МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Методические указания к типовым расчетам

Чебоксары 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Методические указания к типовым расчетам

Чебоксары 2009

УДК 517.37, 514.542

Составители: Н. А. Ращепкина,
О. И. Кирпикова,
А. С. Сабиров

Кратные интегралы и векторный анализ : метод. указания к типовым расчетам / сост. Н. А. Ращепкина, О. И. Кирпикова, А. С. Сабиров ; Чуваш. ун-т. Чебоксары, 2009. 31 с.

Даны рекомендации для самостоятельного выполнения типовых расчетов «Кратные интегралы» и «Векторный анализ» в курсе высшей математики. Приведены решения всех задач 31-го варианта из книги Кузнецова Л. А. «Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)».

Для студентов I–II курсов технических факультетов.

Утверждено Методическим советом университета

Отв. редактор канд. физ.-мат. наук, профессор В. Г. Агаков

Изучение студентами технических факультетов разделов «Кратные интегралы» и «Векторный анализ» в курсе высшей математики сопровождается выполнением типовых расчетов.

Типовой расчет «Кратные интегралы» содержит 16 заданий.

Задание 1 заключается в изменении порядка интегрирования в повторном интеграле.

Задания 2, 3 состоят в вычислении двойных интегралов. Следует иметь в виду, что от выбора порядка интегрирования зависят трудоемкость (в задании 2) и даже возможность (в задании 3) вычисления двойных интегралов.

Задания 4, 5 требуют вычисления тройных интегралов. При решении выбор порядка интегрирования также является небезразличным для успешного выполнения задания.

Задания 6, 7 состоят в нахождении площади фигур, ограниченных линиями. В задании 7 целесообразно ввести полярные координаты.

Задания 8, 9 — физического содержания, в них требуется найти массу пластинки. Для решения рекомендуется ввести в задании 8 полярные, а в задании 9 желательно — обобщенные полярные координаты.

Задания 10–15 заключаются в отыскании объема тел, заданных ограничивающими их поверхностями. В заданиях 10, 11 объем может быть найден с помощью двойного интеграла, остальные задания рассчитаны на использование тройных интегралов, которые целесообразно вычислять в декартовых (задание 12), цилиндрических (задания 13, 14) или сферических (задание 15) координатах. Задание 14 требует специального приема для отыскания проекции линии пересечения поверхностей на координатную плоскость.

Задание 16 — физического содержания, в нем требуется найти массу тела, используя тройной интеграл.

Типовой расчет «Векторный анализ» содержит 12 заданий.

Задание 1 заключается в отыскании производной скалярного поля по направлению нормали к заданной поверхности.

Задание 2 требует определения угла между градиентами скалярных полей в заданной точке.

Задание 3 состоит в определении векторных линий для заданного векторного поля.

Задания 4–6 требуют вычисления потоков через незамкнутые поверхности. Выполнение задания 4 предлагается двумя способами. Первый способ — непосредственно по определению потока. Второй способ основан на использовании формулы связи поверхностных интегралов первого и второго родов. Поскольку подынтегральная функция поверхностного интеграла, выражающего числовое значение потока, постоянная, то вычисление сводится к определению площади поверхности, которая может быть найдена элементарными способами как площадь части кругового цилиндра, кругового конуса или сферы. Способ решения может быть выбран любой. Задание 5 рассчитано на вычисление поверхностного интеграла путем проектирования на одну из координатных плоскостей. В задании 6 можно вычислить предварительно поток через замкнутую поверхность, ограниченную заданной плоскостью и координатными плоскостями, пользуясь формулой Остроградского-Гаусса. А затем применить полученный результат для вычисления потока через заданную незамкнутую поверхность. В данных методических указаниях задание 6 выполнено непосредственным сведением к вычислению суммы трех двойных интегралов [5, с. 162].

Задания 7–9 требуют вычислить поток через замкнутую поверхность по формуле Остроградского–Гаусса. Задание 7 может быть выполнено одним из двух способов. Первый — непосредственно по определению. Второй — поскольку поверхность замкнутая и дивергенция векторного поля постоянна, то вычисление тройного интеграла, выражающего поток, сводится к вычислению объема, который может быть найден по элементарным формулам. В задании 8 дивергенция также постоянна, но определение объема требует вычисления тройного интеграла. В задании 9 дивергенция является переменной.

Задание 10 заключается в вычислении работы силы при перемещении вдоль линии в векторном поле.

Задания 11, 12 состоят в отыскании циркуляции векторного поля вдоль заданного контура. В задании 11 циркуляция выражается криволинейным интегралом второго рода. Задание 12 рассчитано на применение формулы Стокса.

Кратные интегралы

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Вначале по пределам интегрирования определим область интегрирования. Полагая x равным пределам первого интеграла с переменной x, а y равным пределам того же интеграла с переменной y, получим уравнения линий, ограничивающих область интегрирования для первого интеграла: $x = -2$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{4-x^2}$ (верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 4$). Область интегрирования для второго интеграла суммы ограничена линиями $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2-\sqrt{4-x^2}$ (нижняя половина окружности $x^2+(y-2)^2 = 4$). Построим их на рисунке и заштрихуем область интегрирования (рис. 1). Когда переменная y меняется от 0 до 1, то x изменяется от полуокружности $x = -\sqrt{4-y^2}$ до полуокружности $x = -\sqrt{4y-y^2}$.

Итак, после изменения порядка интегрирования получим

$$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Задание 2. Вычислить

$$\iint\limits_{D} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\,dxdy, \quad D:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}.$$

Решение. Построим область интегрирования D (рис. 2). Для вычисления интеграла по указанной области удобнее применять следующий порядок интегрирования:

$$\iint\limits_{D} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\,dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\,dy =$$

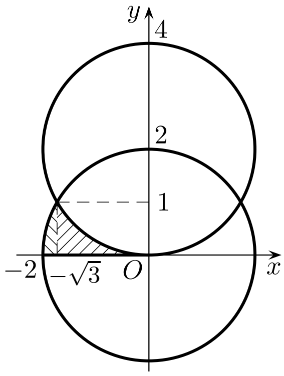

Рис. 1

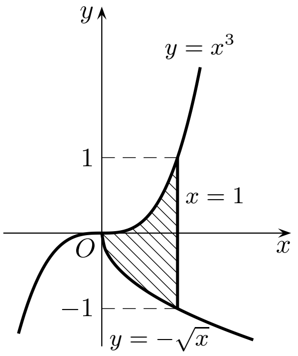

Рис. 2

$$= \int\limits_0^1 dx \left(54x^2 \cdot \frac{y^3}{3} + 150x^4 \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(18x^{11} + 18x^{7/2} + 30x^{19} + 30x^{13/2} \right) dx = 11.$$

Задание 3. Вычислить

$$\iint\limits_D 12ye^{6xy}\, dxdy, \quad D: \ y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{3}.$$

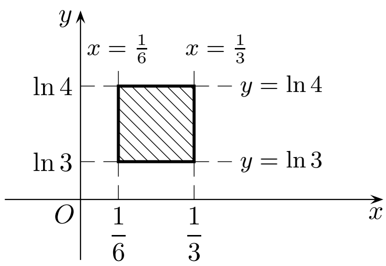

Рис. 3

Решение. В данном случае областью интегрирования является прямоугольник (рис. 3). Для удобства вычислений применим следующий порядок интегрирования:

$$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy}\,dx = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{1/6}^{1/3} 2e^{6xy}\,d(6xy) =$$

$$= \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} 2e^{6xy}\Big|_{1/6}^{1/3} dy = 2\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} \left(e^{2y} - e^{y}\right)\,dy = 2\left(\frac{1}{2}e^{2y} - e^{y}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln 4} =$$

$$= e^{2\ln 4} - e^{2\ln 3} - 2e^{2\ln 4} + 2e^{2\ln 3} = 16 - 9 - 8 + 6 = 5.$$

Задание 4. Вычислить

$$\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(xy)\,dxdydz, \quad V:\ x = 2,\, y = \frac{x}{2},\ y = 0,\, z = 0,\ z = 1.$$

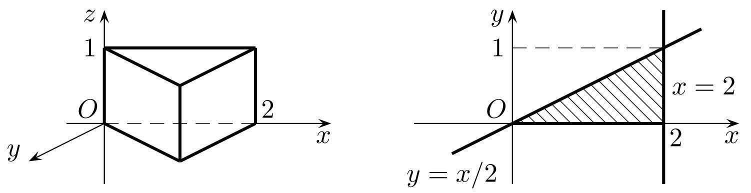

Рис. 4

Решение. Построим область интегрирования V и изобразим ее проекцию на плоскости xOy (рис. 4). Проставим пределы интегрирования и вычислим:

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x/2} x^2\,\mathrm{sh}(xy)\,dy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^2 dx \cdot x^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{ch}(xy)\Big|_0^{x/2} =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^2 x\left(\mathrm{ch}\,\frac{x^2}{2} - 1\right) dx = \int\limits_0^1 dz \left\{\int\limits_0^2 \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{2}\,d\frac{x^2}{2} - \int\limits_0^2 x\,dx\right\} =$$

$$= \int dz \left(\mathrm{sh}\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \int\limits_0^1 (\mathrm{sh}\,2 - 2)\,dz = \mathrm{sh}\,2 - 2.$$

Задание 5. Вычислить

$$\iiint\limits_V x^2 z\,dxdydz, \quad V:\ y = 3x,\, y = 0,\ x = 2,\, z = xy,\ z = 0.$$

Решение. Область V снизу ограничена плоскостью $z = 0$, сверху — гиперболическим параболоидом $z = xy$. Изобразим проекцию V на плоскости xOy (рис. 5). Вычислим:

$$\int_0^2 dx \int_0^{3x} dy \int_0^{xy} x^2 z\, dz = \int_0^2 dx \int_0^{3x} dy\, x^2 \frac{z^2}{2}\bigg|_0^{xy} =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{3x} dy\, \frac{1}{2} x^2 \cdot x^2 y^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4\, dx \int_0^{3x} y^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^4\, dx\, \frac{y^3}{3}\bigg|_0^{3x} = \frac{1}{6}\int_0^2 27x^7\, dx = \frac{27}{6}\cdot\frac{x^8}{8}\bigg|_0^2 = 144.$$

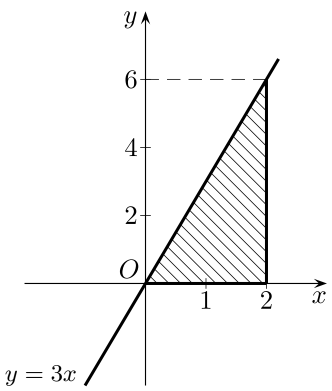

Рис. 5

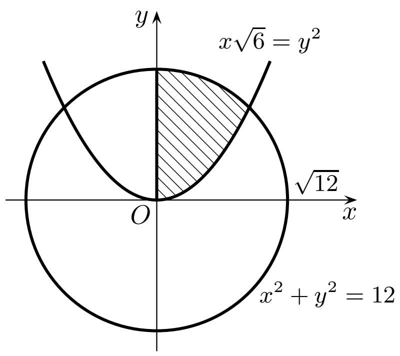

Рис. 6

Задание 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$ $(x \geqslant 0)$.

Решение. Выполним рисунок области (рис. 6). Площадь фигуры вычислим по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1}^{x_2} dx,$$

где

$$x_1(y) = \frac{y^2}{\sqrt{6}}, \quad x_2(y) = \sqrt{12 - y^2}.$$

Найдем точки пересечения параболы и окружности:

$$\begin{cases} x^2+y^2=12, \\ x\sqrt{6}=y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{12-y^2}, \\ x=\dfrac{y^2}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{12-y^2}=\dfrac{y^2}{\sqrt{6}}, \\ x=\dfrac{y^2}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

$$12-y^2=\frac{y^4}{6}, \quad y^2=a>0, \quad a^2+6a-72=0, \quad y^2=6, \quad y=\pm\sqrt{6}.$$

Вычислим:

$$S=\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{6}}\right)dy=\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\sqrt{12-y^2}\,dy-\frac{1}{3\sqrt{6}y^3}\Bigg|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} y=\sqrt{12}\sin t \\ dy=\sqrt{12}\cos t \end{array}\right|=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{12}\cos t\sqrt{12}\cos t\,dt-\frac{1}{3\sqrt{6}}2\cdot 6\sqrt{6}=$$

$$=12\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 t\,dt-4=6\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt-4=$$

$$=6\left(t+\frac{1}{2}\sin 21\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-4=6\cdot 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-4=3\pi+6-4=3\pi+2.$$

Задание 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$.

Решение. Наша фигура ограничена двумя окружностями: $x^2+(y-2)^2=4$, $x^2+(y-4)^2=16$, прямой $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ и осью Oy (рис. 7). Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Уравнение первой окружности в полярных координатах $r_1=4\sin\varphi$, второй — $r_2=8\sin\varphi$. Для нашей фигуры $\dfrac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $4\sin\varphi\leqslant r\leqslant 8\sin\varphi$. Площадь в полярных координатах вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}r\,dr=$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \, (64 \sin^2 \varphi - 16 \sin^2 \varphi) = 12 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= 12 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 12 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$= 4\pi + 3\sqrt{3}.$$

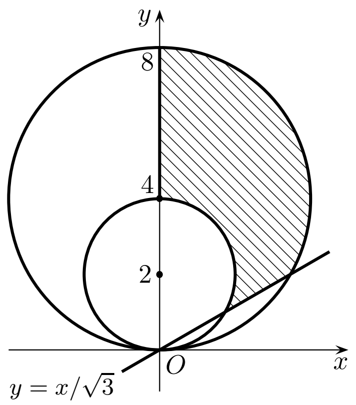

Рис. 7

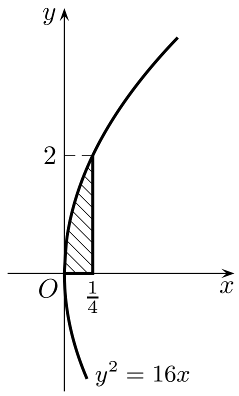

Рис. 8

Задание 8. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми $x = 1/4$, $y = 0$, $y^2 = 16x$ $(y \geqslant 0)$; $\mu = 16x + 9y^2/2$ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

Решение. Изобразим область интегрирования D (рис. 8). Массу пластинки определим по формуле

$$M = \iint\limits_D \mu(x,y) \, dxdy.$$

Вычислим

$$M = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2/16}^{1/4} \left(16x + \frac{9}{2} y^2 \right) dx = \int\limits_0^2 dy \left(8x^2 + \frac{9}{2} xy^2 \right) \Bigg|_{y^2/16}^{1/4} =$$

$$= \int_0^2 dy \left(\frac{1}{2} - \frac{8y^4}{256} + \frac{9}{8}y^2 - \frac{9}{2} \cdot \frac{y^4}{16} \right) =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32}y^4 + \frac{9}{8}y^2 - \frac{9}{32}y^4 \right) dy = \left(\frac{1}{2}y - \frac{10y^5}{5 \cdot 32} + \frac{9y^3}{3 \cdot 8} \right) \Bigg|_0^2 = 2.$$

Задание 9. Пластинка D задана неравенствами

$$1 \leqslant \frac{x^2}{16} + y^2 \leqslant 3, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant \frac{x}{4};$$

μ — поверхностная плотность: $\mu = x/y^5$. Найти массу пластинки.

Решение. Область D ограничена эллипсами

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1, \quad \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{3} = 1$$

и прямыми $x = 0$, $y = x/4$. Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$. Вычислим якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

В нашем случае $a = 4$, $b = 1$. Подставляя обобщенные полярные координаты в уравнение $y = x/4$, получим $\sin\varphi = \cos\varphi$ или $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = \pi/4$. Аналогично, подставляя в уравнение $x = 0$, получаем $\varphi = \pi/2$. Таким образом, $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

Вычислим массу пластинки по формуле

$$M = \iint_D \mu(x, y)\, dxdy.$$

Переходя к обобщенным полярным координатам, получаем

$$M = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4r\cos\varphi}{r^5\sin^5\varphi}\, 4r\, dr = 16 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\sin\varphi}{\sin^5\varphi} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dr}{r^3} =$$

$$= 16 \left(-\frac{1}{4\sin^4\varphi} \right) \Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \left(-\frac{1}{2r^2} \right) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} = 2(1-4)\left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 4.$$

Задание 10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$x = 17\sqrt{2y}, \quad x = 2\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = \frac{1}{2}.$$

Решение. Область интегрирования V расположена в первом октанте и ограничена параболическими цилиндрами $x = 17\sqrt{2y}$, $x = 2\sqrt{2y}$ и плоскостями $z = 0$ (снизу) и $z = \frac{1}{2} - y$ (сверху) (рис. 9).

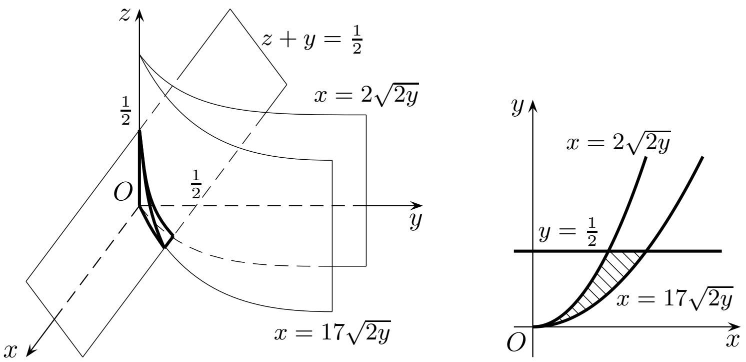

Рис. 9

Вычислим объем по формуле

$$V = \iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{1}{2} - y\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} dy \left(\frac{1}{2} - y\right) \int\limits_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}} dx = \int\limits_0^{1/2} dy \left(\frac{1}{2} - y\right) x \Bigg|_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}} =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} 15\sqrt{2y}\,dy = \frac{15\sqrt{2}}{2} \int\limits_0^{1/2} \sqrt{y}\,dy - 15\sqrt{2} \int\limits_0^{1/2} y^{3/2}\,dy =$$

$$= \frac{15}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} \Bigg|_0^{1/2} - 15 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{y^{5/2}}{5/2} \Bigg|_0^{1/2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

Задание 11. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями

$$x^2+y^2+2x=0, \quad z=\frac{25}{4}-y^2, \quad z=0.$$

Решение. Данное тело ограничено снизу плоскостью $z=0$, сверху — параболическим цилиндром $z=\frac{25}{4}-y^2$, сбоку — цилиндрической поверхностью $x^2+y^2+2x=0$. Проекция тела на плоскость xOy есть круг $(x+1)^2+y^2=1$ (рис. 10).

Вычислим объем, используя формулу

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D\left(\frac{25}{4}-y^2\right)dxdy=\left|\begin{array}{c} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{-2\cos\varphi}\left(\frac{25}{4}-r^2\sin^2\varphi\right)r\,dr=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\left(\frac{25}{8}r^2-\frac{1}{4}r^4\sin^2\varphi\right)\Bigg|_0^{-2\cos\varphi}=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{25}{2}\cos^2\varphi-4\cos^4\varphi\sin^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{25}{4}+\frac{25}{4}\cos 2\varphi-\cos^2\varphi\sin^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\left(\frac{25}{4}\varphi+\frac{25}{8}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}-\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}(1+\cos 2\varphi)(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{25}{4}\pi-\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}(1+\cos 2\varphi-\cos 4\varphi-\cos 2\varphi\cos 4\varphi)\;d\varphi=6\pi.$$

Задание 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$y=-2x^2+7, \quad y=5, \quad z=1-2x^2+3y^2, \quad z=4-2x^2+3y^2.$$

Решение. Тело ограничено гиперболическими параболоидами $z=4-2x^2+3y^2$ (сверху), $z=1-2x^2+3y^2$ (снизу). Проекция

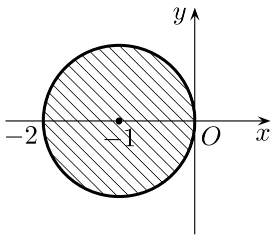

Рис. 10

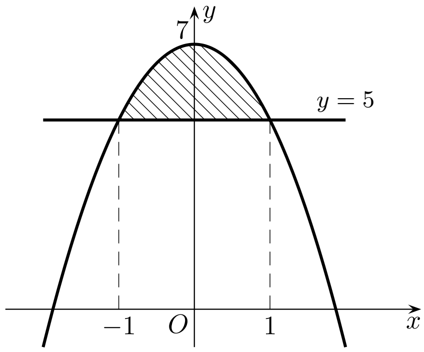

Рис. 11

тела на плоскость xOy показана на рис. 11. Вычислим

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{5}^{-2x^2+7} dy \int\limits_{1-2x^2+3y^2}^{4-2x^2+3y} dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{5}^{-2x^2+7} dy \; z\Big|_{1-2x^2+3y^2}^{4-2x^2+3y} = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{5}^{-2x^2+7} 3\,dy =$$

$$= 3\int\limits_{-1}^{1} (-2x^2+7-5)\,dx = -6\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_{-1}^{1} = 8.$$

Задание 13. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}.$$

Решение. Заданное тело ограничено снизу конической поверхностью $z = \sqrt{(x^2+y^2)/3}$, сверху — сферой $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$. Найдем линию пересечения сферы и конуса и ее проекцию на xOy:

$$\begin{cases} z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{\dfrac{(x^2+y^2)}{3}}. \end{cases}$$

Обозначив $x^2+y^2=\alpha$, из данной системы найдем $36-\alpha=\alpha/3$. Отсюда $\alpha=27$. Таким образом, проекция искомой линии пересечения на плоскость xOy — окружность $x^2+y^2=27$. Вычислим

$$\iiint\limits_V dxdydz=\left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right|=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{27}}r\,dr\int\limits_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{36-r^2}}dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{27}}r\left(\sqrt{36-r^2}-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{27}}\sqrt{36-r^2}\,d(36-r^2)-\int\limits_0^{\sqrt{27}}\frac{r^2}{\sqrt{3}}\,dr\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left\{-\frac{(36-r^2)^{3/2}}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}r^3\right\}\Bigg|_0^{\sqrt{27}}=\int\limits_0^{2\pi}(-9+72-27)\,d\varphi=72\pi.$$

Задание 14. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями $z=10(x^2+y^2)+1$, $z=1-20y$.

Решение. Тело ограничено сверху плоскостью $z=1-20y$, снизу — эллиптическим параболоидом $z=10(x^2+y^2)+1$. Линия их пересечения проектируется на xOy в окружность $x^2+y^2=-2y$ или $x^2+(y+1)^2=1$.

Вычислим объем

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right|=\int\limits_\pi^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{-2\sin\varphi}r\,dr\int\limits_{10r^2+1}^{1-20r\sin\varphi}dz=$$

$$=\int\limits_\pi^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{-2\sin\varphi}r\,dr(1-20r\sin\varphi-10r^2-1)=$$

$$=\int\limits_\pi^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{-2\sin\varphi}(-20r^2\sin\varphi-10r^3)\,dr=$$

$$=-10\int\limits_\pi^{2\pi}d\varphi\left(\frac{2}{3}r^3\sin\varphi+\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^{-2\sin\varphi}=$$

$$= -10\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(-\frac{16}{3}\sin^4\varphi + 4\sin^4\varphi\right)d\varphi = \frac{40}{3}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{10}{3}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi = 5\pi.$$

Задание 15. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$16 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100, \quad 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}, \quad y \leqslant 0, \quad y \leqslant -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Решение. Тело V ограничено поверхностями сфер $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, конической поверхностью $x^2 + y^2 - 24z^2 = 0$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$, $y = -x/\sqrt{3}$. Образующими конуса в плоскости yOz являются две пересекающиеся прямые $y^2 - 24z^2 = 0$ или $z = \pm\dfrac{y}{2\sqrt{6}}$. Отсюда $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. Вычислим объем, переходя к сферическим координатам:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\cos\varphi,\ x^2+y^2+z^2 = 100 \Rightarrow \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho = 10, \\ z = \rho\sin\theta,\ x^2+y^2+z^2 = 16, \\ J = \rho^2\cos\theta\ \Rightarrow \rho = 4 \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{11\pi/6} d\varphi \int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}}} d\theta \int\limits_{4}^{10} \rho^2\cos\theta\,d\rho = \int\limits_{\pi}^{11\pi/6} d\varphi \int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}}} \cos\theta\,d\theta\,\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_4^{10} =$$

$$= 312\int\limits_{\pi}^{11\pi/6}\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}}\,d\varphi = 312\cdot\frac{5\pi}{6}\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}} = 52\pi,$$

т.к. $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Задание 16. Тело V задано ограничивающими его поверхностями

$$4(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad (y \geqslant 0, z \geqslant 0);$$

$\mu = 10(x^2 + y^2)$ — плотность. Найти массу тела.

Решение. Тело V ограничено снизу плоскостью $z = 0$, сверху — поверхностью конуса $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$. Проекцией тела на поскость xOy является полукруг.

Вычислим

$$M = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V 10(x^2+y^2)\,dxdydz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} 10r^3\,dr \int\limits_0^{2r} dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} 10r^3\,dr\;\, z\Big|_0^{2r} = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} 20r^4\,dr = \int\limits_0^{\pi} d\varphi\;\, 4r^5\Big|_0^{1} = 4\pi.$$

Векторный анализ

Задание 1. Найти производную скалярного поля

$$u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$$

в точке $M(2; 1; 1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$.

Решение. Производная скалярного поля $u(x,y,z)$ по направлению, заданному вектором $\boldsymbol{l} = l_x\boldsymbol{i} + l_y\boldsymbol{j} + l_z\boldsymbol{k}$, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\boldsymbol{l}|}, \quad \cos\beta = \frac{l_y}{|\boldsymbol{l}|}, \quad \cos\gamma = \frac{l_z}{|\boldsymbol{l}|}, \quad |\boldsymbol{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1 + (y+z)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{1 + (y+z)^2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -\frac{1}{5}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -\frac{1}{5};$$

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = -\frac{4}{5}, \quad |\boldsymbol{l}| = 5.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_M = 4 \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{25}.$$

Задание 2. Найти угол между градиентом скалярных полей $u(x,y,z) = \dfrac{x}{yz^2}$ и $v(x,y,z) = x^2 - y^2 - 3z^2$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Решение. Градиент скалярного поля $u(x,y,z)$ вычисляем по формуле

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{yz^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2x}{yz^3},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 3\sqrt{2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -3\sqrt{2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -6\sqrt{3},$$

$$\operatorname{grad} u(M) = 3\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} - 3\sqrt{2}\,\boldsymbol{j} - 6\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}.$$

Аналогично
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -6z,$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_M = \sqrt{2}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_M = -\sqrt{2}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_M = -2\sqrt{3},$$
$$\operatorname{grad} u(M) = \sqrt{2}\,\boldsymbol{i} - \sqrt{2}\,\boldsymbol{j} - 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}.$$
Пусть $\varphi = \angle(\operatorname{grad} u(M), \operatorname{grad} v(M))$, тогда
$$\cos\varphi = \frac{(\operatorname{grad} u(M), \operatorname{grad} v(M))}{|\operatorname{grad} u(M)| \cdot |\operatorname{grad} v(M)|} =$$
$$= \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{18+18+108}\cdot\sqrt{2+2+12}} = 1.$$
Отсюда $\varphi = 0$.

Задание 3. Найти векторные линии в векторном поле
$$\boldsymbol{a} = 9z\boldsymbol{j} - 4y\boldsymbol{k}.$$

Решение. Векторные линии для вектора $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений
$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$
Имеем $a_x = 0$, $a_y = 9z$, $a_z = -4y$. Тогда из соотношений
$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{9z} = \frac{dz}{-4y}$$
получаем систему
$$\begin{cases} 9z dx = 0, \\ -4y dy = 9z dz. \end{cases}$$
Решаем уравнения этой «разделенной» системы:
$$\begin{cases} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = C_1, \\ -\dfrac{4y^2}{2} = \dfrac{9z^2}{2} - \dfrac{C_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 4y^2 + 9z^2 = C_2^2. \end{cases}$$
Искомые векторные линии — линии пересечения эллиптических цилиндров $4y^2 + 9z^2 = C_2^2$ с плоскостями $x = C_1$.

Задание 4. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (z-y)\boldsymbol{k}$ через часть поверхности S: $x^2+y^2+z^2 = 9$, вырезаемую плоскостью P: $z = 0$ ($z \geqslant 0$) (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение. 1 способ. Вычисляем поток векторного поля $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ через поверхность σ непосредственно по определению, следуя формуле

$$\Pi = \iint_\sigma (\boldsymbol{a}, d\sigma) = \iint_\sigma a_x dydz + a_y dxdz + a_z\, dxdy.$$

Здесь σ — внешняя поверхность полусферы. Имеем

$$\Pi = \iint_\sigma x\, dydz + (y+z)\, dxdz + (z-y)\, dxdy.$$

1. Для первого слагаемого $\iint_\sigma x\, dydy$ поверхность $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_1 соответствует положительной полуоси Ox, σ_2 — отрицательной. Их уравнения соответственно имеют вид

$$\sigma_1:\ x = +\sqrt{9-y^2-z^2}, \quad \sigma_2:\ x = -\sqrt{9-y^2-z^2}.$$

Заметим, что проекции σ_1 и σ_2 на yOz совпадают и равны D_1. При этом нормаль к поверхности σ_1 образует с положительным направлением оси Ox острый угол, а к поверхности σ_2 — тупой. Следовательно, первый поверхностный интеграл равен сумме двух двойных интегралов

$$\iint_\sigma x\, dydz = \iint_{D_1} \sqrt{9-y^2-z^2}\, dydz - \iint_{D_1} \left(\sqrt{9-y^2-z^2}\right) dydz =$$

$$= 2\iint_{D_1} \sqrt{9-y^2-z^2}\, dydz = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^\pi d\varphi \int_0^3 r\sqrt{9-r^2}\, dr = 18\pi.$$

Аналогично вычисляются второй и третий поверхностные интегралы.

2.
$$\iint_\sigma (y+z)\, dxdz = \iint_{D_2} \left(\sqrt{9-x^2-z^2} + z\right) dxdz -$$

$$- \iint_{D_2} \left(-\sqrt{9-x^2-z^2} + z\right) dxdz = 2\iint_{D_2} \sqrt{9-x^2-z^2}\, dydz = 18\pi.$$

3.
$$\iint_\sigma (z-y)\, dxdy = \iint_{D_3} \left(\sqrt{9-x^2-y^2} - y\right) dxdy -$$

$$-\iint\limits_{D_3} \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy - \iint\limits_{D_3} y\,dxdy = 18\pi - \iint\limits_{D_3} r^2 \sin\varphi\,drd\varphi =$$

$$= 18\pi - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r^2 \sin\varphi\,d\varphi = 18\pi - \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\,\frac{r^3}{3}\bigg|_0^3 d\varphi =$$

$$= 18\pi + 9\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi.$$

Итак, $\Pi = 18\pi + 18\pi + 18\pi = 54\pi$.

2 способ. Поверхность σ есть полусфера $x^2+y^2+z^2 = 9$, $z \geqslant 0$. Внешняя единичная нормаль к ней $\boldsymbol{n} = \left\{\frac{x}{3}; \frac{y}{3}; \frac{z}{3}\right\}$. Вычисляем скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{zy}{3} + \frac{z^2}{3} - \frac{yz}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$$

В силу уравнения поверхности $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 3$. Используем формулу

$$\Pi = 3\iint\limits_{\sigma} d\sigma = 3S_\sigma.$$

По известной геометрической формуле площадь поверхности полусферы

$$S_\sigma = \frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2 = 2\pi R^2 = 2\pi\cdot 9 = 18\pi.$$

Окончательно $\Pi = 54\pi$.

Задание 5. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через часть плоскости $P:\ x + 2y + 3z = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Решение. Заданная поверхность σ имеет вид треугольника ABC. В данном случае она взаимно однозначно проектируется на плоскости xOy в области $\triangle OAB = D$, поэтому вычисление потока векторного поля $\boldsymbol{a}$ через σ сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\Pi = \iint\limits_{D} \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{|\cos\gamma|}\bigg|_{z=f(x,y)} dxdy.$$

Здесь $\cos\gamma$ есть коэффициент при векторе $\boldsymbol{k}$ в представлении единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности, заданной неявным уравнением $F(x,y,z)=0$:

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

В данном случае, поскольку по условию задачи $\angle(\boldsymbol{n},Oz)$ — острый, выбираем знак плюс. Имеем

$$F(x,y,z)\equiv x+2y+3z-1=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=3,$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{14}}\,\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\,\boldsymbol{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\,\boldsymbol{k},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Итак,

$$\Pi=\iint\limits_D \left.\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{14}}+\dfrac{4y}{\sqrt{14}}+\dfrac{3z}{\sqrt{14}}}{\dfrac{3}{\sqrt{14}}}\right|_{z=(-x+2y+1)/3} dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\left[-\frac{x}{3}+\frac{4y}{3}+\left(-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}+\frac{1}{3}\right)\right]dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\left(-\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{1}{3}\right)dxdy=-\frac{1}{3}\iint\limits_D(2x-2y-1)\,dxdy=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{1/2}dy\int\limits_0^{1-2y}(2x-2y-1)\,dx=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{1/2}\left[x^2-(2y+1)x\right]\Big|_0^{1-2y}dy=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_0^{1/2}(y-2y^2)\,dy=\frac{4}{3}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{8}.$$

Задание 6. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=5\pi x\boldsymbol{i}+(1-2y)\boldsymbol{j}+$ $+4\pi z\boldsymbol{k}$ через часть плоскости $P:\ \dfrac{x}{2}+4y+\dfrac{z}{3}=1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Решение. Заданная поверхность σ имеет вид $\triangle ABC$. Решение аналогично решению задачи 5:

$$F(x,y,z)=\frac{x}{2}+4y+\frac{z}{3}-1=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=4, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{3},$$

$$\boldsymbol{n}=+\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}}{\sqrt{\frac{1}{4}+16+\frac{1}{9}}}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}}{\frac{\sqrt{589}}{6}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{589}}\boldsymbol{i}+\frac{24}{\sqrt{589}}\boldsymbol{j}+\frac{2}{\sqrt{589}}\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{589}}.$$

$$\Pi=\iint\limits_D \left.\frac{5\pi x\frac{3}{\sqrt{589}}+(1-2y)\frac{24}{\sqrt{589}}+4\pi z\frac{2}{\sqrt{589}}}{\frac{2}{\sqrt{589}}}\right|_{z=3-3x/2-12y} dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \left[\frac{15\pi x}{2}+12(1-2y)+4\pi\left(3-\frac{3x}{2}-12y\right)\right] dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \left(\frac{15}{2}\pi x+12-24y+12\pi-6\pi x-48\pi y\right) dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \left[\frac{3}{2}\pi x-24(1+2\pi)y+12(1+\pi)\right] dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{1/4} dy \int\limits_0^{2-8y} \left[\frac{3}{2}\pi x-24(1+2\pi)y+12(1+\pi)\right] dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/4} \left.\left[\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-24(1+2\pi)yx+12(1+\pi)x\right]\right|_0^{2-8y} dy=$$

$$=\int\limits_0^{1/4} \left[\frac{3\pi}{4}(2-8y)^2-24(1+2\pi)y(2-8y)+2\cdot 12(1+\pi)(1-4y)\right] dy=$$

$$=\int\limits_0^{1/4} \left[y^2(192+432\pi)-y(144+216\pi)+27\pi+24\right] dy=\frac{9\pi}{4}+\frac{5}{2}.$$

Задание 7. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=(2y-5x)\boldsymbol{i}+(x-1)\boldsymbol{j}+(2\sqrt{xy}+2z)\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность

$$S: \begin{cases} 2x+2y-z=4, \\ x=0,\, y=0,\, z=0 \end{cases} \qquad \text{(нормаль внешняя).}$$

Решение. 1 способ. Заданная поверхность σ есть внешняя поверхность пирамиды $OABC$ и состоит из четырех частей: $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$, где

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \triangle ABC: \ 2x + 2y - z - 4 = 0,\\
&\sigma_2 = \triangle AOB: \ z = 0,\\
&\sigma_3 = \triangle AOC: \ y = 0,\\
&\sigma_4 = \triangle BOC: \ x = 0.
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой перехода от поверхностного интеграла 2-го рода к поверхностному интегралу 1-го рода, а также свойством аддитивности потока:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_{\sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \sum_{i=1}^{4} \iint\limits_{\sigma_i} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_i)\, d\sigma.$$

Здесь с учетом того, что по условию нормаль внешняя, имеем:

$$\boldsymbol{n}_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), \quad \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{n}_3 = -\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{n}_4 = -\boldsymbol{i}.$$

Получим

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_1} \left[(2y - 5x) \cdot \frac{2}{3} + (x - 1) \cdot \frac{2}{3} + (2\sqrt{xy} + 2z)\left(-\frac{1}{3}\right)\right] d\sigma =$$

$$= \frac{2}{3} \iint\limits_{\sigma_1} (2y - 5x + x - 1 - z)\, d\sigma - \frac{2}{3} \iint\limits_{\sigma_1} \sqrt{xy}\, d\sigma =$$

$$= -4 - \frac{2}{3} \iint\limits_{D} \frac{\sqrt{xy}}{1/3}\, dxdy = -4 - 2 \iint\limits_{D} \sqrt{xy}\, dxdy,$$

так как

$$\frac{2}{3} \iint\limits_{\sigma_1} (2y - 4x - 1 - z)\, d\sigma = \frac{2}{3} \iint\limits_{D_1} \frac{2y - 4x - 1 - 2x - 2y + 4}{1/3}\, dxdy =$$

$$= 2 \iint\limits_{D} (-6x + 3)\, dxdy = 6 \iint\limits_{D} (1 - 2x)\, dxdy = 6 \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (1 - 2x)\, dy =$$

$$= 6 \int\limits_0^2 (1 - 2x)(2 - x)\, dx = 6 \int\limits_0^2 (2x^2 - 5x + 2)\, dx = -4;$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\sigma_2} (2\sqrt{xy} + 2z)\, d\sigma = 2 \iint\limits_{D_2} \sqrt{xy}\, dxdy;$$

$$\Pi_3 = -\iint\limits_{\sigma_3} (x-1)\,d\sigma = -2\iint\limits_{D_3} (x-1)\,dxdz =$$

$$= -\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x-4}^{0} (x-1)\,dz = \int\limits_0^2 (x-1)(2x-4)\,dx = \frac{4}{3}.$$

Далее

$$\Pi_4 = -\iint\limits_{\sigma_4} (2y-5x)\,d\sigma = -\iint\limits_{D_4} 2y\,dydz = -2\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y-4}^{0} y\,dz =$$

$$= 2\int\limits_0^2 yz\Big|_0^{2y-4} dy = 2\int\limits_0^2 y(2y-4)\,dy = 2\left(\frac{2y^3}{3} - \frac{4y^4}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{16}{3}.$$

Итак,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 =$$

$$= -4 - 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{xy}\,dxdy + 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{xy}\,dxdy + \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = -8.$$

2 способ. Для вычисления потока Π векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность σ тела V применим формулу Остроградского–Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dxdydz = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Тело V есть пирамида. Вычислим $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = -5 + 0 + 2 = -3$. Тогда

$$\Pi = -3\iiint\limits_V dxdydz = -3V_{\text{пир}}.$$

Используя формулу объема пирамиды, получаем

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 4 = \frac{8}{3}.$$

Итак, $\Pi = -3\cdot\dfrac{8}{3} = -8$.

Задание 8. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = (x+z)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность S:

$$\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Решение. Поверхность σ ограничивает тело V и состоит из поверхностей эллиптических параболоидов

$$S_1: \ z = 8 - x^2 - y^2, \quad S_2: \ z = x^2 + y^2,$$

которые пересекаются по кривой

$$L: \begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 4, \end{cases}$$

проектирующейся на плоскости xOy в окружности $x^2 + y^2 = 4$. Для вычисления потока П векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность σ тела V применим формулу Остроградского–Гаусса

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, dV = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Имеем

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = (x+z)'_x = 1, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0;$$

$$\Pi = \iiint\limits_V dxdydz = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & L: \begin{cases} r = 2 \\ r = 4 \end{cases} \\ y = r\sin\varphi & \\ z = z & S_1: \ z = 8 - r^2 \\ J = r & S_2: \ z = r^2 \end{array} \right| =$$

$$= \iiint\limits_V r \, dr d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r \, dr \int\limits_{r^2}^{8-r^2} dz = 16\pi.$$

Задание 9. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = (y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(xy+$ $+y^2)\boldsymbol{j} + (xz + z)\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \\ z = 1, \end{cases} \qquad \text{нормаль внешняя.}$$

Решение. Заданная поверхность σ есть полная поверхность цилиндра. Используя формулу Остроградского–Гаусса (см. задание 8), получим:

$$\Pi = \iiint\limits_V (x + 2y + x + 1) \, dV = \iiint\limits_V (2x + 2y + 1) \, dxdydz =$$

$$
= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \\ J = r \\ x^2 + y^2 = 1 \ \Rightarrow \ r = 1 \end{array} \right| = \iiint\limits_V \left[2r(\cos\varphi\sin\varphi) + 1\right] r \, d\varphi dr dz =
$$

$$
= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^1 \left[2r^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + r\right] dz =
$$

$$
= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[2r^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + r\right] dr =
$$

$$
= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} r^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}\right] d\varphi = \pi.
$$

Задание 10. Найти работу силы $\boldsymbol{F} = (x - y)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ при перемещении вдоль линии L: $x^2 + y^2 = 4$ $(y \geqslant 0)$ от точки $M(2;0)$ к точке $N(-2;0)$.

Решение. Применим формулу

$$
A = \int\limits_{\smile MN} (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\smile MN} (x - y)dx + dy.
$$

Параметрическое уравнение полуокружности L:

$$
\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad t \in [0,\pi].
$$

$$
A = \int\limits_0^{\pi} (2\cos t - 2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t \, dt =
$$

$$
= 2\int\limits_0^{\pi} \left(-2\cos t \sin t + 2\sin^2 t + \cos t\right) dt =
$$

$$
= 2\int\limits_0^{\pi} \left(-\sin 2t + 1 - \cos 2t + \cos t\right) dt =
$$

$$
= -2\int\limits_0^{\pi} \sin 2t \, dt + 2\int\limits_0^{\pi} dt - \int\limits_0^{\pi} 2\cos 2t \, dt + 2\int\limits_0^{\pi} \cos t \, dt = 2\pi.
$$

Задание 11. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}y\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ вдоль контура

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$$

(в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

Решение. Параметр t изменяется от 0 до 2π. Если от задания кривой Γ в параметрической форме перейти к прямоугольным декартовым координатам

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1 - x - y, \end{cases}$$

то станет ясно, что Γ — эллипс, который получается в сечении цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $x + y + z = 1$. Для вычисления циркуляции применим формулу

$$C = \int\limits_{\Gamma} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\Gamma} (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \big[a_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'_t(t) + a_y\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'_t(t) +$$

$$+ a_z\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'_t(t)\big]\ dt.$$

Имеем

$$C = \int\limits_{0}^{2\pi} \left[\frac{2}{3}\sin t(-2\sin t) - 3\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t + 2\cos t(2\sin t - 2\cos t)\right] dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-\frac{4}{3}\sin^2 t - 12\cos^2 t + 4\cos t\sin t - 4\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \left[-\frac{2}{3}(1 - \cos 2t) + 6(1 + \cos 2t) + 2\sin 2t - 2(1 + \cos 2t)\right] dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-\frac{26}{3} - \frac{13}{3}\cos 2t + 2\sin 2t\right) dt =$$

$$= \left(-\frac{26}{3}t - \frac{13}{6}\sin 2t - \cos 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{52}{3}\pi.$$

Задание 12. Найти модуль циркуляции векторного поля $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ вдоль контура

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Решение. Применим формулу Стокса

$$C = \int\limits_{\Gamma} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint\limits_{\sigma} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, d\sigma),$$

где σ — поверхность, ограниченная контуром Γ. В данном случае за σ проще всего принять часть плоскости $z = 0$, ограниченную окружностью Γ, т.е. круг $x^2 + y^2 = 9$. Найдем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & xy \end{vmatrix} = 2(x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j}).$$

Тогда

$$C = \iint\limits_{\sigma} x\, dydz - z\, dxdy = 0,$$

так как $z = 0$, $dz = 0$.

Список рекомендуемой литературы

1. *Бугров Я. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1984. — 432 с.

2. *Бугров Я. С.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1985. — 464 с.

3. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

4. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов / Л. А. Кузнецов. — М.: Высш. шк., 1983. — 175 с.

5. Сборник задач по математике для втузов / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1981. — Ч. 2. — 368 с.

Оглавление

Кратные интегралы 5
Векторный анализ 18
Список рекомендуемой литературы 30

Учебное издание

РАЩЕПКИНА Нина Александровна
КИРПИКОВА Ольга Ивановна
САБИРОВ Анатолий Samматович

Кратные интегралы и векторный анализ

Методические указания к типовым расчетам

Отв. за выпуск Н. А. Романова
Компьютерный набор и верстка В. Г. Сытина

Подписано в печать 18.03.09. Формат 60×84/16. Бумага газетная.
Гарнитура Журнальная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1,62. Уч.-изд. л. 1,38. Тираж 500 экз. Заказ № 131.

Чувашский государственный университет
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15