка состоит из прямых, пересекающихся в одной точке — *вершине* конуса. Действительно, если точка с координатами (x_0, y_0, z_0) удовлетворяет уравнению конуса, то ему удовлетворяют также точки с координатами $x = x_0 t$, $y = y_0 t$, $z = z_0 t$ при любом значении параметра t. Записанные уравнения являются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через начало координат и точку (x_0, y_0, z_0). Конус состоит из таких прямых, называемых *образующими* конуса. Ось аппликат канонической системы координат называется его осью.

Оказывается, плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не пересекает его в другой точке, либо пересекает по двум образующим, либо касается вдоль образующей. Любая плоскость, параллельная этим плоскостям, в первом случае пересекает конус по эллипсу, во втором случае — пересекает по гиперболе, в третьем случае — по параболе. Поэтому эллипс, гиперболу, параболу часто называют *коническими сечениями*.

4.7.6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Эллиптическим параболоидом называется поверхность второго порядка (рис. 4.41), которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{4.64}$$

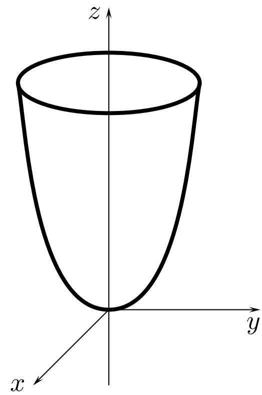

Рис. 4.41

Ось аппликат Oz канонической системы координат является единственной осью симметрии эллиптического параболоида, плоскости xOz и yOz — плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* эллиптического параболоида, пересекает его в начале координат, эта точка называется *вершиной* параболоида.

Если рассмотреть сечение эллиптического параболоида координатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, и плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$), то в сечении получаются параболы. Например, сечение эллиптического параболоида плоскостью $y = h_2$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h_2, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} = 2z$$

и уравнение параболы

$$x^2 = 2a^2 z - \frac{a^2 h_2^2}{b^2}.$$

Получаемые таким образом параболы лежат в параллельных плоскостях, отличаясь лишь положением в пространстве.

Рассматривая аналогично сечения эллиптического параболоида плоскостью xOy: $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy: $z = h$, получаем кривые второго порядка эллиптического типа. Это — либо эллипс (при $h > 0$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $h = 0$), либо мнимый эллипс (при $h < 0$).

4.7.7. Гиперболический параболоид

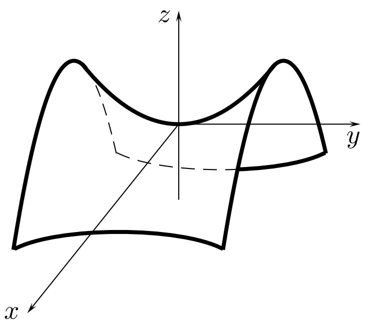

Рис. 4.42

Гиперболическим параболоидом (рис. 4.42) называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \qquad (4.65)$$

Ось аппликат Oz канонической системы координат является единственной осью симметрии гиперболического параболоида, плоскости xOz и yOz — плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* гиперболического параболоида, пересекает его в начале координат; эта точка называется *вершиной* параболоида.

Если рассмотреть сечение гиперболического параболоида координатными плоскостями xOz: $y = 0$ и yOz: $x = 0$, и плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$), то в сечении получаются параболы. Например, сечение гиперболического параболоида плоскостью $x = h_1$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h_1, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое получаем уравнение параболы:

$$\frac{h_1^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad y^2 = -2b^2 z + \frac{b^2 h_1^2}{a^2}.$$

Рассматривая аналогично сечения гиперболического параболоида плоскостью xOy: $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy: $z = h$, получаем кривые второго порядка гиперболического типа. Это либо гипербола (при $|h| > 0$), либо пара пересекающихся прямых (при $h = 0$). Таким образом, по форме гиперболический параболоид напоминает седло, эту поверхность часто называют *седловой*.

4.7.8. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой l. При этом линия L называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а каждая из прямых, составляющих эту поверхность и параллельных прямой l, — *образующей* (рис. 4.43).

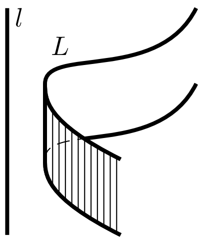

Рис. 4.43

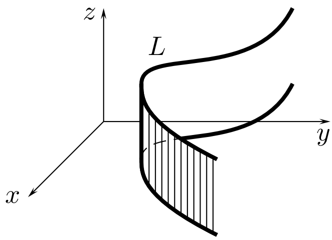

Рис. 4.44

Мы будем рассматривать только такие цилиндрические поверхности, направляющие которых лежат в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости. Уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, не содержит z (рис. 4.44), т.е. имеет вид $F(x, y) = 0$. В качестве направляющей L поверхности $F(x, y) = 0$ можно взять ее линию пересечения с плоскостью xOy. Уравнение этой направляющей имеет вид

$$L: \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Если уравнение $F(x, y) = 0$ является алгебраическим уравнением второй степени, то цилиндрическая поверхность называется *цилиндром второго порядка*.

Уравнения цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны оси Oy и оси Ox, имеют вид $F(x, z) = 0$ и $F(y, z) = 0$ соответственно.

В зависимости от вида направляющей различают эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Эллиптический цилиндр (рис. 4.45):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Его образующие параллельны оси Oz, а направляющей является эллипс с полуосями a и b, лежащий в плоскости xOy. В частности, если $a = b$, то направляющей является окружность, а поверхность является *прямым круговым цилиндром*, уравнение которого имеет вид $x^2 + y^2 = a^2$.

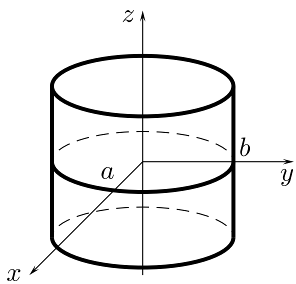

Рис. 4.45

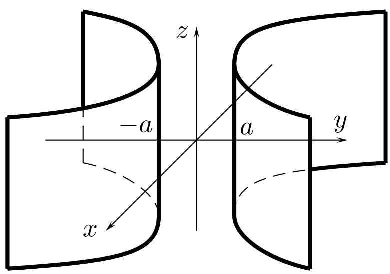

Рис. 4.46

2. Гиперболический цилиндр (рис. 4.46):

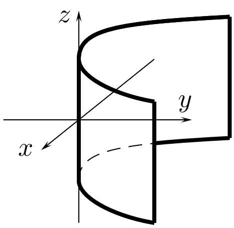

Рис. 4.47

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Образующие этой поверхности параллельны оси Oz, а направляющей служит лежащая в плоскости xOy гипербола с действительной полуосью a и мнимой полуосью b.

3. Параболический цилиндр (рис. 4.47):

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

Его направляющей является парабола, лежащая в плоскости xOy, а образующая параллельна оси Oz.

4.7.9. Классификация поверхностей второго порядка

Кроме рассмотренных выше, остальные виды поверхностей относятся к классам *пар плоскостей* (пересекающихся, параллельных и совпавших) и *мнимых поверхностей* (мнимый эллипсоид, мнимый конус, мнимый эллиптический цилиндр, пары мнимых пересекающихся и мнимых параллельных плоскостей).

№	Виды поверхностей	Уравнение
1	Эллипсоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
2	Мнимый эллипсоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
3	Однополостный гиперболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
4	Двуполостный гиперболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
5	Эллиптический параболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$
6	Гиперболический параболоид	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$
7	Конус	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
8	Мнимый конус	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$
9	Эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
10	Гиперболический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
11	Параболический цилиндр	$y^2=2px$
12	Мнимый эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

Продолжение табл.

№	Виды поверхностей	Уравнение
13	Пара мнимых пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
14	Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
15	Пара параллельных плоскостей	$x^2 - a^2 = 0$
16	Пара мнимых параллельных плоскостей	$x^2 + a^2 = 0$
17	Пара совпавших плоскостей	$x^2 = 0$

Пример 4.22. Установить тип заданной поверхности и построить ее:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

Решение. Данная поверхность — эллипсоид с полуосями $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$ (рис. 4.48). □

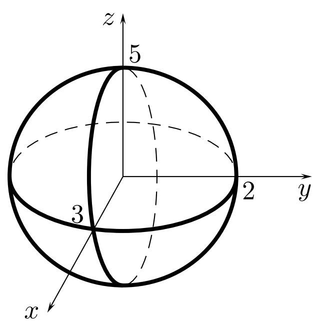

Рис. 4.48

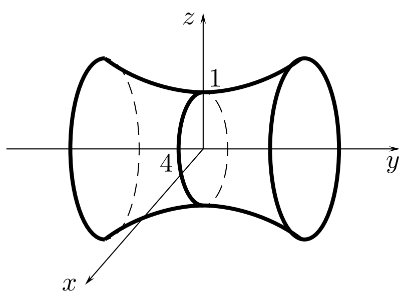

Рис. 4.49

Пример 4.23. Установить тип заданной поверхности и построить ее:

$$\frac{x^2}{16} + z^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Решение. Данная поверхность является однополостным гиперболоидом. Если рассмотреть сечение плоскостью xOz: $y = 0$ или плоскостями, параллельными ей ($y = h$), то в сечении получаются эллипсы. Теперь возьмем сечение поверхности плоскостью xOy: $z = 0$, оно является гиперболой

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Аналогично при $x = 0$ получаем гиперболу

$$\frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Поверхность построена на рис. 4.49. □

Пример 4.24. Установить тип заданной поверхности и построить ее: $y = 2 + x^2 + z^2$.

Решение. Данная поверхность — эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0; 2; 0)$ (рис. 4.50). □

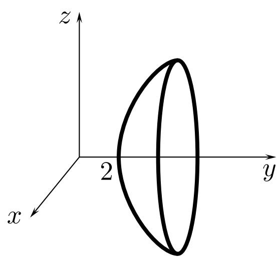

Рис. 4.50

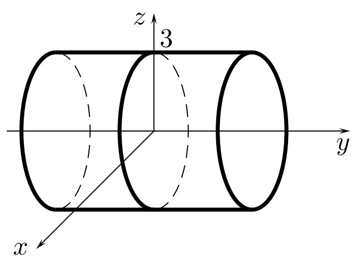

Рис. 4.51

Пример 4.25. Установить тип заданной поверхности и построить ее: $x^2 + z^2 = 9$.

Решение. Данная поверхность является круговым цилиндром с образующей, параллельной оси Oy (рис. 4.51). □

Пример 4.26. Найти точки пересечения поверхности и прямой, заданных соответственно уравнениями

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 4t, \\ y = -3t, \\ z = 4t - 2. \end{cases}$$

Подставив их в уравнение поверхности, получаем

$$\frac{16t^2}{16} + \frac{9t^2}{9} - \frac{1}{4}(16t^2 - 16t + 4) = 1.$$

Решая квадратное уравнение, находим $t_1 = t_2 = 1$. Подставив в параметрические уравнения прямой, находим точку пересечения прямой и поверхности: $(4; -3; 2)$. □

Задачи для самостоятельного решения

1. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет окружность. Найти ее центр C и радиус R.
а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

Ответ: а) $C(2; -3)$, $R = 4$; б) $C(4; 0)$, $R = 4$; в) $C(0; -2)$, $R = 2$.

2. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс. Найти его центр C, полуоси, эксцентриситет.
а) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
б) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

Ответ: а) $C(-1; 2)$, $a = 5$, $b = 4$, $\varepsilon = 3/5$; б) $C(1; -2)$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $\varepsilon = 1/2$.

3. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу. Найти его центр C, полуоси, эксцентриситет.
а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

Ответ: а) $C(2; -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 5/3$; б) $C(-5; 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $\varepsilon = 5/4$; в) $C(2; -1)$, $a = 4$, $b = 3$, $\varepsilon = 5/4$.

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу. Найти координаты его вершины A и величину параметра p.

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $x^2 = 2 - y$;

в) $y = 4x^2 - 8x - 7$; г) $y = -\dfrac{x^2}{6} + 2x - 7$.

Ответ: а) $A(2;0)$, $p = 2$; б) $A(0;2)$, $p = 1/2$; в) $A(1;3)$, $p = 1/8$; г) $A(6;-1)$, $p = 3$.

5. Записать уравнения заданных кривых в полярных координатах:

а) $y = x$; б) $y = 1$; в) $x + y - 1 = 0$;
г) $x^2 + y^2 = a^2$; д) $x^2 - y^2 = a^2$; е) $x^2 + y^2 = ax$;
ж) $x^2 + y^2 = ay$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}\varphi = 1$; б) $\rho\sin\varphi = 1$; в) $\rho\cos(\varphi - \pi/4) = \sqrt{2}/2$; г) $\rho = a$; д) $\rho^2 = a^2/\cos 2\varphi$; е) $\rho = a\cos\varphi$; ж) $\rho = a\sin\varphi$.

6. Записать уравнения заданных кривых в декартовых прямоугольных координатах и построить эти кривые:

а) $\rho = 5$; б) $\operatorname{tg}\varphi = -1$; в) $\rho\cos\varphi = 2$;
г) $\rho\sin\varphi = 1$; д) $\rho = 2a\cos\varphi$; е) $\rho = 2a\sin\varphi$.

Ответ: а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $y = -x$; в) $x = 2$; г) $y = 1$; д) $(x - a)^2 + y^2 = a^2$; е) $x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

7. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку $M(1;1;1)$ параллельно плоскости P: $-2x + y - z + 1 = 0$. Вычислить расстояние $d(P, P')$.

Ответ: $2x - y + z - 2 = 0$; $d = 1/\sqrt{6}$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ и $M_3(3;0;1)$.

Ответ: $x + y - 3 = 0$.

9. Написать уравнение плоскости P', проходящей через три заданные точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ перпендикулярно заданной плоскости P: $-x + y - 1 = 0$.

Ответ: $x + y - 3 = 0$.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;1)$ параллельно векторам $\bar{a}_1(0;1;2)$ и $\bar{a}_2(-1;0;1)$.

Ответ: $-x-2y+z=0$.

11. Найти косинус угла между плоскостями P_1: $-x+2y-z+1=0$ и P_2: $y+3z-1=0$.

Ответ: $-1/(2\sqrt{15})$.

12. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью P: $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

Ответ: 8.

13. Написать каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} x+2y-3z-5=0, \\ 2x-y+z+2=0. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{x-\frac{1}{5}}{-1}=\dfrac{y-\frac{12}{5}}{-7}=\dfrac{z}{-5}$.

14. Найти проекцию точки $M(0;1;2)$ на прямую

$$L:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}.$$

Ответ: $(3/5;-1/5;-1)$.

15. Написать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(1;-2;1)$ и $M_2(3;1;-1)$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

16. Найти угол между прямой $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{4}$ и плоскостью $x-3y-z+8=0$.

Ответ: $\arcsin(5/\sqrt{319})$.

17. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;0;-3)$ параллельно: а) вектору $\bar{q}(2;-3;5)$; б) прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$; в) оси Ox; г) оси Oz.

О т в е т : а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$; б) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$;
в) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{0}$; г) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{1}$.

18. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ и $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$;

б) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = z$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$.

О т в е т : а) $(3;4;-2)$ и $(6;-2;2)$; б) общих точек нет.

19. Установить тип заданных поверхностей и построить их:

а) $z = 2x^2 + 4y^2$; б) $z^2 = 2x^2 + 9y^2$;

в) $x^2 + y^2 = 4x$; г) $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$;

д) $x^2 + y^2 - z^2 = 9$.

О т в е т : а) эллиптический параболоид; б) конус; в) круговой цилиндр; г) эллипсоид; д) однополостный гиперболоид.

Глава 5

Комплексные числа

§ 5.1. Определение комплексного числа

Определение 5.1. Число вида

$$z = x + iy, \tag{5.1}$$

где x и y — любые действительные числа, а i — мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется *комплексным числом*. Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Запись комплексного числа в виде (5.1) называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*; если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x. Это означает, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т.е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Определение 5.2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_1$.

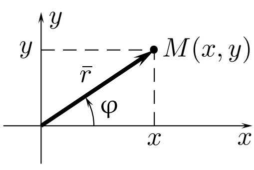

Рис. 5.1

Определение 5.3. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Комплексное число $z = x + iy$ может быть изображено в декартовой координатной плоскости xOy либо точкой с абсциссой x и ординатой y, либо радиус-вектором этой точки (рис. 5.1). Длина этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Угол, образованный радиус-вектором числа z с положительным направлением действительной оси Ox, называется *аргументом* числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Величина $\operatorname{Arg} z$ многозначна и определена с точностью до числа, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Величина $\arg z$ называется *главным значением аргумента* и $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

Пример 5.1. Определить множество точек, для которых: а) $\operatorname{Re} z \leqslant 5$; б) $\pi/4 < \arg z < \pi/3$; в) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$.

Решение. а) Так как $\operatorname{Re} z = x$, то точки искомого множества удовлетворяют неравенству $x \leqslant 5$ (рис. 5.2).

б) Искомая область есть угол с вершиной в точке $z = 0$ между лучами, составляющими с действительной осью Ox углы $\pi/4$ и $\pi/3$ (рис. 5.3).

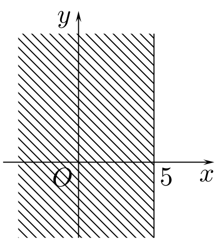

Рис. 5.2

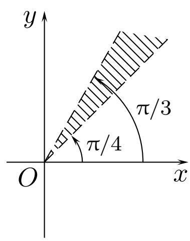

Рис. 5.3

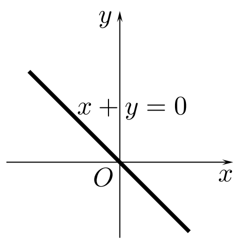

Рис. 5.4

в) Так как $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, то точки искомого множества — это точки, лежащие на прямой $y + x = 0$ (рис. 5.4). □

Пример 5.2. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 1 - i$.

Решение. По формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ находим

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\,.$$

Так как точка $1 - i$ лежит в четвертой четверти, то

$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}. \qquad \square$$

§ 5.2. Действия над комплексными числами

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, производятся по следующим правилам:

1) сложение и вычитание:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

2) умножение:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

3) деление:

$$\frac{x_1 + y_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 5.3. Вычислить:

а) $(2 + 3i) + (4 + 2i)$; б) $(1 + i)(1 - 2i)$; в) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$.

Решение. а)

$$(2 + 3i) + (4 + 2i) = (2 + 4) + i(3 + 2) = 6 + 5i;$$

б)

$$(1 + i)(1 - 2i) = 1 + i - 2i - 2i^2 =$$
$$= 1 - i - 2 \cdot (-1) = 3 - i;$$

в)

$$\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1^2 + i^2 - 2i}{1 - i^2} = \frac{-2i}{2} = -i. \qquad \square$$

Пример 5.4. Решить уравнение
$$(-5+2i)x-(3-4i)y=2-i.$$

Решение. Раскрыв скобки в левой части уравнения и сгруппировав действительные и мнимые части, получаем
$$(-5x-3y)+i(2x+4y)=2-i.$$
Отсюда, используя условие равенства двух комплексных чисел, приходим к системе уравнений
$$\begin{cases} -5x-3y=2, \\ 2x+4y=-1, \end{cases}$$
решая которую, находим $x=-5/14$, $y=-1/14$. $\square$

§ 5.3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа $z=x+iy$ имеют вид
$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{5.2}$$
$$z=re^{i\varphi}, \tag{5.3}$$
где r и φ — соответственно модуль и главное значение аргумента комплексного числа z.

При умножении комплексных чисел вида (5.2) их модули перемножаются, а аргументы складываются:
$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{5.4}$$
Это правило справедливо для любого конечного числа множителей. В частности,
$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{5.5}$$
Формула (5.5) называется *формулой Муавра*.

Пример 5.5. Записать комплексные числа $z_1=-1+i$ и $z_2=-1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Для z_1 имеем
$$r=|z_1|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},$$
$$\arg z=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4},$$

т.е. $\varphi = 3\pi/4$. Поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Для z_2 имеем

$$r = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$$

т.е. $\varphi = \pi$. Поэтому

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}. \qquad \square$$

Пример 5.6. Найти $(1 + i\sqrt{3}\,)^9$.

Решение. Запишем сначала число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3}\,)^2} = 2, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3};$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем

$$z^9 = (1 + i\sqrt{3}\,)^9 = 2^9\left[\cos\left(9\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(9\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9 \cdot (-1) = -512. \qquad \square$$

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули соответственно делятся, а аргументы соответственно вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (5.6)$$

Пример 5.7. Вычислить $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

Решение. Обозначим $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$. В тригонометрической форме оно имеет вид

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

(см. пример 5.6). Пусть $z_2 = 1 - i$. Используя результат примера 5.2, в тригонометрической форме комплексное число

имеет вид
$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\,\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$
Используя правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме, получаем
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\,\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\,\left[\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right].$$
По формуле Муавра получим
$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20} =$$
$$= (\sqrt{2}\,)^{20}\left[\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\cdot 20\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\cdot 20\right)\right] =$$
$$= 2^{10}\left[\cos\left(-\frac{85\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{85\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 1024\left[\cos\left(-28\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-28\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 512(1 - i\sqrt{3}\,).$$
□

§ 5.4. Корень из комплексного числа

Определение 5.4. *Корнем* n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству $w^n = z$.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{5.7}$$
где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Все значения $\sqrt[n]{z}$ являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Пример 5.8. Найти значения: а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. а) Пусть $z = i = 0 + 1 \cdot i$, тогда модуль $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, аргумент $\varphi = \pi/2$. В тригонометрической форме

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Используя формулу для извлечения корней, получаем

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Отсюда имеем:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i.$$

б) Обозначим $z = -1$. В тригонометрической форме

$$z = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi).$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Получаем следующие значения корней:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

а) $(2+3i)(3-i)$; б) $(1+2i)^2$; в) $(1-i)^3-(1+i)^3$;

г) $\dfrac{2-i}{1+i}$; д) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

О т в е т : а) $9+7i$; б) $-3+4i$; в) $-4i$; г) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$; д) i.

2. Дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\operatorname{Re} z \geqslant 0$; б) $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1$; в) $|\operatorname{Im} z| \leqslant 2$;

г) $|z|<1$; д) $1<|z+2| \leqslant 2$; е) $|z|>1-\operatorname{Re} z$;

ж) $z=\bar{z}$.

О т в е т : а) полуплоскость $x \geqslant 0$; б) полоса $0 \leqslant y < 1$; в) полоса $|y| \leqslant 2$; г) внутренняя часть круга с центром в начале координат и радиуса 1; д) кольцо между двумя окружностями $(x+2)^2+y^2=1$ и $(x+2)^2+y^2=4$; е) $D=\{(x,y) \mid y^2>1-2x\}$; ж) ось Ox.

3. Найти все значения корней:

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[4]{-16}$; в) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

О т в е т : а) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; б) $\pm\sqrt{2}(1+i)$, $\pm\sqrt{2}(1-i)$; в) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$.

4. Решить уравнения:

а) $z^4+18z^2+81=0$; б) $z^2+2z+5=0$.

О т в е т : а) $\pm 3i$; б) $-1 \pm 2i$.

Список рекомендуемой литературы

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2007.

2. *Беклемишева Л. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемешева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. — М.: Физматлит, 2006.

3. *Беловодский В. Н.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. пособие по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» / В. Н. Беловодский. — Донецк: Донбасс, 2014. — 138 с.

4. *Берман А. Ф.* Краткий курс математического анализа / А. Ф. Берман, И. Г. Араманович. — СПб.: Лань, 2006.

5. *Брылевская Л. И.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие / Л. И. Брылевская, И. А. Лапин, Л. С. Ратафьева. — СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008. — 156 с.

6. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. — М.: Наука, 1975. — 272 с.

7. *Ильин В. А.* Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Т. Позняк. — М.: Физматлит, 2006.

8. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии для вузов / Д. В. Клетеник. — М.: Наука, 1980. — 240 с.

9. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. — Т. 1. — М.: Интеграл-Пресс, 2001. — 415 с.

10. *Фадеев Д. К.* Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фадеев, И. С. Соминский. — М.: Наука, 1968. — 440 с.

11. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ: метод. указания и контрольные задания / сост. В. Г. Агаков, А. Н. Быкова, И. И. Ильина, Т. В. Картузова; Чуваш. ун-т. — Чебоксары, 2011. — 64 с.

Оглавление

Учебно-теоретическое издание

Авторы-составители:
Быкова Алевтина Николаевна
Картузова Татьяна Вячеславовна
Кирпикова Ольга Ивановна

**ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**

Учебное пособие

Редактор А. Н. Антонова
Компьютерный набор, верстка и правка В. Г. Сытина

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 25.03.16. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Гарнитура Журнальная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,90. Уч.-изд. л. 7,65. Тираж 250 экз. Заказ № 259.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15