МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников технических факультетов

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников технических факультетов

Чебоксары 2014

УДК 517.1(075.8), 517.9

Составители: В. Г. Агаков,
А. Н. Быкова,
Т. В. Картузова,
Н. Я. Попова,
Л. В. Селиверстова,
М. Е. Сироткина

Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения: метод. указания и контрольные задания для студентов-заочников технических факультетов / сост. В. Г. Агаков, А. Н. Быкова, Т. В. Картузова и др. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014. — 64 с.

Приводятся программа изучаемого курса, контрольные задания. Дается методика решения типовых задач.

Для студентов-заочников I и II курсов технических факультетов.

Отв. редактор канд. физ.-мат. наук, профессор В. Г. Агаков

Утверждено Учебно-методическим советом университета

1. Неопределенные интегралы

1.1. Вопросы программы

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.

2. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

1.2. Первообразная, ее свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$.

Определение 1.1. *Функция $F(x)$ называется **первообразной** относительно функции $f(x)$, если в любой точке отрезка $[a;b]$ $F'(x) = f(x)$.*

Пример 1.1. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, так как $(x^3)' = 3x^2$, $(-\infty < x < +\infty)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и все функции вида $F(x) + C$, где C — произвольное постоянное число, являются первообразными для $f(x)$.

Задача отыскания всех первообразных функций $f(x)$ решается нахождением какой-нибудь одной из них.

1.3. Неопределенный интеграл

Определение 1.2. *Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, т.е.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.1}$$

где $F(x)$ *— одна из первообразных для функции* $f(x)$*;* C *— произвольная постоянная.*

Функцию $f(x)$ называют **подынтегральной функцией**, $f(x)\,dx$ — **подынтегральным выражением**, а переменную x — **переменной интегрирования**.

1.4. Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, где k — постоянная.
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

1.5. Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $0 < a \neq 1$.
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,\ |x| \neq 1,\ a \neq 0.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$

18. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$

19. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$

1.6. Методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования. Метод основан на том, что некоторые интегралы можно найти с помощью свойств неопределенного интеграла, тождественных преобразований подынтегральной функции и подынтегрального выражения, применяя таблицу интегралов.

Пример 1.2. Найти $\int \frac{dx}{4+x^2}$.

Решение. По формуле 11, где $a = 2$, находим

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Пример 1.3. Найти $\int \left(2x^3 + 3\sin x - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$.

Решение. Применив свойства 4 и 5, получим табличные интегралы 2, 6, 12:

$$2\int x^3 dx + 3\int \sin x \, dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2}{4}x^4 + 3(-\cos x) - 2\arcsin x + C = \frac{1}{2}x^4 - 3\cos x - 2\arcsin x + C.$$

Замечание. Проверка правильности нахождения неопределенного интеграла производится с помощью дифференцирования полученного результата (свойство 1):

$$\left(\frac{1}{2}x^4 - 3\cos x - 2\arcsin x + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4x^3 + 3\sin x - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2x^3 + 3\sin x - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Если производная совпадает с подынтегральной функцией, то интегрирование произведено верно.

Пример 1.4. Найти $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx.$

Решение. Заменим корни степенями с дробными показателями, возведем во вторую степень и применим формулу 2. Получим

$$\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + 2\int x^{\frac{1}{12}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 2\frac{x^{\frac{1}{12}+1}}{\frac{1}{12}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{24}{13}x^{\frac{13}{12}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{24}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + 2\sqrt{x} + C.$$

Пример 1.5. Найти $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

Решение.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

2. Метод замены переменной. Состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ иногда можно упростить, введя вместо x новую переменную. Пусть $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ —

дифференцируемая по t и имеющая обратную функцию. Тогда справедлива формула

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 1.6. Найти $\int (2x+3)^5 dx$.

Решение. Сделаем замену $2x+3=t$, тогда $2x=t-3$, $dx = \frac{1}{2}d(t-3) = \frac{1}{2}dt$. Имеем

$$\int (2x+3)^5 dx = \frac{1}{2}\int t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + C.$$

Пример 1.7. Найти $\int xe^{x^2+1}dx$.

Решение. Сделаем замену $x^2+1=t$, тогда $2x\,dx = dt$ или $x\,dx = \frac{1}{2}dt$. Получим

$$\int xe^{x^2+1}dx = \int e^t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

Пример 1.8. Найти $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$.

Решение. Обозначим $x^2 = t$, тогда $2x\,dx = dt$ или $x\,dx = \frac{1}{2}dt$. Получим

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C.$$

3. Метод интегрирования по частям. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — дифференцируемые функции от x, тогда имеет место формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.2}$$

Суть этого метода состоит в том, чтобы представить подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ в виде произведения множителей u и dv (при этом dx входит в dv) таким образом, чтобы вновь полученный интеграл оказался не труднее данного.

Пример 1.9. Найти $\int xe^x dx$.

Решение. Пусть $u=x$, $dv=e^x dx$. Тогда $du=dx$, $v=\int e^x dx = x$. (Здесь C полагают равным нулю.) Имеем

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно.

Пример 1.10. Найти $\int x^2 \sin x \, dx$.

Решение. Пусть $u = x$, $\sin x \, dx = dv$. Тогда $du = 2x \, dx$, $v = \int \sin x \, dx = -\cos x$. Получим

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x \, dx.$$

Последний интеграл $\int 2x \cos x \, dx$ также берем по частям: $u = 2x$, $dv = \cos x \, dx$. Отсюда $du = 2dx$, $v = \int \cos x \, dx = \sin x$. Имеем

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \left(2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx\right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Пример 1.11. Найти $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Решение.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = x \, dx, & v = \displaystyle\int x \, dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

1.7. Интегрирование рациональных дробей

1. Интегрирование элементарных (простейших) дробей. К таким дробям относят дроби следующих четырех видов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$;

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$, $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$, $D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$.

Здесь A, B, p, q — действительные числа, а квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней (дискриминант $D < 0$).

Интегрирование дробей 1-го и 2-го типов видно из следующих равенств:

$$1)\ \int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$2)\ \int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int (x-a)^{-m}dx = A\int (x-a)^{-m}d(x-a) =$$

$$= \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C.$$

Интегрирование дробей 3-го типа рассмотрим на примерах, а интегрирование дробей 4-го типа рассматривать не будем. Интересующихся мы отсылаем к более подробным пособиям и учебникам по высшей математике (см. список литературы).

Пример 1.12. Найти $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx$.

Решение. Пусть $x^2 + x + 1 = t$, тогда $(2x+1)dx = dt$. Имеем

$$\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 4\int \frac{dx}{x^2+x+1} = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln(x^2+x+1) + C_1.$$

Выделим полный квадрат в трехчлене:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Теперь положим $x + \frac{1}{2} = t$, $x = t - \frac{1}{2}$, $dx = dt$.

$$I_2 = 4\int \frac{dx}{x^2+x+1} = 4\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 4\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Используя формулу 11 в таблице интегралов, получим

$$I_2 = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}/2} + C_2 = \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Итак,

$$\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C, \quad C = C_1 + C_2.$$

Замечание. Прием выделения полного квадрата в трехчлене используется и в том случае, когда этот трехчлен находится в знаменателе под знаком корня.

Пример 1.13. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$.

Решение. Имеем

$$1+2x-2x^2 = -\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right) = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2},$$

где $x - \dfrac{1}{2} = t$, $dx = dt$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-2x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\dfrac{3}{2} - 2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2\left(\dfrac{3}{4} - t^2\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4} - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{t}{\sqrt{3}/2} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. Интегрирование рациональных дробей. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Если $m < n$, то дробь называется **правильной**, при $m \geqslant n$ дробь называется **неправильной**.

Если заданная дробь неправильная, то следует из нее предварительно выделить целую часть. Для этого надо числитель разделить на знаменатель.

В дальнейшем мы будем рассматривать правильные дроби. Чтобы проинтегрировать правильную дробь, необходимо разложить ее на сумму простейших дробей. Для этого надо вспомнить, что каждый многочлен ненулевой степени с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней, причем множители второй степени не имеют действительных корней:

$$Q_n(x) = b_n(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}...(x-x_k)^{r_k} \times$$
$$\times\,(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}...(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}.$$

Тогда дробь

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{b_n(x-x_1)^{r_1}...(x-x_k)^{r_k}...(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}}$$

разлагается на сумму элементарных дробей, при этом каждому множителю вида $(x-x_0)^r$ ставится в соответствие сумма элементарных дробей

$$\frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_1}{(x-x_0)^2} + ... + \frac{A_r}{(x-x_0)^r},$$

а каждому множителю типа $(x^2+px+q)^s$ — сумма элементарных дробей

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{B_sx+C_s}{(x^2+px+q)^s}.$$

Коэффициенты A_i, B_k, C_k $(i = 1, \ldots, r,\ k = 1, \ldots, s)$ в разложении рациональной дроби находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов. Применение этого метода рассмотрим на примерах.

Пример 1.14. Найти $\int \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}dx$.

Решение. Рациональная дробь

$$\frac{P_3(x)}{Q_3(x)} = \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}$$

неправильная. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель столбиком:

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1, \quad x(x-1)^2 = x^3-2x^2+x;$$

$$\frac{(x+1)^3}{x(x+1)^2} = 1 + \frac{5x^2+2x+1}{x(x-1)^2}.$$

Теперь правильную дробь

$$\frac{5x^2+2x+1}{x(x-1)^2}$$

разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{5x^2+2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

где A, B, C неизвестны. Приводим правую часть к общему знаменателю, получим дробь

$$\frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}.$$

Две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если тождественно равны их числители, поэтому

$$5x^2 + 2x + 1 \equiv A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx;$$

$$5x^2 + 2x + 1 \equiv (A+B)x^2 + (-2A - B + C)x + A.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях записанного тождества. Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A + B = 5, \\ -2A - B + C = 2, \\ A = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 1$, $B = 4$, $C = 8$. Таким образом,

$$\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2}.$$

Итак,

$$\int \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2}\right) dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{1}{x} dx + 4\int \frac{dx}{x-1} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= x + \ln|x| + 4\ln|x-1| - \frac{8}{x-1} + C.$$

Пример 1.15. Найти $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Решение. Подынтегральная функция

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

есть правильная дробь. Знаменатель этой дроби разложен на простейшие множители. Представим эту дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)};$$

$$x \equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=$$

$$=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=1, \\ A-C=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=1/3$. Следовательно,

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}.$$

Поэтому

$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}I_1, \quad \text{где } I_1=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx.$$

Сделаем замену $x^2+x+1=t$, тогда $(2x+1)dx=dt$. Получим

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Итак,

$$\frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right).$$

1.8. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, где m и n — натуральные числа. В зависимости от четности m и n используются следующие варианты:

1) m — четное, n — нечетное: подстановка $t = \sin x$;

2) m — нечетное, n — четное: подстановка $t = \cos x$;

3) m и n — оба нечетные: любая из подстановок 1 или 2;

4) m и n — оба четные: понизить степени тригонометрических функций и в полученной сумме проверить каждое слагаемое по пп. 1–3.

Пример 1.16. Найти $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$.

Решение. Согласно п. 2 выполним подстановку $t = \cos x$. Получим $dt = -\sin x \, dx$, $\sin^4 x = (1-t^2)^2$. Отсюда имеем

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = -\int (1-t^2)^2 t^2 dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{7}t^7 + C = \cos^3 x \left(\frac{2}{5}\cos^2 x - \frac{1}{7}\cos^4 x - \frac{1}{3} \right) + C.$$

2. Интегрирование рациональных функций относительно $\sin x$ и $\cos x$: $R(\sin x, \cos x)$. Такие функции приводятся к рациональным дробям подстановкой $\operatorname{tg}(x/2) = t$, которая называется **универсальной**. При этом $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через $\operatorname{tg}(x/2) = t$ следующим образом:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$R(\sin x, \cos x) dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1.17. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + 2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+2}dx = \int \frac{(\sin x+2)-2}{\sin x+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{\sin x+2} =$$

$$= x - 2\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}+2} = x - 4\int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t^2+2t+2}{1+t^2}} =$$

$$= x - 4\int \frac{dt}{2t^2+2t+2} = x - 2\int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= x - 2\int \frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}} = x - 2\cdot\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= x - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = x - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Пример 1.18. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos^2 x}dx$.

Решение. Так как

$$\frac{(-\sin x)^3}{2+(-\cos x)^2} = -\frac{\sin^3 x}{2+\cos^2 x},$$

то делаем подстановку $\cos x = t$. Имеем $\sin x\,dx = dt$, поэтому

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x\sin x\,dx}{2+\cos^2 x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}\sin x\,dx =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{2+t^2}dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+2}dt = \int\left(1-\frac{3}{t^2+2}\right)dt =$$

$$= t - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \cos x - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

1.9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

1. Интегрирование функций вида $R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})$. Интеграл от такой функции приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $ax+b=t^n$. Тогда

$$x=\frac{t^n-b}{a},\quad dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

и $$\int R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

Пример 1.19. Найти $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение. Положим $x+1=t^2$. Тогда $x=t^2-1$ и $dx=2t\,dt$,

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}=\int\frac{(t^2-1)2t\,dt}{t}=2\int(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C.$$

2. Интегрирование функций вида $R\left(x,\ \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $ad-bc\neq 0$. В этом случае делаем подстановку вида

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m,$$

откуда

$$x=\frac{t^md-b}{a-t^mc}\quad\text{и}\quad dx=\frac{mdt^{m-1}(a-t^mc)+mt^{m-1}c(t^md-b)}{(a-t^mc)^2}dt.$$

Пример 1.20. Найти $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}$.

Решение. Пусть $\frac{1+x}{1-x}=t^2$, откуда

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}dt=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt.$$

Тогда

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}=\int t\frac{4t}{(t^2+1)^2}\frac{t^2+1}{t^2-1}dt=4\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}=$$

$$= 2\int \frac{(t^2-1)+(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2-1)}dt = 2\int \frac{dt}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t + 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1} +$$

$$+ C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + C.$$

3. Если подынтегральная функция является рациональным выражением относительно x и различных корней одной и той же линейной функции $ax+b$, т.е. $R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}, \ldots)$, то применяют подстановку $ax+b = r^k$, где k — наименьшее кратное всех показателей n, m, … .

Пример 1.21. Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Положим $x+1 = t^{12}$. Тогда $\sqrt[4]{x+1} = t^3$, $\sqrt{x+1} = t^6$, $\sqrt[3]{x+1} = t^4$, $x = t^{12}-1$, $dx = 12t^{11}dt$. Получим

$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{t^3\cdot 12t^{11}dt}{t^6+t^4} = 12\int \frac{t^{14}}{t^4(t^2+1)}dt =$$

$$= 12\int \frac{t^{10}}{t^2+1}dt = 12\int\left(t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \operatorname{arctg} t + C\right) =$$

$$= \frac{12}{9}\sqrt[12]{(x+1)^9} - \frac{12}{7}\sqrt[12]{(x+1)^7} + \frac{12}{5}\sqrt[12]{(x+1)^5} -$$

$$- 4\sqrt[4]{x+1} + 12\sqrt[12]{x+1} - 12\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x+1} + C.$$

2. Определенные интегралы

2.1. Вопросы программы

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла.

2. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона—Лейбница.

3. Вычисление определенного интеграла: интегрирование по частям и подстановкой. Приближенное вычисление определенного интеграла: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

4. Приложения определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения. Физические приложения определенного интеграла.

5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций, основные свойства. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости.

2.2. Понятие определенного интеграла

К понятию определенного интеграла приводят многие задачи механики, физики, геометрии и другие. Не имея возможности останавливаться на решении этих важных задач, мы ограничимся общим подходом к их решению.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Разобьем произвольным образом отрезок $[a; b]$ на n частей точками x_1, x_2, ..., x_{n-1}, где $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Длины полученных элементарных отрезков обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, ..., n)$.

На каждом из таких отрезков выберем произвольную точку ξ_i, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, $i = 1, ..., n$.

Вычислим значения функции $f(x)$ в этих точках и составим произведение полученных значений функций на длины соответствующих элементарных отрезков: $f(\xi_i)\Delta x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Сумма S_n всех таких произведений называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$, составленной на отрезке $[a; b]$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2.1}$$

Интегральная сумма зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части и от выбора точек ξ_i. Поэтому для функции $f(x)$ может быть составлено бесконечное множество интегральных сумм.

Определение 2.1. *Предел, к которому стремится интегральная сумма (2.1), когда наибольшая из длин элементарных отрезков стремится к нулю, называется* ***определенным интегралом*** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$*:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{2.2}$$

если этот предел существует и конечен.

В записи определенного интеграла (2.2) a и b называются **нижним** и **верхним пределами интегрирования**, отрезок $[a; b]$ — **отрезком интегрирования**, $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а $f(x)\,dx$ — **подынтегральным выражением**.

Кроме того, по определению полагаем:

1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$, если $a > b$;

2) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

Теорема 2.1 (о существовании определенного интеграла). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$*, то определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *существует.*

2.3. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

2. $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

3. $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где k — произвольная постоянная.

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$ для любых a и b.

5. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ для любых a, b, c.

6. Если $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \neq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

7. Если $f(x) \leqslant \varphi(x)$, $f(x) \not\equiv \varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

8. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx,\ a < b.$

9. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке найдется по крайней мере одна точка x_0 такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a).$$

2.4. Формула Ньютона—Лейбница

В теории определенного интеграла видное место занимает теорема о производной определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу.

Рассмотрим определенный интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, где x — некоторое число, принадлежащее отрезку $[a;b]$; t — переменная интегрирования. Пусть x произвольно изменяется на $[a;b]$. Тогда интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ становится функцией от x: $\int\limits_a^x f(t)\,dt \equiv \Phi(x)$.

Интеграл $\Phi(x)$ называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом**. Легко доказать, что

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

Следовательно, функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Теорема 2.2 (Ньютона—Лейбница). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ — некоторая ее первообразная, то имеет место формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Из предыдущего $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ — первообразная для $f(x)$. Но две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную:

$$\Phi(x) = F(x) + C. \tag{2.3}$$

Значение постоянной C можно найти так. Положим в равенстве (2.3) $x = a$. Получим $\Phi(a) = F(a) + C$. Так как

$$\Phi(a) \equiv \int\limits_a^a f(t)\,dt = 0,$$

то $0 = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$. Таким образом, $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Положим в последнем равенстве $x = b$, получим

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) называется **формулой Ньютона—Лейбница**.

Итак, чтобы вычислить определенный интеграл, необходимо найти первообразную для подынтегральной функции и вычислить разность ее значений в точках верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Пример 2.1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^3 (x^4+2x)dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_1^3 (x^4+2x)dx = \left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^2}{2}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{5}\cdot 3^5 + 3^2 - \frac{1}{5}\cdot 1^5 - 1^2 =$$

$$= \frac{243}{5} + 9 - \frac{1}{5} - 1 = \frac{242}{5} + 8 = \frac{242+40}{5} = \frac{282}{5}.$$

2.5. Методы вычисления определенного интеграла

1. Интегрирование по частям. В определенном интервале имеет место формула

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du, \qquad (2.5)$$

называемая **формулой интегрирования по частям**.

Пример 2.2. Вычислить $\int\limits_0^2 xe^x dx$.

Решение. Применяя формулу (2.5), получим

$$\int\limits_0^2 xe^x dx = \int\limits_0^2 x\,d(e^x) = xe^x\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^x\Big|_0^2 =$$

$$= 2e^2 - e^2 + e^0 = e^2 + 1.$$

2. Замена переменной в определенном интеграле

Очень часто для вычислений определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции $f(x)$ требуется заменить $x = \varphi(t)$.

Если:

а) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

б) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$;

в) $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на $[\alpha;\beta]$,

то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

Отметим, что этот метод интегрирования не требует возвращения к старой переменной x — мы сразу получаем искомое значение данного интеграла.

Пример 2.3. Вычислить $\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{1+\sqrt{5x-1}}$.

Решение. Сделаем замену переменной:

$$5x-1=t^2, \quad dx=\frac{2t}{5}dt=\frac{2}{5}t\,dt.$$

Определим новые пределы интегрирования: если $x=1$, то $t=2$, если $x=3$, то $t=\sqrt{14}$. Следовательно,

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt{5x-1}}=\frac{2}{5}\int\limits_2^{\sqrt{14}}\frac{t\,dt}{1+t}=\frac{2}{5}\int\limits_2^{\sqrt{14}}\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=$$

$$=\frac{2}{5}\int\limits_2^{\sqrt{14}}\left(1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{2}{5}(t-\ln|t+1|)\Big|_2^{\sqrt{14}}=$$

$$=\frac{2}{5}(\sqrt{14}-\ln(\sqrt{14}+1)-2+\ln 3)=\frac{2}{5}\left(\sqrt{14}-2+\ln\frac{3}{\sqrt{14}+1}\right).$$

2.6. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры. Будем называть **криволинейной трапецией** фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции $y=f(x)$ ($f(x)>0$), двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox (рис. 2.1).

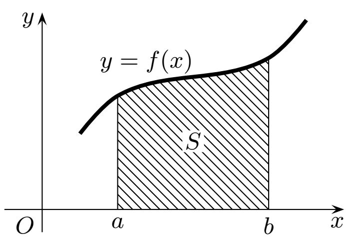

Рис. 2.1

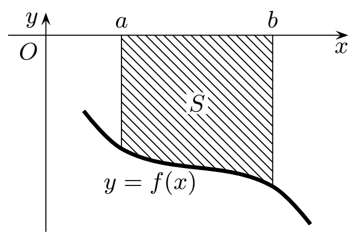

Рис. 2.2

Площадь такой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Если функция $f(x)$ отрицательная, то интеграл, взятый по абсолютной величине, равен площади фигуры, изображенной на рис. 2.2.

Площадь фигуры (рис. 2.3), ограниченной графиками непрерывных функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, равна

$$S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$$

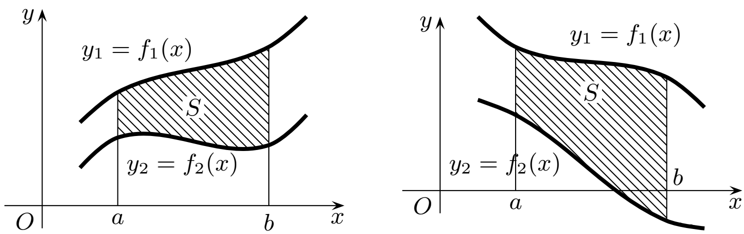

Рис. 2.3

Пример 2.4. Вычислить площадь четвертой части эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Решим уравнение эллипса относительно y. Для первой четверти $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$. Тогда

$$S = \int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Применим тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$. Тогда

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2\cos^2 t, \quad dx = a\cos t\,dt.$$

Определим новые пределы интегрирования. При $x = 0$ имеем $t = 0$ и при $x = a$ получим $t = \pi/2$. Тогда

$$S = \int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\, a\cos t\,dt = ab\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= ab \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2} \left(\int\limits_0^{\pi/2} dt + \int\limits_0^{\pi/2} \cos 2t\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} ab \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \pi ab.$$

Иногда удобно использовать формулу, аналогичную (2.6), но по переменной y, считая x функцией от y. Тогда площадь криволинейной трапеции (рис. 2.4) находится по формуле

$$S = \int\limits_c^d g(y)\, dy.$$

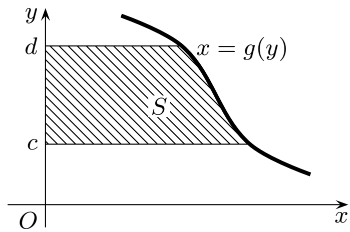

Рис. 2.4

Если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, где t меняется от t_1 до t_2, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) x'_t\, dt. \tag{2.7}$$

Пределы интегрирования в формуле (2.7) находят из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, $y(t) \geqslant 0$ на отрезке $[t_1; t_2]$.

Если фигура ограничена графиком непрерывной функции $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где ρ и φ — полярные координаты, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi. \tag{2.8}$$

Пример 2.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

Решение. По формуле (2.8) получаем

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} 4a^2 (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= 2a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right)\Big|_0^{2\pi} = 2a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 6a^2\pi.$$

2. Длина дуги кривой. Пусть кривая на плоскости в прямоугольных координатах задана уравнением $y = f(x)$. Если на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то длина дуги такой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \tag{2.9}$$

где a и b — абсциссы концов дуги.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt. \tag{2.10}$$

Аналогично выражается длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} dt. \tag{2.11}$$

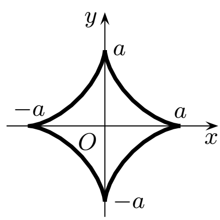

Рис. 2.5

Пример 2.6. Вычислить длину астроиды (гипоциклоиды) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (рис. 2.5).

Решение. Кривая симметрична относительно обоих координатных осей, поэтому вычислим длину 1/4 части кривой, расположенной в первой четверти. Имеем

$$x_t' = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y_t' = 3a\sin^2 t \cos t.$$

$$\frac{1}{4} l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 3a \int_0^{\pi/2} \sin t\, d(\sin t) =$$

$$= 3a \cdot \frac{1}{2}\sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a, \quad \text{откуда} \quad l = (3/2)a \cdot 4 = 6a.$$

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi. \tag{2.12}$$

Пример 2.7. Вычислить длину кардиоиды $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

Решение. По формуле (2.12) получаем $\rho' = 2a\sin\varphi$,

$$\frac{1}{2}l = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{4a^2(1-\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\cdot 2\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -4a\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a,$$

откуда $l = 16a$.

2.7. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики

Моменты и центры масс плоских кривых. Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и имеет плотность $\rho = \rho(x)$. Тогда **статические моменты** этой кривой M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx,$$
$$M_y = \int\limits_a^b \rho(x)x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx. \tag{2.13}$$

Моменты инерции J_x и J_y относительно осей Ox и Oy равны

$$
\begin{aligned}
J_x &= \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx, \\
J_y &= \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Координаты центра масс (центра тяжести) плоской линии $\bar{x}$ и $\bar{y}$ вычисляют по формулам

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{m} \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \frac{M_y}{m}, \\
\bar{y} &= \frac{1}{m} \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \frac{M_x}{m},
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

где m — масса дуги, т.е.

$$
m = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.
$$

Контрольная работа 7

Задача 1. Найти указанные неопределенные интегралы.

1. а) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$; б) $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

2. а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x(2\operatorname{tg} x+1)}$; б) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$; г) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 3x\,dx$.

3. а) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{3\cos^2 x}}$; б) $\displaystyle\int x\arcsin x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x-5\cos x+4}$.

4. а) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\displaystyle\int x3^{\frac{x}{2}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

5. а) $\displaystyle\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

6. а) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}}$; б) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$; г) $\displaystyle\int \sin x\cos 3x\,dx$.

7. а) $\int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; б) $\int x^2 e^x \, dx$;

в) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$; г) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

8. а) $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x \, dx$; б) $\int (1-6x) e^{2x} \, dx$;

в) $\int \frac{(x-7)dx}{x^2+4x+13}$; г) $\int \frac{\cos x \, dx}{1+\cos x}$.

9. а) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\int \ln x \, dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; г) $\int \sin^3 x \, dx$.

10. а) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx$; б) $\int x e^{-\frac{x}{2}} \, dx$;

в) $\int \frac{x \, dx}{x^3-1}$; г) $\int \sin 5x \cos 7x \, dx$.

11. а) $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$; б) $\int x^2 \sin 4x \, dx$;

в) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x-7} dx$; г) $\int \operatorname{tg}^2 \left(\frac{2}{3} x \right) dx$.

12. а) $\int \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$;

в) $\int \frac{2x+1}{x^3-1} dx$; г) $\int \sin^2 x \, dx$.

13. а) $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$; б) $\int x^2 5^x \, dx$;

в) $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$.

14. а) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x} \, dx}{x}$; б) $\int x e^{-x} \, dx$;

в) $\int \frac{x^2-3}{x^2-1} dx$; г) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$.

15. а) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int x\ln^2 x\,dx$;

в) $\int \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}dx$; г) $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$.

16. а) $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$; б) $\int xe^{2x}dx$;

в) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$; г) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

17. а) $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$; б) $\int \arcsin x\,dx$;

в) $\int \frac{x-1}{4x^3+x}dx$; г) $\int \cos^2 3x\,dx$.

18. а) $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}dx$; б) $\int x\cos 6x\,dx$;

в) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$; г) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

19. а) $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}dx}{1+x^2}$; б) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$;

в) $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$.

20. а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$; б) $\int x\ln(x+1)\,dx$;

в) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$; г) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$.

21. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$; б) $\int x^2e^{-x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; г) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

22. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; б) $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$;

в) $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}$; г) $\int \frac{dx}{3+5\cos 2x}$.

23. а) $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx;$ б) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x^2};$

в) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x}dx;$ г) $\displaystyle\int \cos^3 3x\,dx.$

24. а) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{\sqrt[4]{e^x+1}};$ б) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1};$ г) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx.$

25. а) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}};$ б) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{5x^2+6x+18};$ г) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx.$

26. а) $\displaystyle\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx;$ б) $\displaystyle\int \ln^3 x\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx;$ г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$

27. а) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5+x^6}};$ б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x};$

в) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx;$ г) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}.$

28. а) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx;$ б) $\displaystyle\int x2^x\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^3-x};$ г) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin x\,dx.$

29. а) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$ б) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx;$ г) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{4}\,dx.$

30. а) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}dx;$ б) $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx;$ г) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}.$

Задача 2. Вычислить указанные определенные интегралы.

1. а) $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

2. а) $\displaystyle\int\limits_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)dx$; б) $\displaystyle\int\limits_2^{5} \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$.

3. а) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \ln(x+3)dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

4. а) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x\ln(x^2+1)dx$; б) $\displaystyle\int\limits_4^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

5. а) $\displaystyle\int\limits_0^{1} xe^{-x}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_0^{1} xe^{-\frac{3}{2}x}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

7. а) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x\operatorname{arctg}x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{5} \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$.

8. а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

9. а) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{3} (x-2)\cos\frac{2\pi x}{3}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

10. а) $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\displaystyle\int\limits_4^{8} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

11. а) $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{0} xe^{-2x}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

12. а) $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

13. а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos 4x\,dx$; б) $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

14. а) $\int\limits_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$; б) $\int\limits_0^5 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$.

15. а) $\int\limits_0^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^4 \dfrac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

16. а) $\int\limits_1^e \ln x\,dx$; б) $\int\limits_1^{4{,}5} \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$.

17. а) $\int\limits_0^{\pi/9} \dfrac{x\,dx}{\cos^2 3x}$; б) $\int\limits_{-1}^0 \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

18. а) $\int\limits_0^{\pi/3} x\cos x\,dx$; б) $\int\limits_0^5 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$.

19. а) $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$; б) $\int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$.

20. а) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

21. а) $\int\limits_1^2 x\ln(x+1)\,dx$; б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 8} \dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

22. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; б) $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \dfrac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

23. а) $\int\limits_0^{0{,}5} x\arcsin x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{2+\cos x}$.

24. а) $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

25. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5+4x}}$.

26. а) $\int\limits_0^{1} xe^{-2x}dx$; б) $\int\limits_3^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

27. а) $\int\limits_1^{2} \frac{\ln x}{x^5}dx$; б) $\int\limits_{-1}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+5}}$.

28. а) $\int\limits_0^{\pi/4} x\operatorname{tg}^2 x\,dx$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

29. а) $\int\limits_1^{2} \ln(3x+2)\,dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$.

30. а) $\int\limits_0^{\pi/4} x\cos 2x\,dx$; б) $\int\limits_3^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

Задача 3.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 3 - x$.

2. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{x}$ при $0 < x < 1$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x$, $y = 2x - x^2$.

4. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ при $\sqrt{3} < x < \sqrt{8}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$$

6. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(4;8)$.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 5\sin^2 t, \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

8. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = x^2$, $y = 0{,}5x^2$ и прямой $y = 3x$.

9. Вычислить длину дуги астроиды $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

10. Вычислить длину дуги линии $\rho = \sin^3(\varphi/3)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугами парабол $y = x^2$, $y = 0{,}25x^2$ и прямой $y = 4$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой $y = 2x - x^2$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 2$ и прямой $x + 2y - 5 = 0$.

15. Вычислить длину дуги линии $\rho = 2\sin^3(\varphi/3)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

16. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды
$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

21. Найти площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и отрезком оси абсцисс.

22. Найти площадь, ограниченную кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

23. Вычислить длину кривой $\rho = a\sin^3(\varphi/3)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi$.

24. Найти длину дуги кривой $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4 - y^2$, $x = 0$.

27. Определить площадь, ограниченную параболой $y = x^2 - 5x + 6$ и координатными осями.

28. Определить площадь, ограниченную линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

29. Вычислить длину линии $y^2 = 9 - x$ между точками пересечения ее с осью Oy.

30. Вычислить длину линии $x^2 = 4 - y$ между точками пересечения ее с осью Ox.

Задача 4. Найти несобственные интегралы или доказать их расходимость.

1. $\int\limits_0^1 x \ln x\, dx.$ **2.** $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx.$ **3.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{x^2\, dx}{x^3+1}.$

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x\, dx}{16x^4+1}.$ **5.** $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$ **6.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}.$

7. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{2x^2+6x+5}.$ **8.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}.$ **9.** $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

10. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}.$ **11.** $\int\limits_{-3}^2 \frac{dx}{(x+2)^2}.$ **12.** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$

13. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$ **14.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ **15.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{1+x^6}.$

16. $\int\limits_0^{0,25} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ **17.** $\int\limits_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$ **18.** $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x\, dx.$

19. $\int\limits_0^1 \ln x\, dx.$ **20.** $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x} dx.$ **21.** $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}.$

22. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x/2}dx.$ **23.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}.$ **24.** $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$

25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$ **26.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-4x+3}.$ **27.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

28. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ **29.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3}dx.$ **30.** $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx.$

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

3.1. Вопросы программы

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Основные понятия. Задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Теорема существования и единственности задачи Коши. Основные классы дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах: уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним, линейные дифференциальные уравнения, уравнение Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.

3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Однородные и неоднородные линейные уравнения. Структура общего решения. Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных). Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод подбора частного решения для уравнений с правой частью специального вида.

3.2. Основные понятия

Определение 3.1. ***Дифференциальным уравнением*** *называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$.*

В общем виде дифференциальное уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

или $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$

Если искомая функция $y = y(x)$ зависит только от одной переменной величины, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**.

Определение 3.2. ***Порядком дифференциального уравнения*** *называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.*

Пример 3.1. Уравнение $y''+5y = x$ является уравнением второго порядка.

3.3. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{3.2}$$

Оно же может быть записано в другом виде, разрешенном относительно производной:

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3.2$'$}$$

Неизвестной в дифференциальном уравнении первого порядка является функция $y = y(x)$.

Определение 3.3. ***Решением уравнения*** $F(x, y, y') = 0$ *или* $y' = f(x, y)$ *на интервале* $(a; b)$ *называется любая функция* $y = y(x)$*, которая будучи подставленной в это уравнение вместе со своей производной* $y'(x)$ *обращает его в тождество относительно* $x \in (a; b)$.

Пример 3.2. Функция $y(x) = -2/x^2$ является решением дифференциального уравнения $y'-xy^2 = 0$. Действительно, найдем производную функции $y(x)$: $y'(x) = 4/x^3$. Подставим y и y' в левую часть дифференциального уравнения:

$$\frac{4}{x^3} - x\left(-\frac{2}{x^2}\right)^2 = \frac{4}{x^3} - \frac{4}{x^3} = 0.$$

Получили тождество $0 \equiv 0$.

Общее решение $y = y(x, C)$ дифференциального уравнения первого порядка зависит от одной произвольной постоянной C. Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретном значении постоянной C, называется **частным решени-**

ем. Для получения частного решения необходимо задать дополнительно **начальное условие** вида $y = y_0$ при $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.3}$$

Определение 3.4. *Задача нахождения решения уравнения (3.2′), удовлетворяющего его начальному условию (3.3), называется* ***задачей Коши*** *для дифференциального уравнения.*

В некоторой области D плоскости Oxy рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной: $y' = f(x, y)$.

Теорема 3.1 (существования и единственности решения). *Если для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\partial f/\partial y$ непрерывны в области D, то для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$.*

3.4. Решение основных классов дифференциальных уравнений первого порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 3.5. *Уравнение вида*

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0 \tag{3.4}$$

или

$$y' = M_3(x)N_3(y) \tag{3.4′}$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными***.

В уравнении (3.4) коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x или только от y.

Схема решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) в первом случае путем деления обеих частей уравнения на выражение $N_1(y)M_2(x)$ приводим его к виду

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0, \tag{3.5}$$

или во втором случае путем деления обеих частей уравнения на выражение $N_3(y)$ приводим его к виду

$$\frac{dy}{N_3(y)} = \frac{dx}{1} M_3(x). \tag{3.6}$$

Переход от уравнений (3.4) и (3.4′) соответственно к уравнениям (3.5) и (3.6) называется **процедурой разделения переменных**;

2) интегрируем уравнение (3.5) или (3.6), получаем общий интеграл уравнения (3.4) или (3.4′) соответственно;

3) ответ записываем в виде $\varphi(x, y) = C$ (или $y = \varphi(x, C)$, или $x = \varphi(y, C)$).

Замечание. Деление на $N_1(y)M_2(x)$ может привести к потере решений, при которых $N_1(y)M_2(x) = 0$. Те из этих решений, которые не могут быть получены из общего решения $\varphi(x, y) = C$ ни при каких значениях C, следует присоединить к ответу.

Пример 3.3. Решить уравнение $(1 - x)y\,dx - (1 + y)x\,dy = 0$.

Решение. Разделяя переменные при $xy \neq 0$, находим

$$\frac{(1-x)y\,dx}{yx} - \frac{(1+y)x\,dy}{yx} = 0,$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right) dx - \left(\frac{1+y}{y}\right) dy = 0,$$

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx - \left(\frac{1}{y} + 1\right) dy = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx - \int \left(\frac{1}{y} + 1\right) dy = 0,$$

$$\ln|x| - x - \ln|y| - y = C, \quad \ln\left|\frac{x}{y}\right| - x - y = C.$$

Также отмечаем, что $y = 0$ является решением, и его присоединяем к ответу.

2. Однородные дифференциальные уравнения

Определение 3.6. *Функция $F(x, y)$ называется* ***однородной функцией*** *n-го измерения (порядка) относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$.*

Пример 3.4. Функция $F(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ — однородная функция второго измерения, так как

$$F(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^4 + (\lambda y)^4} = \lambda^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda^2 F(x, y).$$

Определение 3.7. *Уравнение первого порядка*

$$y' = F(x, y) \tag{3.7}$$

называется ***однородным*** *относительно x и y, если функция $F(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y, т.е. $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$.*

Схема решения однородных уравнений:

1) преобразуем уравнение (3.7) к виду $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

2) делаем замену $y/x = u$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y = ux$ и $y' = \dfrac{dy}{dx} = u'x + u = x\dfrac{du}{dx} + u$. Уравнение (3.7) приводим к виду

$$x\frac{du}{dx} + u = f\left(\frac{ux}{x}\right) = f(u) \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

т.е. к уравнению с разделяющимися переменными;

3) разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

отслеживаем возможную потерю решений;

4) возвращаемся к переменной y заменой $u = y/x$.

Пример 3.5. Решить уравнение $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Решение. В правой части уравнения стоит однородная функция нулевого измерения. Действительно,

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \cdot \lambda y}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = F(x, y).$$

Значит, имеем однородное дифференциальное уравнение. Делаем замену $y = ux$, тогда

$$u + u'x = \frac{xux}{x^2 + (xu)^2}, \quad u + u'x = \frac{u}{1 + u^2}, \quad u'x = \frac{u}{1 + u^2} - u,$$

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{u^3}{1 + u^2}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{1 + u^2}{u^3}du = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее, находим

$$\int \frac{1+u^2}{u^3}du = -\int \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2}u^2 + \ln|u| = -\ln|x| + C.$$

Подставляя $u = y/x$, получаем общий интеграл последнего уравнения:

$$-\frac{x^2}{2y^2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + C.$$

Замечание. Уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ будет однородным в том и только в том случае, когда $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения.

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}. \tag{3.8}$$

Действительно, если $c_1 = c = 0$, то уравнение (3.8) — однородное. Пусть теперь $c_1 \neq 0$ или $c \neq 0$. Сделаем замену переменных: $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$. Подставляя в уравнение (3.8) выражения x, y, y', будем иметь

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}.$$

Подберем h и k так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Определим h и k как решения системы уравнений (3.9). При этом условии уравнение (3.8) становится однородным:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}.$$

Система (3.9) не имеет решения, если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $ab_1 = a_1b$. Но в этом случае $a_1/a = b_1/b = \lambda$, т.е. $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, и, следовательно, уравнение (3.8) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}. \tag{3.10}$$

Тогда подстановкой

$$z = ax+by \tag{3.11}$$

уравнение приводится к виду дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Действительно, $z' = a + by'$, откуда

$$y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}. \tag{3.12}$$

Подставляя в (3.10) выражения (3.11), (3.12), получим

$$\frac{1}{b}\,\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z + c_1},$$

а это есть уравнение с разделяющимися переменными.

3. Линейные дифференциальные уравнения

Определение 3.8. ***Линейным уравнением*** *первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной, которое имеет вид*

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{3.13}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные непрерывные функции от x или постоянные.

Схема решения линейного уравнения (**метод Бернулли**):

1) решение линейного уравнения (3.13) ищем в виде

$$y = u(x)v(x), \tag{3.14}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — неизвестные функции. Дифференцируя обе части равенства (3.14), находим $y' = u'v + uv'$. Подставляя выражения для y и y' в уравнения (3.13), будем иметь

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

или

$$u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) + v\frac{du}{dx} = Q(x); \tag{3.15}$$

2) функции $u(x)$ и $v(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases} \tag{3.16}$$

Найдем любое частное решение $v(x) \not\equiv 0$ линейного однородного уравнения $v' + P(x)v = 0$. Разделяя переменные в этом уравнении, находим $dv/v = -P(x)dx$. Интегрируя, получаем $v = C_1 e^{-\int P(x)dx}$. А так как C_1 не влияет на окончательное решение уравнения (3.13), то за функцию $v(x)$ возьмем

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}, \tag{3.17}$$

т.е. C_1 положим равным 1;

3) подставляя найденное значение v во второе уравнение системы (3.16), получим

$$v(x)u' = Q(x) \quad \text{или} \quad u' = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

откуда

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C;$$

4) подставляя u и v в (3.14), окончательно получим

$$y = \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C\right] e^{-\int P(x)dx}.$$

Эту формулу запоминать не рекомендуется. Вся схема решения хорошо представлена на конкретном примере.

Пример 3.6. Решить уравнение $y' - \dfrac{2}{x-1} y = (x-1)^3$.

Решение. Полагаем $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, будем иметь

$$u'v + uv' - \frac{2}{x-1} uv = (x-1)^3,$$

$$u\left(v' - \frac{2v}{x-1}\right) + u'v = (x-1)^3. \tag{3.18}$$

Для определения v получаем уравнение

$$v' - \frac{2}{x-1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = \frac{2\,dx}{x-1},$$

откуда

$$\ln|v| = 2\ln|x-1|, \quad v = (x-1)^2.$$

Подставляя полученное выражение функции $v(x)$ в уравнение (3.18), получаем уравнение для определения функции $u(x)$:

$$(x-1)^2 u' = (x-1)^3 \quad \text{или} \quad u' = x - 1.$$

Интегрируя последнее, находим

$$u(x) = \int (x-1)dx = \frac{(x-1)^2}{2} + C.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{(x-1)^4}{2} + C(x-1)^2.$$

Замечание. Есть и другие методы решения линейных уравнений первого порядка, например, метод вариации постоянной.

4. Дифференциальные уравнения Бернулли

Определение 3.9. *Уравнение, имеющее вид*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

*где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные непрерывные функции от x, а $n \neq 0$ и $n \neq 1$, называется **уравнением Бернулли**.*

С помощью замены $z = y^{-n+1}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению. Действительно, разделив обе части уравнения Бернулли на y^n, получим

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q. \qquad (3.19)$$

Выполним замену $z = y^{-n+1}$, тогда $z' = (-n+1)y^{-n}y'$.

Найдя общий интеграл и подставив вместо z выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Замечание. Аналогично тому, как это делалось для линейных уравнений, можно показать, что решение уравнения Бернулли можно искать в виде произведения двух функций $y = u(x)v(x)$, где $v(x)$ — какая-либо функция, отличная от нуля и удовлетворяющая уравнению $v' + P(x)v = 0$. Следует отметить, что при этом могут быть потеряны решения вида $y = 0$.

5. Уравнения в полных дифференциалах

Определение 3.10. *Уравнение*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (3.20)$$

*называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u = u(x, y)$, т.е.*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

В этом случае уравнение (3.20) записывается в виде $du = 0$, поэтому его общий интеграл имеет вид $u(x, y) = C$. Для того, чтобы уравнение (3.20) было уравнением в полных дифференциалах, должно выполняться соотношение (тождество)

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (3.21)$$

Схема решения уравнения в полных дифференциалах:

1) проверяем с помощью условия (3.21), что (3.20) — уравнение в полных дифференциалах. Тогда $\partial u/\partial x = P$, $\partial u/\partial y = Q$;

2) из соотношения $\partial u/\partial x = P(x,y)$ находим

$$u = \int P(x,y)dx + \varphi(y). \tag{3.22}$$

При интегрировании считаем y постоянной;

3) продифференцируем обе части выражения (3.22) по y и получаем равенство $\partial u/\partial y = Q(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right) + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

откуда выражаем $\varphi'(y)$;

4) интегрированием по y от $\varphi'(y)$ находим $\varphi(y)$. При интегрировании считаем x постоянной;

5) подставляя $\varphi(y)$ в равенство (3.22), получаем искомую функцию $u(x,y)$.

Пример 3.7. Решить уравнение $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0.$

Решение. Проверяем принадлежность этого уравнения к уравнению в полных дифференциалах. Обозначим

$$P(x,y) = \frac{2x}{y^3}, \quad Q(x,y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4},$$

тогда

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Соотношение (3.21) при $y \neq 0$ выполняется. Значит, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}, \quad \text{то} \quad u = \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{y^3} + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — пока неопределенная функция от y. Дифференцируя это соотношение по y и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4},$$

находим

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4}.$$

Следовательно,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1, \quad u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения есть

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

Замечание. Бывают случаи, когда для уравнения (3.20) условие (3.21) не выполняется, но удается подобрать некоторую функцию, после умножения на которую всех членов уравнения (3.20) оно становится уравнением в полных дифференциалах. Подробнее об этом можно прочитать в литературе [5].

3.5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

К дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающим понижение порядка, относятся следующие.

I. Уравнения вида

$$y'' = F(x), \tag{3.23}$$

не содержащие в правой части искомую функцию.

Интегрируя уравнение (3.23), получаем

$$y' = \int F(x)\,dx + C_1.$$

Интегрируя последнее еще раз, получаем решение исходного уравнения

$$y(x) = \int \left(\int F(x)\,dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Пример 3.8. Решить уравнение $y'' = \cos 3x$.

Решение. Интегрируем исходное уравнение первый раз:

$$y' = \int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C_1.$$

Интегрируя второй раз, получаем решение данного уравнения

$$y(x) = \int \left(\frac{1}{3}\sin 3x + C_1 \right) dx = \frac{1}{9}(-\cos 3x) + C_1 x + C_2.$$

II. Уравнения вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y), \tag{3.24}$$

не содержащие явным образом искомую функцию $y(x)$.

Обозначим $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$. Подставляя эти выражения в уравнение (3.24), получим уравнение первого порядка

$p'(x) = F(x, p)$ относительно неизвестной функции $p(x)$. Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение $p = p(x, C_1)$, а затем из соотношения $y' = p$ получаем общий интеграл уравнения (3.24):

$$y(x) = \int p(x, C_1)dx + C_2.$$

Пример 3.9. Решить уравнение $xy'' = y'$.

Решение. Положим $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$. Данное уравнение примет вид

$$xp' = p \quad \text{или} \quad x\frac{dp}{dx} = p.$$

Разделяя переменные, получим $dp/p = dx/x$. После интегрирования имеем

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \text{или} \quad p = C_1 x.$$

Так как $p(x) = y'$, то последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно $y'(x)$:

$$y' = C_1 x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = C_1 x \quad \Rightarrow \quad dy = C_1 x\, dx.$$

Интегрируя, получаем $y = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$ — общее решение исходного уравнения.

III. Уравнения вида

$$y'' = F(y, y'), \tag{3.25}$$

не содержащие явным образом независимую переменную x.

Для решения делаем замену переменной $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y(y)y'(x) = p'p.$$

Подставляя выражения для y' и y'' в уравнение (3.25), получим уравнение первого порядка относительно функции $p(y)$. Интегрируя его, находим p как функцию от y и C_1:

$$p'p = F(y, p) \quad \Rightarrow \quad p = p(y, C_1).$$

Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем уравнение первого порядка $y' = p(y, C_1)$. Разделяя переменные, находим

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Пример 3.10. Решить уравнение $y'' = \sqrt{y'}$.

Решение. Положим $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Подставляя выражения для y' и y'' в заданное уравнение, получим

$$p'p = \sqrt{p} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{p}\,(\sqrt{p}\,p' - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{p} = 0, \\ \sqrt{p}\,p' = 1. \end{array} \right.$$

Из первого уравнения получим

$$\sqrt{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1.$$

Второе — является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, будем иметь

$$\sqrt{p}\,dp = dy, \quad \frac{2}{3}\sqrt{p^3} = y + C_1, \quad p^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(y + C_1),$$

$$p = \left(\frac{3}{2}(y + C_1)\right)^{2/3}, \quad y' = \left(\frac{3}{2}(y + C_1)\right)^{2/3},$$

$$\int \frac{dy}{\left(\frac{3}{2}(y + C_1)\right)^{2/3}} = \int dx, \quad \left(\frac{3}{2}(y + C_1)\right)^{1/3} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = x + C_2.$$

Окончательно получаем общие решения исходного уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} y = C_1, \\ 2\left(\dfrac{3}{2}(y + C_1)\right)^{1/3} = x + C_2. \end{array} \right.$$

3.6. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение 3.11. *Дифференциальное уравнение n-го порядка называется* ***линейным****, если оно первой степени относительно искомой функции $y(x)$ и ее производных y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$, т.е. имеет вид*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{3.26}$$

где a_0, a_1, ..., a_n и $f(x)$ — заданные непрерывные функции от x или постоянные, причем $a_0 \neq 0$.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (3.26) называется **линейным неоднородным**. Если же $f(x) = 0$, то уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением n-го порядка.

Если все a_0, a_1, ..., a_n являются постоянными числами, то уравнение (3.26) называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка **с постоянными коэффициентами**.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0. \tag{3.27}$$

Теорема 3.2. *Если y_1, y_2, ..., y_n являются линейно независимыми решениями уравнения (3.27), то его общее решение есть*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{3.28}$$

где C_1, ..., C_n — произвольные постоянные.

Для нахождения линейно независимых решений уравнения (3.27):

1) составляем **характеристическое уравнение**

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0;$$

2) находим корни этого характеристического уравнения k_1, k_2, ..., k_n;

3) по характеру корней выписываем линейно независимые решения, руководствуясь тем, что:

а) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx}: $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ..., $y = e^{k_n x}$;

б) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ и $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ соответствуют два частных действительных решения $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ и $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$;

в) каждому действительному корню k кратности r соответствуют r линейно независимых частных решений $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, $y_3 = x^2 e^{kx}$, ..., $y_r = x^{r-1}e^{kx}$;

г) каждой паре комплексных сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ кратности μ соответствует 2μ действительных частных решений $y_1^{(1)} = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2^{(1)} = xe^{\alpha x}\cos(\beta x)$, ..., $y_\mu^{(1)} = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_1^{(2)} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $y_2^{(2)} = xe^{\alpha x}\sin(\beta x)$, ..., $y_\mu^{(2)} = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Этих частных решений будет ровно столько, какова степень характеристического уравнения. В [5] доказывается, что эти решения линейно независимы;

4) найдя n линейно независимых частных решения y_1, ..., y_n, строим общее решение данного линейного уравнения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

Пример 3.11. Решить уравнение $y^{(IV)} - y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^4 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (k-1)(k+1)(k^2+1) = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Получаем общий интеграл:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение (3.26).

Теорема 3.3. *Если $y_{оо}$ — общее решение однородного уравнения (3.27), а $y_{чн}$ — частное решение неоднородного уравнения (3.26), то $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$ есть общее решение неоднородного уравнения.*

Для отыскания частного решения неоднородного уравнения существуют два способа. Первый называют **методом вариации произвольных постоянных**, а второй — **подбором частного решения по виду правой части неоднородного уравнения**.

Метод вариации произвольных постоянных заключается в том, что величины C_1, ..., C_n в общем решении однородного уравнения (3.27) считаются не постоянными, а функциями, зависящими от x. При этом они должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + ... + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Эта система (см. [5]) имеет решение

$$C_1 = \int C_1' dx + \bar{C}_1, \ ..., \ C_n = \int C_n' dx = \bar{C}_n,$$

где $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, ..., $\bar{C}_n$ — постоянные интегрирования. Окончательно выражение $y_{он} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ будет являться общим решением неоднородного уравнения (3.26).

Пример 3.12. Решить уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Решение. Находим общее решение однородного уравнения $y'' - y'/x = 0$. Так как

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \quad \text{то} \quad \ln y' = \ln x + \ln C, \quad y' = Cx.$$

Интегрируя, получим $y = C_1x^2 + C_2$. Чтобы последнее выражение было решением данного неоднородного уравнения, надо определить C_1 и C_2 как функции от x из системы

$$\begin{cases} C_1'x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \\ 2C_1'x + C_2' \cdot 0 = x. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = 1/2$, $C_2' = -x^2/2$, откуда в результате интегрирования получаем

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2.$$

Подставляя найденные функции в формулу $y = C_1x^2 + C_2$, получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = \bar{C}_1x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3},$$

где $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ — произвольные постоянные.

Подбор частного решения по виду правой части неоднородного уравнения заключается в следующем. Предположим, что правая часть неоднородного уравнения имеет в общем случае структуру

$$f(x) = [P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}, \tag{3.29}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно. Частное решение неоднородного уравнения строится в виде

$$y_{\text{ч}} = x^{\mu}\left[U_l(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_l(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right]. \tag{3.30}$$

Имея конкретную функцию вида (3.29) в правой части неоднородного уравнения (3.26), определяем значения величин n, m, α, β. В зависимости от того, является значение $\alpha + i\beta$ корнем характеристического уравнения (3.27) или нет, в структуре частного решения (3.30) появляется множитель x^{μ}. Если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $\mu = 0$. Если же является, то μ равно значению кратности этого корня. Величина $l = \max\{n, m\}$, а сами многочлены $U_l(x)$ и $V_l(x)$ определяются из условия того, что полученное выражение частного решения должно удовлетворять данному неоднородному линейному дифференциальному уравнению (метод неопределенных коэффициентов).

Пример 3.13. Решить уравнение $y^{(IV)} - y = 5\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид $k^4 - 1 = 0$. Корнями этого характеристического уравнения являются $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Далее, исходя из вида правой части данного уравнения, получаем $n = 0$, $m = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Значение $\alpha + i\beta$ совпадает с корнем характеристического уравнения, кратность которого равна 1. Поэтому величина μ равна 1. Величина $l = \max\{0, 0\} = 0$. Таким образом, структура частного решения (3.30) для данного уравнения принимает вид

$$y_{\text{ч}} = x(A\cos x + B\sin x).$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, найдем

$$4A\sin x - 4B\cos x = 5\cos x,$$

откуда, требуя выполнения тождеств, получаем $4A = 0$, $-4B = 5$ или $A = 0$, $B = -5/4$. Окончательно частным решением дифференциального уравнения будет

$$y_{\text{ч}} = -\frac{5}{4} x \sin x,$$

а общим решением —

$$y_{\text{он}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \left(-\frac{5}{4} x \sin x\right).$$

Контрольная работа 8

Задача 1. Найти общий интеграл указанного дифференциального уравнения.

1. $xy\,dx + (x+1)dy = 0.$

2. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy.$

3. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0.$

4. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2.$

5. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$

6. $2x^2yy' + y^2 = 2.$

7. $y\dfrac{dy}{dx} + x = 1.$

8. $xy' + y = y^2.$

9. $y' - xy^2 = 2xy.$

10. $y' = 7^{x+y}.$

11. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0.$

12. $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0.$

13. $(2x+2xy^2)dx = (x^2y+2y)dy.$

14. $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0.$

15. $(e^x+8)dy - ye^x dx = 0.$

16. $(1+e^x)y' = ye^x.$

17. $(6x+3xy^2)dx = (yx^2+y)dy.$

18. $(3+e^x)yy' = e^x.$

19. $\sqrt{5+y^2}\,dx + 4(x^2y+y)dy = 0.$

20. $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0.$

21. $6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2dx.$

22. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0.$

23. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$

24. $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy.$

25. $y' + 2x^3y^2 = 0.$

Задача 2. Найти общий интеграл указанного дифференциального уравнения.

1. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y.$

2. $xy' = \dfrac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}.$

3. $xy' = \dfrac{3y^2+4yx^2}{2y^2+x^2}.$

4. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2.$

5. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

6. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$.

7. $(x+2y)dx - x\,dy = 0$.

8. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$.

9. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

10. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

11. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

12. $xy' = y - xe^{y/x}$.

13. $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

14. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

15. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$.

16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

17. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12$.

18. $xy' = \dfrac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$.

19. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.

20. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

21. $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$.

22. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

23. $(x^2 - 6xy)dy - (x^2 + xy - 5y^2)dx = 0$.

24. $(2x^2 - 6xy)dy = (x^2 + 2xy - 5y^2)dx$.

25. $(2x - y)dy - (x + 2y)dx = 0$.

Задача 3. Решить задачу Коши.

1. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

2. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$

3. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

4. $y - \dfrac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

5. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

6. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \dfrac{3}{2}.$

7. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

8. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

9. $y' - \dfrac{2x-5}{x}y = 5, \quad y(2) = 4.$

10. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

11. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}.$

12. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

13. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

14. $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

15. $y' - \dfrac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

16. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1.$

17. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}.$

18. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$

19. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$

20. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

21. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e.$

22. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

23. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

24. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1, \quad y(1) = 1.$

25. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{e}.$

Задача 4. Проверить, что данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и найти общий интеграл этого уравнения.

1. $\left(\dfrac{1}{x+y}+2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x+y}-3\right)dy=0.$

2. $(x+y\sin^2 y)dx+(1+x\sin^2 y+xy\sin 2y)dy=0.$

3. $\dfrac{1-2y}{x^2y}dx+\dfrac{1-x}{xy^2}dy=0.$

4. $\left(e^{-x}-\dfrac{2}{yx^3}\right)dx+\left(\sin 3y-\dfrac{1}{x^2y^2}\right)dy=0.$

5. $\left(2xy-\dfrac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2-\dfrac{2}{y^3}\right)dy=0.$

6. $\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\cos x}{y-1}\right)dx+\dfrac{1-\sin x}{(y-1)^2}dy=0.$

7. $\left(\ln y+\dfrac{y}{x}-x\right)dx+\left(\ln x+\dfrac{x}{y}+1\right)dy=0.$

8. $\left(2\cos 2x\cos 3y-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\dfrac{2}{y}-3\sin 2x\sin 3y\right)dy=0.$

9. $\left(\dfrac{2}{x^2}+\cos^2 y\right)dx+(y-x\sin 2x)dy=0.$

10. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\dfrac{1-x}{y^2}dy=0.$

11. $3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)dy=0.$

12. $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0.$

13. $\left(3x^2+\dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx-\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy=0.$

14. $\left(2x-1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\dfrac{1}{x}\right)dy=0.$

15. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0.$

16. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0.$

17. $(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0.$

18. $xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}^2 y)dy=0.$

19. $(5xy^2-x^3)dx+(5x^2y-y)dy=0.$

20. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0.$

21. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0.$

22. $xy^2dx+y(x^2+y^2)dy=0.$

23. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0.$

24. $\dfrac{dy}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0.$

25. $\left(xe^x+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{dy}{x}=0.$

Задача 5. Найти общий интеграл указанного дифференциального уравнения.

1. $x^2y''=y'^2.$

2. $y''=2yy'.$

3. $y''(e^x+1)+y'e^x=0.$

4. $yy''=y'^2.$

5. $xy'''=y''.$

6. $yy''-2yy'\ln y=y'^2.$

7. $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}.$

8. $y'^2+2yy''=0.$

9. $y''=y'^2.$

10. $y''=2y'+x.$

11. $y'''x\ln x=y''.$

12. $xy''=1-y''.$

13. $2xy'''=y''.$

14. $xy'''+y''=x+1.$

15. $x^2y''+xy'=1.$

16. $y''y^3+1=0.$

17. $1+(y')^2+yy''=0.$

18. $y''(1+y)-5(y')^2=0.$

19. $y''\operatorname{tg} y=2(y')^2.$

20. $3yy''+(y')^2=0.$

21. $xy'''+y''+x=0.$

22. $x^5y'''+x^4y''=1.$

23. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3.$

24. $y'''\operatorname{tg} x=y''+1.$

25. $xy'''+y''=\sqrt{x}.$

Задача 6. Найти общее решение указанного дифференциального уравнения.

1. $y'' + 6y' + 9y = (16x + 24)e^x + 2\sin 6x + \cos 6x.$

2. $y'' + 2y' - 3y = (8x + 6)e^x + \sin x + 3\cos x.$

3. $y'' - 2y' - 3y = 6x^2 - 1 + 3\cos x.$

4. $y'' - 2y' - 3y = (8x - 14)e^{-x} - \sin 3x.$

5. $y'' - y' = 6x + 5 + \cos x.$

6. $y'' - y' = xe^x + \sin x.$

7. $y'' - y' = x^2 + x + 5\cos 2x - \sin 2x.$

8. $y'' - y' = xe^{2x} + 8\sin x + \cos x.$

9. $y'' + 3y' + 3y = 1 - x^2 + 9\sin 2x.$

10. $y'' + 3y' + 2y = e^{2x} + \cos 10x - 2\sin 10x.$

11. $7y'' - y' = 12x - 7\cos x + \sin x.$

12. $7y'' - y' = e^{7x} + 8\cos 7x + 3\sin 7x.$

13. $y'' - 4y' = xe^{2x} + 6\cos 2x - 3\sin 2x.$

14. $y'' - 13y' + 12y = x + 1 - 14\sin x.$

15. $y'' - 13y' + 12y = e^x + 7\cos x - 2\sin x.$

16. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 + 2x - 5 + 16\sin 3x - \cos 3x.$

17. $y'' - 5y' + 6y = xe^{-x} - \sin 2x + \cos 2x.$

18. $y'' - 3y' + 2y = (1 - 2x)e^x + 18\sin x.$

19. $y'' - 3y' + 2y = 1 - x^2 + 19\sin x + \cos x.$

20. $y'' - 2y' + y = (2x + 5)e^x - 5\sin 6x.$

21. $y'' - 2y' + y = 5x + 10 + \cos 2x - \sin 2x.$

22. $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 2x + 3 - 4\sin 3x.$

23. $y'' + 3y' + 2y = -e^{-x} - 2\cos 2x + \sin 2x.$

24. $y'' - 4y' + 3y = -4xe^x + \cos x.$

25. $y'' - 4y' + 3y = 3x + 4 - 8\sin 2x + \cos 2x.$

Список рекомендуемой литературы

1. *Бугров Я. С.* Высшая математика : учебник для вузов по инженерно-техническим специальностям : в 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; под ред. В. А. Садовничего. — 5-е изд., стер. — М.: Дрофа, 2003. — 248 с.

2. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. — М.: Астрель, АСТ, 2002. — 991 с.

3. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: Оникс; Мир и образование, 2005. — 304 с.

4. *Запорожец Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу : учеб. пособие / Г. И. Запорожец. — 6-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2010. — 460 с.

5. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. пособие для высш. техн. учебных заведений : в 2 кн. / Н. С. Пискунов. — изд. стер. — М.: Интеграл-Пресс, 2005. — 415 с.

6. *Шипачев В. С.* Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. — 7-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2005. — 479 с.

7. Пределы. Производные. Функции нескольких переменных. Интегралы : учеб. пособие / авт.-сост. В. Г. Агаков, П. С. Атаманов, А. Н. Быкова, Т. В. Картузова и др. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2005. — 151 с.

8. Дифференциальные уравнения. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Ряды : учеб. пособие / авт.-сост. В. Г. Агаков, Н. В. Григорьева, Н. Д. Поляков и др. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2005. — 138 с.

Оглавление

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников технических факультетов**

Редактор Т. Н. Князева
Компьютерный набор и верстка В. Г. Сытина

Подписано в печать 16.06.14. Формат 60×84/16. Бумага газетная.
Печать офсетная. Гарнитура Журнальная.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,68. Тираж 500 экз. Заказ № 484.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15