МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
РЯДЫ

Учебное пособие

Чебоксары 2005

УДК 517
Д503

Авторы-составители:
В.Г. Агаков, Н.В. Григорьева, Н.Д. Поляков,
С.С. Сайкин, А.П. Тарасов, В.Г. Яковлев

Д503 **Дифференциальные** уравнения. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Авт.-сост.: В.Г. Агаков, Н.В. Григорьева, Н.Д. Поляков и др. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2005. 138 с.

ISBN 5-7677-0979-3

Изложены теоретические сведения по разделам «Дифференциальные уравнения», «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы», «Ряды» в соответствии с программой курса высшей математики для студентов-заочников инженерно-технических специальностей. Положения теории продемонстрированы на решениях типовых примеров. По каждому разделу приведены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов-заочников технических факультетов.

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Отв. редактор: профессор В.Г. Агаков

ISBN 5-7677-0979-3

Учебное издание

**Агаков Всеволод Георгиевич, Григорьева Нина Валерьяновна,
Поляков Николай Дмитриевич и др.**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
РЯДЫ**

Учебное пособие

Редактор О.А. Хлебкова
Корректор Н.Г. Александрова
Компьютерный набор и верстка В.Г. Сытина

Подписано в печать 21.04.2005. Формат 60×84/16. Бумага газетная.
Гарнитура Computer Modern. Печать оперативная. Усл. печ. л. 8,01.
Уч.-изд. л. 7,52. Тираж 300 экз. Заказ № 236.

Издательство Чувашского университета
Типография университета. 428015 Чебоксары, Московский просп., 15

Глава 1.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

где F — функция указанных аргументов, заданная в некоторой области их изменения.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то соответствующее дифференциальное уравнение называется уравнением с частными производными.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Если уравнение можно разрешить относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x)),$$

то уравнение называется ДУ n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая n раз в интервале (a, b), называется решением дифференциального уравнения в этом интервале, если она обращает данное уравнение в тождество, т.е.

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

для всех $x \in (a, b)$.

График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

§1. Общие понятия. Теорема существования и единственности

ДУ первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', то имеем

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

откуда $dy - f(x,y)dx = 0$, или в более общем виде

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Функция $y = y(x)$, непрерывная и непрерывно дифференцируемая в интервале (a, b), называется решением ДУ первого порядка, если она обращает данное уравнение в тождество на этом интервале. Если решение ДУ задано в неявном виде, то его называют интегралом ДУ. График решения ДУ называют интегральной кривой.

Задача Коши. Найти решение $y = y(x)$ ДУ (1.1), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Геометрический смысл этой задачи состоит в том, что ищется интегральная кривая, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей области $\bar{D}$ плоскости xOy.

Теорема 1.1 [о существовании и единственности решения задачи Коши]. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области

$$\bar{D} = \{(x,y) \mid |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\},$$

следовательно ограничена в ней ($|f(x,y)| \leqslant A$);

2) в области $\bar{D}$ функция $f(x,y)$ по переменной y удовлетворяет условию Липшица, т.е. для всех (x, y) и $(x, \bar{y})$ из $\bar{D}$ выполняется неравенство $|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leqslant L|y - \bar{y}|$;

3) точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит внутри $\bar{D}$.

Тогда решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) существует и единственно.

Замечания.

1. Условие Липшица выполняется всегда, когда частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области $\bar{D}$ ограничена, т.е. существует $M > 0$, что $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M$.

2. Теорема дает достаточные условия единственности, а значит, задача может иметь единственное решение и при невыполнении какого-либо условия теоремы.

3. Для существования решения достаточно только непрерывности функции $f(x,y)$ в области $\bar{D}$, но при этом решение может не быть единственным.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x,c)$, зависящая от произвольной постоянной c и удовлетворяющая условиям:

а) функция $\varphi(x,c)$ обращает данное уравнение в тождество;

б) для любых начальных условий $y(x_0) = y_0$ можно найти такое $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x,c_0)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

Общее решение $\Phi(x,y,c) = 0$, заданное в неявном виде, называется общим интегралом этого уравнения. Геометрически общее решение и общий интеграл представляют собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от одного параметра c.

Частным решением ДУ называется решение $y = \varphi(x,c_0)$, полученное из общего решения при фиксированном значении $c = c_0$, где c_0 — число. Аналогично определяется и частный интеграл.

§2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{2.1}$$

или

$$y' = M_3(x)N_3(y) \tag{2.2}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Предполагая $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ и разделив (2.1) на это выражение, уравнение (2.1) можно привести к виду

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0, \tag{2.3}$$

которое имеет общий интеграл

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c.$$

Аналогично, предположив $N_3(y) \neq 0$, (2.2) приводится к виду

$$\frac{dy}{N_3(y)} = M_3(x)dx, \tag{2.4}$$

которое имеет общий интеграл

$$\int \frac{dy}{N_3(y)} = \int M_3(x)\,dx + c.$$

Уравнения (2.3) и (2.4) называются уравнениями с разделенными переменными, а переход от уравнений (2.1) и (2.2) к уравнениям (2.3) и (2.4) соответственно называется процедурой разделения переменных.

Замечание. Корни уравнения $N_1(y) = 0$ и $M_2(x) = 0$ являются решениями уравнения (2.1), а корни уравнения $N_3(y) = 0$ являются решениями уравнения (2.2).

Пример 2.1. Решить уравнение $(1-x)ydx - (1+y)xdy = 0$.

Решение. Поделив на $xy \neq 0$, получим

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)dx - \left(\frac{1+y}{y}\right)dy = 0.$$

Интегрируя, получаем $\ln|xy| - x - y = c$ — общий интеграл уравнения. Очевидно, совокупность всех решений исходного уравнения задается общим интегралом и решениями $x = 0$ и $y = 0$.

§3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c), \tag{3.1}$$

где a, b, c — постоянные.

Если $b = 0$, то это уравнение уже является уравнением с разделяющимися переменными.

Полагая $b \neq 0$, введем новую функцию $u = u(x)$: $u = ax + by + c$ и, дифференцируя обе части равенства, получим $y' = \dfrac{u' - a}{b}$. Тогда уравнение (3.1) преобразуется к виду $u' = a + bf(u)$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 3.1. Решить уравнение $y' = (2x + 6y - 1)^2$.

Решение. Введем функцию $u = 2x + 6y - 1$. Дифференцируя обе части равенства, имеем $y' = \dfrac{u' - 2}{6}$, в силу чего исходное уравнение примет вид $u' = 2 + 6u^2$. После разделения переменных получим уравнение $\dfrac{du}{6u^2 + 2} = dx$, общий интеграл которого есть

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \sqrt{3}u = x + c.$$

Возвращаясь к функции $y = y(x)$, имеем

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \sqrt{3}(2x + 6y - 1) = x + c,$$

т.е. общий интеграл исходного уравнения.

§4. Однородные уравнения

Функция $F(x, y)$ называется однородной n-го измерения (порядка) относительно переменных x и y, если для любых λ выполняется тождество $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$. Например, функция $F(x, y) = 2xy + x^2$ — однородная функция второго порядка, так как

$$F(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^2 xy + \lambda^2 x^2 = \lambda^2(2xy + x^2) = \lambda^2 F(x, y).$$

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется однородным, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одного и того же измерения или дифференциальное уравнение

$$y' = F(x, y) \tag{4.1}$$

называется однородным, если $F(x, y)$ — однородная функция нулевого измерения.

Однородное уравнение (4.1) приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $y = ux$, где $u = u(x)$ — новая функция, тогда $y' = u + u'x$. Подставляя эти выражения в

(4.1), имеем $u + u'x = F(1, u)$ — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим общий интеграл

$$\int \frac{du}{F(1,u) - u} = \ln|x| + c.$$

После подстановки в последнее выражение вместо u соотношения $\frac{y}{x}$ получается общий интеграл уравнения (4.1).

Пример 4.1. Решить уравнение $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Решение. Делаем замену $y = ux$, тогда

$$u + u'x = \frac{u}{u^2+1} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}x = -\frac{u^3}{u^2+1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{u^2+1}{u^3}du = -\frac{dx}{x}, \qquad -\frac{1}{2}u^{-2} + \ln|u| = -\ln|x| + c.$$

Теперь, подставляя вместо $u = \dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$-\frac{x^2}{2y^2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c.$$

§5. Уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям

Рассмотрим уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \tag{5.1}$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — постоянные.

Если $c = c_1 = 0$, то (5.1) — однородное уравнение.

Пусть хотя бы одно из чисел c или c_1 не равно нулю. Сделаем замену переменных: $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, где x_1, y_1 — новые переменные, числа h и k подлежат определению. Подставляя в уравнение (5.1) выражения x, y, y', имеем

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}\right).$$

Подберем h и k так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases}$$

Это можно сделать, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда уравнение (5.1) становится однородным:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}\right).$$

Если определитель $\Delta = 0$, то $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$ и уравнение (5.1) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

которое подстановкой $z = a_1x + b_1y$ приводится к уравнению

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{\lambda z + c}{z + c_1}\right)$$

с разделяющимися переменными.

§6. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли

Уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{6.1}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — заданные непрерывные функции или постоянные, называется линейным ДУ первого порядка.

Решение линейного уравнения ищут в виде $y(x) = u(x)v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в уравнение (6.1), его приводят к виду

$$v\frac{du}{dx} + \left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) = Q(x). \tag{6.2}$$

В качестве функции v выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $v' + P(x)v = 0$, после чего функция u определяется из уравнения $vu' = Q(x)$.

Уравнение (6.1) можно решить и методом вариации произвольной постоянной, состоящий в следующем: сначала находят общее решение однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$; величину c, входящую в это общее решение, полагают функцией от x и; подставляя это общее решение с неизвестной функцией $c(x)$ в уравнение (6.1), находят ее.

Пример 6.1. **Проинтегрировать дифференциальное уравнение**

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3. \tag{6.3}$$

Решение. Полагая $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ и подставляя это в исходное уравнение, имеем

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = (x+1)^3. \tag{6.4}$$

Функцию v определим из уравнения

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

откуда $\ln|v| = 2\ln|x+1| + \ln|c|$. Положив $c = 1$, получаем $v = (x+1)^2$. Теперь уравнение (6.4) с учетом последнего равенства сводится к уравнению

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \quad \text{или} \quad u' = x+1,$$

из которого определяется $u = \dfrac{(x+1)^2}{2} + c$. Следовательно, общее решение уравнения примет вид

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2.$$

Приведем решение уравнения (6.3) методом вариации, для чего решим однородное уравнение

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1}.$$

После интегрирования обеих частей

$$\ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln|c|, \quad y = c(x+1)^2,$$

которое является общим решением однородного уравнения. Общее решение уравнения (6.3) ищем в виде $y = c(x)(x+1)^2$, где $c(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению. Для ее нахождения последнее выражение подставляем в уравнение (6.3). Тогда

$$c'(x+1)^2 + c \cdot 2(x+1) - \frac{2c}{x+1}(x+1)^2 = (x+1)^3,$$

$$c'(x) = x+1, \qquad c(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + c.$$

Окончательно,

$$y = c(x)(x+1)^2 = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c\right)(x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2,$$

которое является общим решением уравнения (6.3).

Уравнение $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$, где $P(x)$, $Q(x)$ — заданные непрерывные функции, $\alpha \neq 0; 1$ — действительное число, называется уравнением Бернулли.

С помощью подстановки $z = y^{1-\alpha}$ это уравнение сводится к линейному относительно неизвестной функции $z(x)$.

§7. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{7.1}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, то есть

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{7.2}$$

Общий интеграл уравнения (7.1) записывается в виде $U(x,y) = c$. Так как

$$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dx, \tag{7.3}$$

то из (7.2) и (7.3) имеем уравнения

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \tag{7.4}$$

из которых находится функция $U(x, y)$.

В предположении, что функция $U(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, необходимое и достаточное условие того, что уравнение (7.1) является уравнением в полных дифференциалах определяется равенством

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{7.5}$$

Для нахождения функции $U(x, y)$ интегрируют первое из равенств (7.4) по переменной x, а второе — по переменной y (переменная, по которой не ведется интегрирование, рассматривается как параметр):

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y), \quad U(x,y) = \int N(x,y)dy + \psi(x),$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ — произвольные функции своих аргументов. Приравнивая последние выражения, получают уравнение для определения этих функций:

$$\int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int N(x,y)dy + \psi(x).$$

Тогда общий интеграл уравнения в полных дифференциалах записывается в виде

$$\int M(x,y)dx + \varphi(y) = c \quad \text{или} \quad \int N(x,y)dy + \psi(x) = c.$$

Пример 7.1. Решить уравнение $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy = 0$.
Решение.

$$M(x,y) = x + y + 1, \quad N(x,y) = x - y^2 + 3,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1.$$

Т.е. выполняется условие (7.5). Значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Вычислив интегралы

$$\int M(x,y)\,dx = \int (x + y + 1)\,dx = \frac{x^2}{2} + yx + x + \varphi(y),$$

$$\int N(x,y)\,dy = \int (x - y^2 + 3)\,dy = xy - \frac{y^3}{3} + 3y + \psi(x),$$

и приравнивая их, имеем

$$\frac{x^2}{2} + yx + x + \varphi(y) = xy - \frac{y^3}{3} + 3y + \psi(x),$$

откуда

$$\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y, \quad \psi(x) = x + \frac{x^2}{2}.$$

Таким образом, $\frac{x^2}{2} + yx + x + 3y - \frac{y^3}{3} = c$ — общий интеграл заданного уравнения.

§8. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{8.1}$$

не разрешенное относительно производной.

Если уравнение (8.1) удается разрешить относительно y' и получить одно или несколько уравнений $y' = f_i(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots$, решая эти, уже разрешенные относительно производной, уравнения, находят решение исходного уравнения.

Пример 8.1. Решить задачу Коши $y'^2 - x^2 = 0$, $y(1) = 1$.

Решение. Из $y'^2 = x^2$ имеем два уравнения $y' = x$ и $y' = -x$. Интегрируя эти уравнения, общее решение заданного уравнения получается в виде двух семейств интегральных кривых $y = \frac{1}{2}x^2 + c_1$ и $y = -\frac{1}{2}x^2 + c_2$. Из начальных условий $y(1) = 1$ определим значения c_1 и c_2: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{3}{2}$. Таким образом, решение задачи Коши исходного уравнения представляют две параболы $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ и $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$, которые проходят через точку $(1; 1)$, но принадлежат разным семействам интегральных кривых исходного уравнения.

Если уравнение (8.1) можно разрешить относительно независимой переменной x: $x = f(y, y')$, то решение ищется в параметрической форме, вводя параметр $p = y'$ Тогда $x = f(y, p)$, где $f(y, p)$ —

известная функция двух аргументов и $dx = f'_y dy + f'_p dp$. Учитывая, что $dy = pdx$, получают $(pf'_y - 1)dy + pf'_p dp = 0$ — дифференциальное уравнение относительно переменных p и y. Решая его, находят функцию $y = \varphi(p, c)$, которая вместе с $x = f(y, p) = f(\varphi(p, c), p)$ определяет общее решение уравнения (8.1) в параметрической форме.

Пример 8.2. Решить уравнение $x = y - y' + \ln y'$.

Решение. Вводя параметр $y' = p$, имеем

$$x = y - p + \ln p, \qquad dx = dy + \left(\frac{1}{p} - 1\right) dp.$$

Так как $dy = pdx$, то

$$dy = pdy + (1 - p)dp \quad \text{или} \quad (1 - p)dy = (1 - p)dp.$$

Если $p \neq 1$, то из последнего уравнения следует уравнение $dy = dp$. Решая его, находим функцию $y = p + c$, которая вместе с

$$x = y - p + \ln p = p + c - p + \ln p = \ln p - c$$

определяет общее решение данного уравнения в параметрической форме. Из параметрической формы решения $y = p + c$, $x = \ln p - c$, исключая параметр p, получается общее решение в виде $y = e^{x+c} + c$.

Если $p = 1$, то подставляя в уравнение $x = y - p + \ln p$, получаем решение $y = x + 1$.

Таким образом, совокупность всех решений данного уравнения состоит из общего решения $y = e^{x+c} + c$ и решения $y = x + 1$.

Если уравнение (8.1) разрешимо относительно искомой функции y: $y = f(x, y')$, также вводят параметр $p = y'$. Тогда $y = f(x, p)$, $dy = f'_x dx + f'_p dp$. Учитывая, что $dy = pdx$, получают $(f'_x - p)dx + f'_p dp = 0$ — дифференциальное уравнение относительно переменных p и x. Если решение этого уравнения будет найдено в виде $p = p(x, c)$, то, подставляя его в равенство $y = f(x, p)$, получают $y = f(x, p(x, c))$ — общее решение уравнения (8.1). Если же решение уравнения будет найдено в виде функции $x = \varphi(p, c)$, то она вместе с $y = f(x, p) = f(\varphi(p, c), p)$ определяет общее решение уравнения (8.1) в параметрической форме.

Пример 8.3. Решить уравнение $y = 2xy' + e^{y'}$.

Решение. Вводя параметр $y' = p$, имеем

$$y = 2xp + e^p, \qquad dy = 2pdx + (2x + e^p)dp.$$

Так как $dy = pdx$, то получаем $\frac{dx}{dp} + 2\frac{x}{p} = -\frac{e^p}{p}$ — линейное уравнение относительно x. Решая его, находим функцию

$$x = \frac{1}{p^2}(e^p - pe^p + c),$$

которая вместе с функцией

$$y = 2xp + e^p = \frac{2}{p}(e^p + c) - e^p$$

определяет общее решение исходного уравнения в параметрической форме.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными:

1) $xydx + (x+1)dy = 0$;
2) $(y^2 - xy^2)dx + (x^2 + yx^2)dy = 0$;
3) $\sin x \cos y \, dx - \cos x \sin y \, dy = 0$;
4) $(x+1)y' + xy = 0$;
5) $xy' = 2y$;
6) $y' = \cos(x+y)$;
7) $y' = \sqrt[3]{(4x - y + 1)^2}$.

2. Решить однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям:

1) $(2x - y)dy - (x + 2y)dx = 0$;
2) $(x + 2y)dx - xdy = 0$;
3) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;
4) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;
5) $y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$;
6) $(y+2)dx - (2x + y - 4)dy = 0$;
7) $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$.

3. Решить линейные уравнения и уравнения Бернулли:

1) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$;
2) $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - x^3 = 0$;

3) $\dfrac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1$;

4) $xdy + (x^2 + xy - y)dx = 0$;

5) $(1 + y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy$;

6) $y' + xy = x^3y^3$;

7) $(y\ln x - 2)y\,dx = x\,dy$.

4. Проверить, что данные дифференциальные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах и найти общие интегралы этих уравнений:

1) $\left(xe^x + \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \dfrac{dy}{x} = 0$;

2) $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$;

3) $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$;

4) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$;

5) $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$.

5. Решить уравнения, не разрешенные относительно производной:

1) $y = y'^2 + 4y'^3$;

2) $x = y'^3 - y' + 2$;

3) $x = 2y' - \ln y'$;

4) $y = e^{y'}(y' - 1)$;

5) $y = y'\ln y'$.

6. Решить задачи Коши:

1) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x$, $y(1) = e$;

2) $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$;

3) $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$;

4) $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$;

5) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

Глава 2.
Дифференциальные уравнения высших порядков

§1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные до n-го порядка включительно:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Функция $y = y(x)$, непрерывно дифференцируемая n раз, называется решением дифференциального уравнения (1.1), если при подстановке в это уравнение самой функции и ее производных получается тождество. График решения называется интегральной кривой.

Задача Коши. Найти решение $y = y(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ y'' = y_0'',\ ...,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{1.2}$$

где $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, называемые начальными данными решения.

Теорема 1.1 [о существовании и единственности решения]. Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ и ее частные производные по y, y', ..., $y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой закмнутой области $\bar{G}$ $(n+1)$-мерного пространства, определяемые неравенствами: $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, $|y' - y_0'| \leqslant b$, ..., $|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leqslant b$, $a > 0$, $b > 0$, то для любой внутренней точки области $\bar{G}$: $M_0(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in \bar{G}$

существует единственное решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (1.1) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных и удовлетворяющая условиям:

а) она обращает уравнение (1.1) в тождество при любых значениях произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n;

б) для любых начальных условий (1.2) постоянные можно подобрать так: $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, ..., $C_n = C_n^0$, что решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

Общее решение $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, заданное в неявном виде, называется общим интегралом дифференциального уравнения n-го порядка. Геометрически общее решение и общий интеграл дифференциального уравнения n-го порядка представляют собой семейство интегральных кривых, зависящее от n параметров.

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$, полученное из общего решения фиксированием произвольных постоянных: $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, ..., $C_n = C_n^0$.

§2. Линейные дифференциальные уравнения. Общая теория

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{2.1}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ предполагаются заданными непрерывными функциями, называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{2.2}$$

называется однородным (ЛОДУ). Если $f(x) \not\equiv 0$, то линейное уравнение (2.1) называется неоднородным (ЛНДУ).

Если функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ — решение ЛОДУ, то любая их линейная комбинация

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$$

является решением ЛОДУ.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a, b), если существуют постоянные числа C_1, C_2, ..., C_n, не все равные нулю, что на (a, b) справедливо тождество

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0. \qquad (2.3)$$

Если тождество (2.3) справедливо только при нулевых постоянных $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются линейно независимыми.

Пример 2.1. Функции $y_1(x) = \sin^2 x$, $y_2(x) = \cos^2 x$, $y_3(x) \equiv 1$ линейно зависимы на всей числовой оси $\mathbb{R}$, так как существуют числа $C_1 = 1 \neq 0$, $C_2 = 1 \neq 0$, $C_3 = -1 \neq 0$, что $1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x - 1 \cdot 1 \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Функции $y_1(x) \equiv 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$ линейно независимы на $\mathbb{R}$, так как линейная комбинация $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 \equiv 0$ только при нулевых коэффициентах $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Решения y_1, y_2, ..., y_n ЛОДУ линейно зависимы на (a, b), если определитель Вронского (вронскиан)

$$W(x) = W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

равен нулю для некоторой точки $x_0 \in (a, b)$: $W(x_0) = 0$. Откуда следует, что $W(x) \equiv 0$ на (a, b). Указанные n решений линейно независимы на (a, b), если $W(x_0) \neq 0$, откуда следует, что $W(x) \neq 0$ на (a, b).

Любые n линейно независимых решений ЛОДУ (2.2) называются фундаментальной системой решений, которая для любого ЛОДУ n-го порядка существует. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — фундаментальная система решений, то $y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ есть общее решение ЛОДУ.

Общее решение $y(x)$ ЛНДУ (2.1) равно сумме общего решения $y_0(x)$ ЛОДУ (2.2) и частного решения $\bar{y}(x)$ ЛНДУ (2.1), т.е. $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$. Для нахождения $\bar{y}$ можно применить метод вариации произвольных постоянных, который состоит в следующем:

а) находят фундаментальную систему решений y_1, y_2, ..., y_n для ЛОДУ;

б) решение $\bar{y}$ ищут в виде $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, где коэффициенты полагают неизвестными функциями от x: $C_i = C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$;

в) производные этих функций определяют из системы

$$\begin{array}{l} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x), \end{array}$$

которая всегда имеет решение $C_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$. Вычисляя от полученных функций интегралы, находят $C_i(x)$.

§3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{3.1}$$

где p, q — числа, $f(x)$ — заданная непрерывная функция, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.2}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения ЛОДУ (3.2) составляют характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{3.3}$$

и в зависимости от его корней k_1 и k_2 получают общее решение $y_0(x)$:

1) если k_1 и k_2 — действительные и различные, то

$$y_0(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) если корни действительны и одинаковы: $k_1 = k_2$, то

$$y_0(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x};$$

3) если $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ являются парой комплексно сопряженных корней, то

$$y_0(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Пример 3.1. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Корнями характеристического уравнения

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

являются $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, тогда $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ — общее решение.

Пример 3.2. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Корнями характеристического уравнения

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

являются числа $k_1 = k_2 = 2$, тогда $y_0(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

Пример 3.3. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Корнями характеристического уравнения

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

являются числа $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$, тогда

$$y_0(x) = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

— общее решение.

Общее решение ЛНДУ (3.1) находится в виде

$$y = y_0 + \bar{y}, \tag{3.4}$$

где y_0 — общее решение ЛОДУ (3.2), $\bar{y}$ — частное решение ЛНДУ (3.1).

Для нахождения $\bar{y}$ применяют метод вариации произвольных постоянных или в простейших случаях, когда правая часть $f(x)$ имеет специальные виды, применяется метод неопределенных коэффициентов.

1. Если $f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$, где a — число, $P_n(x)$ — многочлен степени n и a — не корень характеристического уравнения **(3.3)**, то полагают

$$\bar{y} = e^{ax} \cdot Q_n(x), \tag{3.5}$$

где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, для нахождения которых (3.5) подставляют в уравнение (3.1) и, приравнивая выражение при одинаковых степенях x в левой и в правой частях полученного тождества, получают систему уравнений для нахождения этих коэффициентов.

В случае, если a — корень характеристического уравнения кратности r, где $r = 1$ или 2, то полагают $\bar{y} = x^r e^{ax} Q_n(x)$. Для нахождения неопределенного многочлена $Q_n(x)$ поступают аналогично предыдущему случаю.

2. Если $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, где α, β — постоянные числа, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно и $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то полагают

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(T_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x), \tag{3.6}$$

где $T_N(x)$, $S_N(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами степени $N = \max\{n, m\}$. Для нахождения этих коэффициентов (3.6) подставляют в уравнение (3.1) и, приравнивая выражения при одинаковых степенях x отдельно при синусах и отдельно при косинусах в левой и правой частях полученного тождества, получают систему уравнений.

В случае, если $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности r (в случае уравнения второго порядка $r = 1$), то полагают

$$\bar{y} = x^r e^{\alpha x}(T_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x),$$

где неопределенные многочлены $T_N(x)$ и $S_N(x)$ имеют такой же смысл, что и в выражении (3.6) и для их нахождения поступают аналогично.

Пример 3.4. Решить уравнение $y'' + 4y' + 20y = 34e^{-x}$.

Решение. Сначала найдем общее решение однородного уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 20 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + 4i$, $k_2 = -2 - 4i$. Тогда $y_0 = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2 \sin 4x)$ — общее решение ЛОДУ. Найдем частное решение $\bar{y}$ ЛНДУ. $f(x) = 34e^{-x}$, $a = -1$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда $\bar{y} = Ae^{-x}$, $\bar{y}' = -Ae^{-x}$, $\bar{y}'' = Ae^{-x}$ и, подставляя их в исходное уравнение, получим $17Ae^{-x} = 34e^{-x}$, откуда $A = 2$. Таким образом, $\bar{y} = 2e^{-x}$ и общее решение исходного уравнения равно

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 2e^{-x}.$$

Пример 3.5. Решить уравнение $y'' - y = xe^x$.

Решение. Однородное уравнение $y'' - y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Тогда $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$. $f(x) = xe^x$, где $a = 1$ и является корнем характеристического уравнения кратности $r = 1$, значит, частное решение ищем в виде $\bar{y} = x(Ax + B)e^x$. Тогда, вычисляя $\bar{y}'' = (x(Ax+B)e^x)''$ и подставляя выражения для $\bar{y}$ и $\bar{y}''$ в исходное уравнение, получим тождество $4Ax + 2B + 2A = x$. Откуда имеем систему $4A = 1$, $2B + 2A = 0$. Решая ее, получим $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Таким образом,

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{x}{4}(x-1)e^x$$

есть общее решение исходного уравнения.

Пример 3.6. Найти частное решение неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 2y = -85\cos 3x$.

Решение. Корнями характеристического уравнения

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

являются числа $k_1 = 1 - i$, $k_2 = 1 + i$. $f(x) = -85\cos 3x$, $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ не корень характеристического уравнения. Тогда

$$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x, \quad \bar{y}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$\bar{y}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Подставив их в исходное уравнение, получим тождество

$$-(7A + 6B)\cos 3x + (6A - 7B)\sin 3x = -85\cos 3x,$$

откуда имеем систему $-7A - 6B = -85$, $6A - 7B = 0$. Решив ее, найдем $A = 7$, $B = 6$. Таким образом, $\bar{y} = 7\cos 3x + 6\sin 3x$ — искомое частное решение.

§4. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (4.1)$$

где a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n — числа, $f(x)$ — заданная непрерывная функция, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (4.2)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения ЛОДУ (4.2):

1) составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0;$$

2) находят корни этого характеристического уравнения k_1, k_2, ..., k_n;

3) по характеру корней выписываются линейно независимые решения, принимая во внимание, что:

а) если число k_1 — действительный корень кратности r_1, то ему соответствует r_1 линейно независимых решений вида $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = x e^{k_1 x}$, ..., $y_{r_1} = x^{r_1} e^{k_1 x}$;

б) если $\alpha \pm i\beta$ — пара комплексно сопряженных корней кратности S, то ей соответствует $2S$ линейно независимых решений вида $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3 = x e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4 = x e^{\alpha x}\sin\beta x$, ..., $y_{2S-1} = x^{S-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2S} = x^{S-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$. Число всех найденных линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ должно быть равно порядку n ЛОДУ;

4) находят общее решение ЛОДУ (4.2) по формуле

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Пример 4.1. Решить уравнение $y^{(4)} - 16y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^4 - 16 = 0$. Находим корни: $k_1 = 2$, $k_2 = -2$, $k_{3,4} = \pm 2i$. Все они кратности 1, тогда линейно независимые решения $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = \cos 2x$, $y_4 = \sin 2x$ и общее решение

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

Общее решение ЛНДУ (4.1) находится в виде $y = y_0 + \bar{y}$, где y_0 — общее решение ЛОДУ (4.2), $\bar{y}$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения. Для нахождения $\bar{y}$ применяют метод вариации произвольных постоянных или в случаях, когда правая часть $f(x)$ имеет специальные виды, применяют метод неопределенных коэффициентов. Действия в этом случае аналогичны случаю ЛНДУ второго порядка.

Пример 4.2. Решить уравнение $y^{(4)} - y = 5\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение, соответствующее однородному, имеет вид $k^4 - 1 = 0$. Корнями являются числа $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_{3,4} = \pm i$. Тогда общее решение однородного уравнения

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Далее, так как правая часть $f(x) = 5\cos x = 5\cos x + 0 \cdot \sin x$, то числа $\alpha \pm i\beta = \pm i$ являются для характеристического уравнения корнем кратности один. Величина $N = \max\{0;0\} = 0$ и $\bar{y} = x(A\cos x + B\sin x)$. Подставляя это в исходное уравнение, получим тождество $4A\sin x - 4B\cos x \equiv 5\cos x$, откуда получаем $A = 0$, $B = -\dfrac{5}{4}$. Таким образом, $\bar{y} = -\dfrac{5}{4}x\cos x$, а общим решением исходного уравнения будет

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4}x\cos x.$$

§5. Простейшие виды дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка

Рассмотрим 3 вида дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка: $y^{(n)} = f(x)$, $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$. В целях большей наглядности, последние два вида рассмотрим для дифференциальных уравнений второго порядка: $F(x, y', y'') = 0$, $F(y, y', y'') = 0$.

Общее решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x) \tag{5.1}$$

находится последовательным n кратным интегрированием.

Пример 5.1. Решить уравнение $y''' = 6x$.

Решение. Последовательно интегрируя 3 раза, имеем $y'' = 3x^2 + C_1$, $y' = x^3 + C_1 x + C_2$, $y(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$ — общее решение.

Для уравнения

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{5.2}$$

вводят обозначение $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$. Подставляя эти выражения в (5.2), получают уравнение $F(x, p, p') = 0$ первого порядка относительно новой неизвестной функции $p(x)$. Интегрируя, находят его общий интеграл $\varphi(x, p, C_1) = 0$ или $\varphi(x, y', C_1) = 0$. Наконец, интегрируя последнее полученное уравнение, находят общий интеграл $\psi(x, y, C_1, C_2) = 0$ исходного уравнения.

Пример 5.2. Решить уравнение $xy'' = y'$.

Решение. Обозначим $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$ и уравнение примет вид $xp' = p$. Разделяя переменные, имеем $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$, далее $\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1|$, $p = C_1 x$, $\dfrac{dy}{dx} = C_1 x$, $dy = C_1 x dx$, $y = C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2$ — общее решение исходного уравнения.

В случае уравнения

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{5.3}$$

независимой переменной полагают переменную y и вводят обозначение $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = p(y)$. Тогда

$$y''_{xx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot p.$$

Подставляя выражения для y'_x и y''_{xx} в уравнение (5.3), получим дифференциальное уравнение $F(y, p, p' \cdot p) = 0$ первого порядка относительно неизвестной функции $p(y)$. Интегрируя, находят его общий интеграл $\varphi_1(y, p, C_1)$ или $\varphi_1\left(y, \dfrac{dy}{dx}, C_1\right) = 0$. Наконец, интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находят общий интеграл $\psi_1(x, y, C_1, C_2) = 0$ исходного уравнения.

Пример 5.3. Решить уравнение $yy'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Обозначим $y'_x = p(y)$, тогда $y''_{xx} = p'_y p$ и уравнение примет вид $yp'p - p^2 = 0$. Откуда $p(p'y - p) = 0$. Последнее уравнение распадается на два: $p = 0$ и $p'y - p = 0$. Из первого уравнения получаем $p = 0$, $y' = 0$, $y = C_1$. Второе уравнение $p'y - p = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dy}{y}$, далее

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_2|, \quad p = C_2 y \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = C_2 y,$$

$$\frac{dy}{y} = C_2 dx, \quad \ln|y| = C_2 x + C_3, \quad y = e^{C_2 x + C_3}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения задается совокупностью равенств $y = C_1$ и $y = e^{C_2 x + C_3}$.

§6. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Система уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $y_i = y_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) — искомые функции независимой переменной x, $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — заданные функции, называется нормальной системой дифференциальных уравнений. Порядком нормальной системы называется число входящих в нее уравнений.

Любая совокупность из n функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$, определенных и непрерывно дифференцируемых на некотором интервале (a, b), называется решением системы (6.1) на (a, b), если она каждое из уравнений этой системы обращает в тождество: $y_i'(x) \equiv f_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) для всех $x \in (a, b)$.

Задача Коши для системы (6.1). Найти решение

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \tag{6.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0, \tag{6.3}$$

где x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0 — заданные числа.

Теорема 6.1 [о существовании и единственности решения задачи Коши (6.2), (6.3)]. Если функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и их частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) определены и непрерывны в некоторой замкнутой области $\bar{G}$ пространства $n + 1$ переменных x, y_1, y_2, ..., y_n, то для любой внутренней точки $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in \bar{G}$ существует единственное решение $y_i = y_i(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x_0) = y_i^0$.

Совокупность n функций

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n),\\
&y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

называется общим решением системы (6.1), если:

1) система (6.4) разрешима относительно произвольных постоянных:

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_1,\\
&\psi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\psi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_n;
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

2) совокупность (6.4) является решением системы (6.1) при всех значениях постоянных.

Решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется частным.

Каждое из равенств $\psi_k(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_k$ ($k = 1, 2, ..., n$) называется первым интегралом системы (6.1), а каждая из функций $\psi_k = \psi_k(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ — интегралом этой системы. Совокупность первых интегралов называется общим интегралом системы.

Систему (6.1) можно проинтегрировать путем сведения ее к одному уравнению n-го порядка относительно одной из функций $y_k(x)$. Для этого дифференцируют по x первое из уравнений системы (6.1):

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя производные y_1', y_2', ..., y_n' их выражениями f_1, f_2, ..., f_n из уравнений системы (6.1), имеют уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, получают

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Продолжая далее, таким же образом получают уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Таким образом, получают систему

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Из первых $n-1$ уравнений определяют y_2, y_3, ..., y_n, выразив их через x, y_1, y_1', y_1'', ..., $y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned}
&y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}),\\
&y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы (6.6), получают уравнение n-го порядка для определения y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}).$$

Решая его, находят $y_1 = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ и, подставляя в систему (6.7), определяют $y_2 = y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, ..., $y_n = y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$.

Пример 6.1. Решить систему уравнений

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x, \qquad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x.$$

Решение. Дифференцируя по x первое уравнение, имеем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dz} + 1.$$

Подставляя сюда выражения y'_x, z'_x из уравнений исходной системы, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1.$$

Из первого уравнения исходной системы находим $z = \frac{dy}{dx} - y - x$ и, подставляя его в предыдущее уравнение, будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1.$$

Общее решение последнего уравнения есть

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - y,$$

тогда из выражения $z = y' - y - x$ следует, что

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14.$$

§7. Линейные системы дифференциальных уравнений

Система

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ — заданные непрерывные на интервале (a, b) функции (или постоянные числа), называется линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Если в системе (7.1) все функции $f_i(x) \equiv 0$, то система

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + ... + a_{1n}(x)y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + ... + a_{nn}(x)y_n \end{aligned} \tag{7.2}$$

называется линейной однородной системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Введем в рассмотрение матрицу коэффициентов системы и вектор-функции:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Системы (7.1) и (7.2) в векторно-матричном виде запишутся

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \tag{7.3}$$

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y. \tag{7.4}$$

Рассмотрим совокупность из n вектор-функций:

$$\begin{array}{l} y^1(x) = (y_{11}(x), y_{21}(x), ..., y_{n1}(x))^T, \\ y^2(x) = (y_{12}(x), y_{22}(x), ..., y_{n2}(x))^T, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^n(x) = (y_{1n}(x), y_{2n}(x), ..., y_{nn}(x))^T. \end{array} \tag{7.5}$$

Вектор функции $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$ называются линейно зависимыми на (a, b), если существуют постоянные числа c_1, c_2, ..., c_n, не все равные нулю, что на (a, b) выполняется тождественное равенство

$$c_1 y^1(x) + c_2 y^2(x) + ... + c_n y^n(x) \equiv 0. \tag{7.6}$$

В противном случае, т.е., если тождество (7.6) может выполняться только при нулевых постоянных $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, то вектор-функции (7.5) называются линейно независимыми на (a, b).

Из координат вектор-функций (7.5), располагая их по соответствующим столбцам, составим определитель

$$W(x) = |y_{ij}(x)| = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots\dots & & & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \det(y^1(x), y^2(x), ..., y^n(x)),$$

который называется определителем Вронского (вронскианом) системы вектор-функций (7.5).

Однородные системы. Вектор функция

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$$

называется решением однородной системы (7.4), если она при подстановке в эту систему обращает ее в тождество. Набор $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$ из n линейно независимых решений однородной системы называется фундаментальной системой решений.

1. Если вектор-функции $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^m(x)$ — решение однородной системы, то любая их линейная комбинация $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i y^i(x)$ тоже решение (c_i — произвольные постоянные).

2. Если $m > n$, то решение $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^m(x)$ всегда линейно зависимы.

3. Для любой однородной системы существует фундаментальная система решений $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$ и $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y^i(x)$ есть общее решение системы.

4. Для того, чтобы решения $y^1(x)$, $y^2(x)$, ..., $y^n(x)$ однородной системы были линейно независимы на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы вронскиан этих решений $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

5. Матрица определителя Вронского $W(x)$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots\dots & & & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

называется фундаментальной матрицей системы, которая удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x).$$

$y(x) = Y(x) \cdot c$ есть общее решение однородной системы в матричном виде, где $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ — произвольный вектор из постоянных чисел, $y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y^0$ — решение задачи Коши для однородной системы.

6. Если однородная система (7.2) с постоянными коэффициентами ($a_{ij} = \mathrm{const}$), то общее решение (фундаментальную систему

решений) находят следующим образом. Сначала определяют корни характеристического уравнения

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если λ_1 — простой действительный корень характеристического уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, то, подставив решение $y^1(x) = e^{\lambda_1 x}(A_1, A_2, ..., A_n)^T$ ($A_i = \mathrm{const}$) в однородную систему, определяют A_i, которые будут зависеть от одной произвольной постоянной. Тогда и частное решение $y^1(x)$ будет зависеть от одной произвольной постоянной.

Если λ_1 есть r-кратный действительный корень уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, то, подставив $y^1(x) = e^{\lambda_1 x}(A_1(x), A_2(x), ..., A_n(x))^T$ ($A_i(x)$ — многочлен степени $r-1$ с неопределенными коэффициентами) в однородную систему, находят коэффициенты всех многочленов. Они выражаются через r произвольных постоянных. Следовательно, и частное решение $y^1(x)$ будет зависеть от r произвольных постоянных.

Если λ_1 — простой комплексный корень уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, то корнем является и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}_1$. Частное решение $y^1(x)$ строится только для одного из этих корней аналогично действительному случаю (только теперь A_i — комплексные постоянные). Тогда $\mathrm{Re}(y^1(x))$ и $\mathrm{Im}(y^1(x))$ являются действительными частными решениями, соответствующими паре λ_1 и $\bar{\lambda}_1$ комплексно сопряженных корней.

Если λ_1 является r-кратным комплексным корнем уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, то поступаем как в случае действительного r-кратного корня. Многочлены $A_i(x)$ степени $r-1$ будут зависеть от r комплексных постоянных. В качестве действительных частных решений, соответствующих паре λ_1 и $\bar{\lambda}_1$, берут $\mathrm{Re}(y^1(x))$ и $\mathrm{Im}(y^1(x))$.

Общим решением однородной системы будет сумма всех найденных частных решений.

Пример 7.1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

имеет корень $\lambda = -1$ кратности 2. Решение ищем в виде

$$y_1(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}, \quad y_2(x) = (a_1 + a_2 x)e^{-x}.$$

Подставляя их в исходную систему и приравнивая коэффициенты при функциях e^{-x} и xe^{-x}, имеем $c_2 - c_1 = a_1$, $-c_2 = a_2$. Выразим a_1 и a_2 через c_1 и c_2: $a_1 = c_2 - c_1$, $a_2 = -c_2$. Тогда получаем общее решение однородной системы

$$y_1(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad y_2(x) = (c_2 - c_1)e^{-x} - c_2 x e^{-x}$$

или в векторном виде

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} xe^{-x} \\ e^{-x} - xe^{-x} \end{pmatrix} = c_1 y^1(x) + c_2 y^2(x),$$

где $y^1(x)$, $y^2(x)$ — фундаментальная система решений.

Пример 7.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ \dot{y}_2 = y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ \dot{y}_3 = 3y_1 - 3y_2 + 5y_3. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-3) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$. Частное решение для корня $\lambda_1 = 3$ ищем в виде

$$y_1(x) = c_1 e^{3x}, \quad y_2(x) = a_1 e^{3x}, \quad y_3(x) = b_1 e^{3x}.$$

Подставляя их в систему и приравнивая коэффициенты при e^{3x}, имеем: $a_1 = -c_1$, $b_1 = -3c_1$. Тогда

$$y^1(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T = e^{3x}(c_1, -c_1, -3c_1)^T$$

есть частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 3$. Частное решение для корня $\lambda_2 = -1$ кратности 2 ищем в виде

$$y_1(x) = (c_2+c_3x)e^{-x}, \quad y_2(x) = (a_2+a_3x)e^{-x}, \quad y_3(x) = (b_2+b_3x)e^{-x}.$$

Подставляя их в систему и приравнивая коэффициенты при e^{-x} и xe^{-x}, имеем: $a_2 = 2c_3$, $b_2 = c_3 - \frac{1}{2}c_2$, $a_3 = b_3 = 0$. Тогда

$$y^2(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T = e^{-x}\left(c_2, 2c_3, c_3 - \frac{1}{2}c_2\right)^T$$

есть частное решение, соответствующее корню $\lambda_2 = -1$ кратности 2. Общее решение системы

$$y(x) = y^1(x)+y^2(x) = e^{3x}(c_1, -c_1, -3c_1)^T+e^{-x}\left(c_2, 2c_3, c_3 - \frac{1}{2}c_2\right)^T =$$

$$= c_1e^{3x}(1,-1,-3)^T + c - 2e^{-x}\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)^T + c_3e^{-x}(0,0,1)^T$$

или в координатном виде

$$y_1(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}, \quad y_2(x) = -c_1e^{3x} + 2c_2e^{-x},$$

$$y_3(x) = -3c_1e^{3x} + \left(c_3 - \frac{1}{2}c_2\right)e^{-x},$$

где

$$\bar{y}^1(x) = e^{3x}(1,-1,-3)^T, \quad \bar{y}^2(x) = e^{-x}\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)^T,$$

$$\bar{y}^3(x) = e^{-x}(0,0,1)^T$$

— фундаментальная система решений.

Неоднородные системы. Общее решение неоднородной системы (7.1) равно сумме частного решения $\bar{y}$ неоднородной системы и общего решения однородной системы (7.2). Применяя метод вариации произвольных постоянных, можно найти $\bar{y}$. Тогда общее решение неоднородной системы примет вид

$$y(x) = Y(x)c + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

а решение задачи Коши для системы (7.1) — вид

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y^0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где $Y(x)$ — фундаментальная матрица решений для однородной системы (7.2), $y(x_0) = y^0$ — начальное условие для неоднородной системы (7.1).

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' - 2y = 0$;
2) $y'' + 6y' + 13y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
4) $y^{(5)} - 4y''' = 0$;
5) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$;
6) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$;
7) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

2. Методом вариации произвольных постоянных решить уравнения:

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;
2) $y'' + y' = \dfrac{e^x}{2 + e^x}$;
3) $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$;
4) $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$;
5) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

3. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 7y' + 12y = x$;
2) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;
3) $y'' - 3y' = 2 - 6x$;
4) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$;
5) $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$;
6) $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$;
7) $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5 + 16\sin 3x - \cos 3x$.

4. Решить дифференциальные уравнения, используя метод понижения порядка:

1) $y''' \cdot \operatorname{tg} x = y'' + 1$;

2) $3yy'' + (y')^2 = 0$;

3) $2xy''' = y''$;

4) $y''(1 + y) - 5(y')^2 = 0$;

5) $xy''' = 2x + 3$;

6) $xy'' = y' + x \sin \dfrac{y'}{x}$;

7) $y^{(5)} = \cos 2x$.

5. Для уравнения $y'' - y = xe^x + e^{2x}$ найти решения задачи Коши при начальных условиях:

1) $y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y'(0) = \dfrac{5}{12}$;

2) $y(0) = \dfrac{1}{4}$, $y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

6. Найти общие решения систем дифференциальных уравнений:

1) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2 + 16xe^x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 - 2y_2; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_2 - y_1 - 5e^x; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 - 3y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 - y_2 - 2\cos x; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + \sin 2x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

Глава 3. Двойной интеграл

§1. Определение двойного интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Разобъем область D с помощью сети кривых на части S_1, S_2, ..., S_n. Взяв в каждой части S_i ($i = 1$, 2, ..., n) произвольно точку $P_i(x_i, y_i)$, вычислим в этой точке значение функции $f(P_i)$. Составим сумму произведений $f(P_i)$ на площадь $S_i = \Delta S_i$, т.е.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

которая называется интегральной суммой от функции $f(x, y)$ по области D.

Конечный предел интегральной суммы σ_n (если он существует) при стремлении диаметров всех частей S_i к нулю называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается символом

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D f(P)\, dS.$$

Итак,

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\substack{\operatorname{diam} S_i \to 0 \\ (n \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, тогда $\iint\limits_D f(P)\, dS$ существует.

§2. Свойства двойного интеграла

Двойной интеграл имеет свойства, подобные свойствам определенного интеграла.

1°.

$$\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$

2°.

$$\iint\limits_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

3°. Если $D = D_1 + D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

§3. Вычисление двойного интеграла

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов следующим способом.

Пусть область D (рис. 1) ограничена кривыми $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем всюду на $[a, b]$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и $\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x_2)$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \qquad (3.1)$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x — параметр), а полученный результат интегрируется по x.

Заметим, при этом, что если кривая $\varphi_1(x)$ (или кривая $\varphi_2(x)$) в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ задается разными аналитическими выражениями, например,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x) \text{ при } a \leqslant x \leqslant c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) \text{ при } c < x \leqslant b, \end{cases}$$

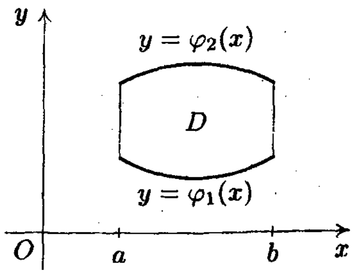

Рис. 1

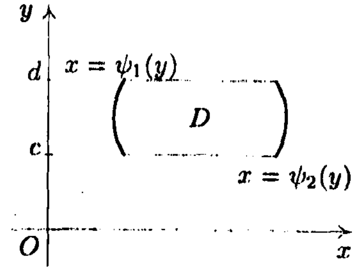

Рис. 2

то интеграл справа записывается в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично, если область D ограничена кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем всюду на $[c, d]$ функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ (рис. 2), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{3.2}$$

Двойной интеграл, представленный в виде (3.1) или (3.2), называется повторным или двухкратным интегралом.

Пример 3.1. Вычислить двухкратный интеграл

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x^2} (x^2 + y^2)\,dy \right) dx.$$

Решение. Сначала вычисляем внутренний интеграл по переменной y, считая $x = \text{const}$. Получим

$$\int\limits_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{x^2} = \int\limits_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{26}{105}.$$

Пример 3.2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{8}}\,dx dy$, если область D ограничена линиями $y = 2x$, $y = 4$, $x = 0$, $x = 2$.

Решение. Строим область D (рис. 3). Применим формулу (3.2):

$$I = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_0^{y/2} y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dx \right) dy = \int\limits_0^4 \left[y^2 \left(-\frac{8}{y} \right) e^{-\frac{xy}{8}} \Big|_0^{y/2} \right] dx =$$

$$= -8 \int\limits_0^4 y \left(e^{-\frac{y^2}{16}} - 1 \right) dy = \left(64 e^{-\frac{y^2}{16}} + 4y^2 \right) \Big|_0^4 = 64 e^{-1}.$$

Замечание. Если бы мы в примере 3.2 применили формулу (3.1), то нам пришлось бы интегрировать функцию $y^2 e^{-\frac{xy}{8}}$ по y два раза по частям.

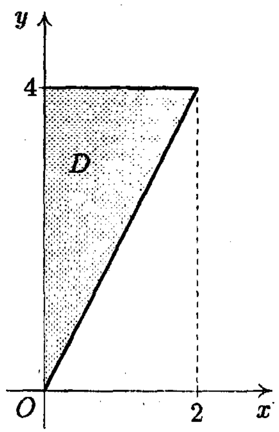

Рис. 3

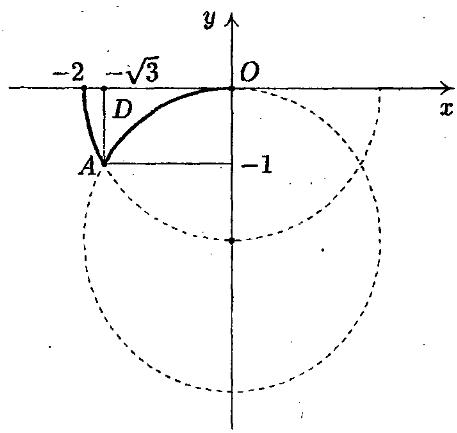

Рис. 4

Пример 3.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} \left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy \right) dx + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \left(\int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Решение. Чтобы установить, какие линии определяются уравнениями $y = -\sqrt{4-x^2}$ и $y = \sqrt{4-x^2} - 2$, возводим их в квадрат.

Получим уравнения окружностей $x^2+y^2=4$ и $x^2+(y+2)^2=4$. Строим область D (рис. 4). Имеем

$$I=\int_{-1}^{0} dy \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-(2+y)^2}} f(x,y)\,dx \right).$$

§4. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функции $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области Γ плоскости O_1uv на область D плоскости Oxy и в области Γ отличен от нуля якобиан преобразования, т.е.

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v)\in\Gamma.$$

Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Gamma} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|\,dudv. \tag{4.1}$$

В формуле (4.1) при надлежащем выборе функций $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ область Γ может оказаться значительно проще области D. Величины u и v можно рассматривать как прямоугольные координаты для точек области Γ и в то же время как криволинейные координаты точек области D.

Для вычисления интеграла по области Γ применяются методы сведения двойного интеграла к повторным.

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются полярные координаты

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi,$$

для которых

$$J(r,\varphi)=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

и формула (4.1) записывается в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Gamma f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,drd\varphi. \qquad (4.2)$$

При вычислении $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, распространенного на эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, целесообразно перейти к обобщенным полярным координатам, положив $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, для которых $J(r,\varphi) = abr$.

Пример 4.1. Перейдя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_D dxdy$, если область интегрирования D ограничена линиями $x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2$, $x \geqslant 0$.

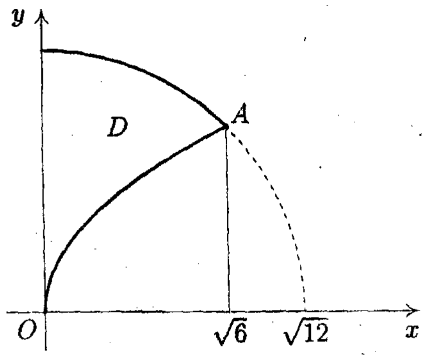

Рис. 5

Решение. Строим область интегрирования D (рис. 5). Положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Уравнение окружности $x^2+y^2=12$ преобразуется к виду $r = 12$, $x\sqrt{6}=y^2$ к $\rho = \dfrac{\sqrt{6}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, причем $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно,

$$\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_\Gamma r\,drd\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{\sqrt{6}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\sqrt{12}} r\,dr = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(6 - \frac{3\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\pi - 3(\operatorname{ctg}^2\varphi + 2\operatorname{ctg}\varphi)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi + 9.$$

§5. Применения двойного интеграла

1. Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D, выражается интегралом

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

(Функция $f(x, y) \geqslant 0$ однозначна в области D.)

2. Площадь S плоской области D выражается следующими интегралами:

$$S = \iint_D dxdy$$

в декартовых прямоугольных координатах,

$$S = \iint_D r\, drd\varphi$$

в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

3. Если пластинка занимает область D плоскости Oxy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, то масса M пластинки и ее статические моменты M_x и M_y относительно осей Ox и Oy выражаются двойными интегралами

$$M = \iint_D \gamma(x, y)\, dxdy,$$

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)\, dxdy, \quad M_y = \iint_D x\gamma(x, y)\, dxdy.$$

4. Координаты центра масс $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пластинки определяются сле-

дующим образом:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy}.$$

5. Моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно равны

$$J_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)\,dxdy, \quad J_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)\,dxdy.$$

6. Момент инерции пластинки относительно начала координат (полярный момент инерции) равен

$$J_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\gamma(x,y)\,dxdy = J_x + J_y.$$

7. Если гладкая поверхность имеет уравнение $z = f(x,y)$, то площадь части этой поверхности, проектирующейся в область D плоскости Oxy, равна

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^z + z_y^2}\,dxdy.$$

(Функция $z = f(x,y)$ однозначна в области D.)

Пример 5.1. Граница пластинки Q задана неравенствами

$$y \geqslant 0, \quad y \leqslant \frac{4}{3}x, \quad 1 \leqslant \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leqslant 2,$$

а поверхностная плотность равна $\mu = 27\dfrac{y}{x^5}$. Найти массу пластинки.

Решение. Строим область D, ограниченную заданными линиями (рис. 6). Имеем

$$M = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy.$$

Положим $x = 3r\cos\varphi$, $y = 4r\sin\varphi$. Областью Γ является область, удовлетворяющая условиям: $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$M = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \left(\int\limits_1^{\sqrt{2}} 12\pi \cdot 27 \frac{4r\sin\varphi}{3^5 r^5 \cos^5\varphi} d\varphi \right) = \left. \frac{1}{3\cos^4\varphi} \right|_0^{\pi/4} = 1.$$

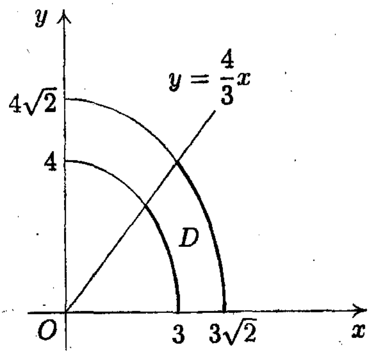

Рис. 6

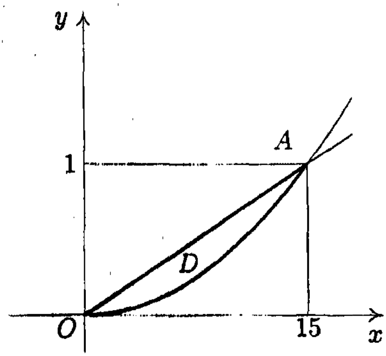

Рис. 7

Пример 5.2. Найти объем тела V, ограниченного поверхностями $x = 15\sqrt{y}$, $x = 15y$, $z = 0$, $z = 15(1 + \sqrt{y})$.

Решение.

$$V = \iint\limits_D 15(1 + \sqrt{y})\, dxdy,$$

где область интегрирования D показана на рис. 7. Имеем

$$V = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{15y}^{15\sqrt{y}} 15(1 + \sqrt{y})\, dx = 15^2 \int\limits_0^1 (1 + \sqrt{y})(\sqrt{y} - y)\, dx =$$

$$= 225 \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Bigg|_0^1 = 60.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

1. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$, где $D = \{(x,y)|\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Ответ: $(e-1)^2$.

2. $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dxdy$, где $D = \left\{(x,y)|\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Ответ: $\pi - 2$.

Найти пределы двухкратного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, если:

3. $D = \{(x,y)|\ x=0,\ y=0,\ x+y=2\}$.
4. $D = \{(x,y)|\ x+y \leqslant 1,\ x-y \leqslant 1,\ x \geqslant 0\}$.

Изменить порядок интегрирования:

5. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

6. $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy$.

Вычислить интегралы:

7. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$. Ответ: $\dfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$.

8. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$, где $D = \{(x,y)|\ x=0,\ y=\pi,\ y=x\}$.

Ответ: -2.

Данные интегралы преобразовать к интегралам в полярных координатах:

9. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

10. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy$.

Найти площадь области:

11. $D = \{(x,y)|\ y=x,\ y=5x,\ x=1\}$. Ответ: 2.
12. $D = \{(x,y)|\ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\}$. Ответ: $2a^2$.

Глава 4.
Тройной интеграл

§1. Определение тройного интеграла

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области V. Разобъем область V на конечное число ячеек V_1, V_2, ..., V_n. Взяв в каждой части V_i произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, вычислим значение функции $f(M_i) = f(x_i,y_i,z_i)$ и, умножив его на объем $V_i = \Delta V_i$, составим сумму всех таких произведений

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i. \tag{1.1}$$

σ_n называется интегральной суммой от функции $f(x,y,z)$ по области $V \in \mathbb{R}^3$.

Конечный предел σ_n (если он существует) при стремлении диаметров всех ячеек V_i к нулю называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(M)\,dV.$$

Итак,

$$\iiint\limits_V f(M)\,dV = \lim_{\substack{\max \operatorname{diam} V_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i.$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области V, то тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ существует.

§2. Свойства тройного интеграла, его вычисление

Для тройного интеграла сохраняются свйоства двойного интеграла.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов или к вычислению трех однократных интегралов.

Если область интегрирования V ограничена снизу поверхностью $z = \varphi_1(x,y)$, сверху поверхностью $z = \varphi_2(x,y)$ $(\varphi_1(x,y) \leqslant \varphi_2(x,y))$ и с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью Oxy является область D, то тройной интеграл (1.1) вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{2.1}$$

Записывая двойной интеграл по области D через один из повторных, получим

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{2.2}$$

Пример 2.1. Вычислить $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Имеем

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3}\Bigg|_0^1 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

§3. Приложения тройных интегралов

1. Объем Q пространственной области V равен

$$Q = \iiint\limits_V dxdydz.$$

2. Масса M тела с переменной плотностью $\gamma(x,y,z)$, занимающего область V:

$$M = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

3. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

4. Координаты центра масс тела:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

5. Моменты инерции относительно осей координат:

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$J_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$J_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

Если тело однородное, то $\gamma(x,y,z) = 1$.

§4. Замена переменных в тройном интеграле

Если в тройном интеграле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

производится замена переменных по формулам $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, причем функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области V пространства $Oxyz$ на область Δ пространства O_1uvw и якобиан преобразования не обращается в нуль в области Δ:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Delta f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|\,dudvdw. \tag{4.1}$$

Наиболее употребительными являются цилиндрические координаты r, φ, z (рис. 1): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, якобиан которых $J = r$, и сферические r (длина ралиус-вектора), φ (долгота), θ (широта) (рис. 2): $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, якобиан которых $J = r^2\cos\theta$. Формула (4.1) принимает соответственно вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,drd\varphi dz \tag{4.2}$$

или

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

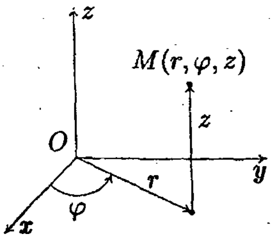

Рис. 1

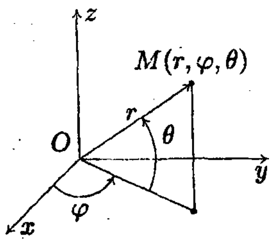

Рис. 2

$$\iiint\limits_{\Delta} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)r^2\cos\theta\, d\varphi dr d\theta. \qquad (4.3)$$

Пример 4.1. Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $z = 8[(x+1)^2 + y^2] + 3$, $z = 16x + 27$.

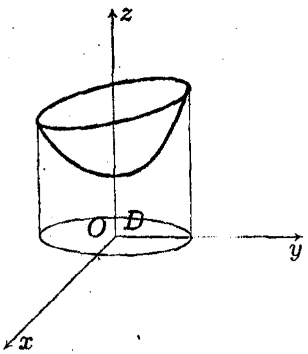

Рис. 3

Решение. Проекцией тела Q на плоскость Oxy является область D (рис. 3), ограниченная кривой

$$8[(x+1)^2 + y^2] + 3 = 16x + 27 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам. Для области Δ справедливы

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, \quad 8(r^2+2r\cos\varphi+1)+3 \leqslant z \leqslant 16r\cos\varphi+27.$$

По формуле (4.2) имеем

$$V = \iiint\limits_V r\,dr d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{8(r^2+2r\cos\varphi+1)+3}^{16r\cos\varphi+27} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\sqrt{2}} (16r - 8r^3)\,dr \right] d\varphi = 16\pi.$$

Пример 4.2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y \leqslant 0$, $y \leqslant -\sqrt{3}x$, $16 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 81$, $z \geqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам. Для области Δ пределы изменения сферических координат будут вида

$$\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{3}\pi, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{99}} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 4 \leqslant r \leqslant 9.$$

По формуле (4.3) имеем

$$V = \iiint\limits_\Delta r^2 \cos\theta\, dr d\varphi d\theta = \int\limits_\pi^{5\pi/3} d\varphi \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{99}}}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int\limits_4^9 r^2\, dr = 123.$$

Задачи для самостоятельного решения

Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(P)\,dV$ к цилиндрическим координатам:

1. $V = \{(x,y,z) |\, x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2\}$.

2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$

Перейти в $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV$ к сферическим координатам:

3. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz.$

Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

4. $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$. Ответ: $\frac{7}{12}$.

5. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$. Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

6. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$, $z \geqslant 0$. Ответ: $\frac{5}{12}\pi R^3$.

7. Найти массу тела, ограниченного прямым круговым цилиндром радиуса R, высоты H, если его плотность равна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.

Ответ: $\frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2 + 2H^2)$.

Глава 5.
Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы являются обобщением определенного интеграла на случай, когда область интегрирования — кривая или часть кривой (плоской или пространственной), а подынтегральная функция — функция 2-х или 3-х переменных, определенная в точках этой кривой.

Различают криволинейные интегралы I рода (по длине дуги) и криволинейные интегралы II рода (по координатам).

§1. Определение криволинейных интегралов I рода

Пусть $\overset{\smile}{AB}$ — гладкая плоская кривая и $f(x, y)$ — непрерывная в некоторой области, содержащей $\overset{\smile}{AB}$, функция.

Разобъем $\overset{\smile}{AB}$ произвольно выбранными точками $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, $A_n = B$ на n частей $\overset{\smile}{A_0A_1}$, $\overset{\smile}{A_1A_2}$, ..., $\overset{\smile}{A_{n-1}A_n}$ и выберем на каждой части $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$ произвольным образом точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ (рис. 1).

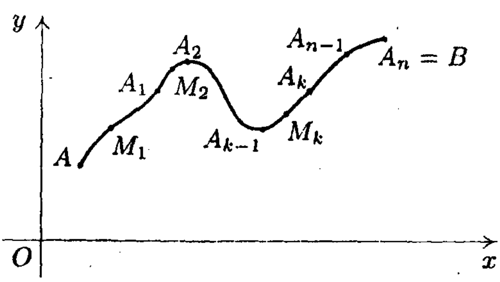

Рис. 1

Обозначим Δl_1, Δl_2, ..., Δl_k, ..., Δl_n длины частей $\breve{A_0A_1}$, $\breve{A_1A_2}$, ..., $\breve{A_{k-1}A_k}$, ..., $\breve{A_{n-1}A_n}$ соответственно и λ — наибольшую из этих длин: $\lambda = \max\limits_k\{\Delta l_k\}$. Составим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k. \qquad (1.1)$$

Сумма (1.1) называется интегральной суммой для функции $z = f(x,y) = f(M)$ по кривой $l = \breve{AB}$.

Пусть теперь число n разбиений кривой l неограниченно возрастает ($n \to \infty$), причем так, что $\lambda \to 0$. Если существует предел интегральной суммы (1.1) и он не зависит от способа разбиения кривой l и выбора точек M_k, то этот предел называется криволинейным интегралом I рода (криволинейным интегралом по длине дуги) и обозначается символом:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AB} f(M)\,dl = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k. \qquad (1.2)$$

Криволинейный интеграл от функции 3-х переменных $f(M) = f(x,y,z)$ по длине дуги пространственной кривой l определяется аналогично.

Доказано, что если $\breve{AB}$ — гладкая кривая и $f(M)$ непрерывная на $\breve{AB}$ функция, то криволинейный интеграл I рода существует, то есть при любом разбиении кривой $\breve{AB}$ и выборе точек $M_k \subset \breve{A_{k-1}A_k}$ предел интегральной суммы (1.1) равен одному и тому же числу.

§2. Физический смысл криволинейного интеграла I рода

Пусть имеется криволинейный стержень $l = \breve{AB}$, причем масса в пределах стержня распределена, вообще говоря, неравномерно. Плотность распределения массы задается функцией $f(M)$.

Разобъем стержень на участки. Предположим, что участки разбиения достаточно малы и плотность на каждом участке будет постоянной, равной $f(M_k)$. Тогда слагаемое $f(M_k)\Delta l_k$ интегральной суммы (1.1) представляет собой массу m_k соответствующего участка стержня: $f(M_k)\Delta l_k \approx m_k$. Суммируя все слагаемые, получим приближенное значение массы стержня: $m \approx \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k$, причем точность этого значения тем выше, чем меньше λ. За точное значение массы стержня естественно принять предел этой суммы при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$.

Итак, криволинейный интеграл по длине дуги равен массе криволинейного стержня, плотность материала которого задается функцией $f(M)$:

$$m = \int_{AB} f(M)\,dl. \tag{2.1}$$

§3. Геометрический смысл криволинейного интеграла I рода

Криволинейному интегралу I рода от функции 2-х переменных $f(x, y)$ по плоской кривой AB может быть дано геометрическое истолкование.

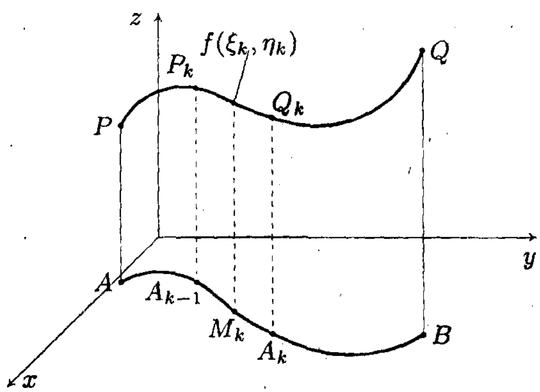

Рис. 2

Дана цилиндрическая поверхность G с направляющей — кривой $\breve{AB}$ и образующей, перпендикулярной плоскости Oxy (рис. 2). Линия PQ — линия пересечения цилиндрической поверхности G с поверхностью $z = f(x, y)$. Тогда, очевидно, каждое слагаемое интегральной суммы (1.1) представляет площадь соответствующей части данной цилиндрической поверхности: $f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k \approx S_{A_{k-1}P_kQ_kA_k}$, причем погрешность представления тем меньше, чем меньше Δl_k. Интегральная сумма (1.1) представляет площадь цилиндрической поверхности $S_n \approx S_ц$ с тем меньшей погрешностью, чем меньше λ. Естественно, за точное значение площади цилиндрической поверхности G принять предел суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$.

Таким образом, криволинейный интеграл по плоской кривой AB от функции 2-х переменных $f(x, y)$ равен площади цилиндрической поверхности $G = APQB$ (рис. 2):

$$S_{APQB} = \int_{AB} f(x, y)\, dl. \tag{3.1}$$

§4. Свойства криволинейного интеграла I рода

Свойства криволинейного интеграла по длине дуги аналогичны свойствам определенного интеграла.

1°. Линейность:

$$\int_{AB} (f_1(M) + f_2(M))\, dl = \int_{AB} f_1(M)\, dl + \int_{AB} f_2(M)\, dl; \tag{4.1}$$

$$\int_{AB} \alpha f(M)\, dl = \alpha \int_{AB} f(M)\, dl. \tag{4.2}$$

2°. Аддитивность по области: если кривая $\smile{AB}$ разбить на части $\smile{A_0A_1}$, ..., $\smile{A_{k-1}A_k}$, то

$$\int_{AB} f(M)\, dl = \int_{A_0A_1} f(M)\, dl + \int_{A_1A_2} f(M)\, dl + \ldots + \int_{A_{k-1}A_k} f(M)\, dl. \tag{4.3}$$

3°. Теорема о среднем: на кривой AB найдется точка $\bar{M}$ такая, что

$$\int_{AB} f(M)\, dl = f(\bar{M}) \cdot s, \tag{4.4}$$

здесь s — длина кривой AB.

Кроме того, криволинейный интеграл по длине дуги не зависит от выбора направления на кривой:

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_{BA} f(M)\,dl. \tag{4.5}$$

Пусть теперь кривая AB является кусочно-гладкой, то есть состоит из частей, каждая из которых является гладкой кривой (рис. 3).

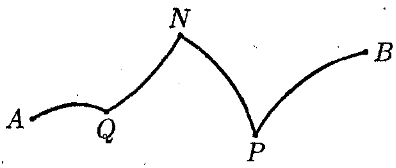

Рис. 3

На основании свойства (2)

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_{AQ} f(M)\,dl + \int\limits_{QN} f(M)\,dl + \int\limits_{NP} f(M)\,dl + \int\limits_{PB} f(M)\,dl. \tag{4.6}$$

§5. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление интеграла по длине дуги производится путем преобразования в обыкновенный определенный интеграл:

1. Кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, причем $A(x_0, y_0)$, $B(x_n, y_n)$, $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$. Тогда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{x_1}^{x_n} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx. \tag{5.1}$$

2. Кривая AB задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $x_n = x(t_n)$, $y_n = y(t_n)$,

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_n} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

3. Кривая AB задана в полярных координатах $r = r(\theta)$, $\theta_0 < \theta < \theta_n$, $dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}d\theta$. Тогда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_n} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + (r')^2}d\theta.$$

Пример 5.1. Вычислить $\int\limits_{AB} xy\,dl$, где AB — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $A(1;1)$ и $B(2;2)$.

Решение. Уравнение линии AB: $y = x$, тогда

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1 + 1^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx.$$

$$\int\limits_{AB} xy\,dl = \int\limits_1^2 x \cdot x\sqrt{2}\,dx = \int\limits_1^2 x^2\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 5.2. Вычислить $\int\limits_{AB} x^2\,dl$, где AB — дуга линии $y = \ln x$ с концами в точках $A(1;0)$, $B(2;\ln 2)$.

Решение.

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx.$$

$$\int\limits_{AB} x^2\,dl = \int\limits_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

Пример 5.3. Вычислить $\int\limits_{AB} y\,dl$, где AB — дуга параболы $y^2 = 2x$ с концами в точках $A(0;0)$, $B(4;\sqrt{8})$.

Решение. Здесь удобно уравнение дуги AB задать в виде $x = \dfrac{1}{2}y^2$, тогда

$$dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy = \sqrt{1 + y^2}\,dy; \quad y_0 = 0; \quad y_n = \sqrt{8}.$$

$$\int\limits_{AB} y\,dl = \int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1 + y'^2}\,dy = \frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} = \frac{26}{2}.$$

Пример 5.4. Вычислить $\int\limits_{AB} xy\,dl$, где AB — дуга эллипса $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$, расположенная в первой координатной четверти.

Решение. Запишем уравнение эллипса в параметрической форме $x=\sqrt{5}\cos t$, $y=3\sin t$. Точке A соответствует $t=0$, точке B — $t=\frac{\pi}{2}$, $dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{9\cos^2 t+5\sin^2 t}\,dt$.

$$\int\limits_{AB} xy\,dl=\int\limits_0^{\pi/2} 3\sqrt{5}\cos t\sin t\sqrt{9\cos^2 t+5\sin^2 t}\,dt=$$

$$=3\sqrt{5}\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{1+4\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{1+4\cos^2 t}\,d\cos^2 t=\frac{\sqrt{5}}{4}(1+4\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\pi/2}=-\sqrt{5}.$$

Пример 5.5. Вычислить $\int\limits_C \frac{\cos\theta}{r}dl$, где C — окружность радиуса a с центром в точке $(a;0)$ оси Ox; r и θ — полярные координаты точки кривой.

Решение. Уравнение линии C в полярной системе: $r=2a\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ (рис. 4).

$$\int\limits_C\frac{\cos\theta}{r}dl=\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{r}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta=\pi.$$

Пример 5.6. Вычислить $\int\limits_{AB} xyz\,dl$, где AB — часть винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Решение.

$$\int\limits_{AB} xyz\,dl=\int\limits_0^{2\pi}a^2\cos t\sin t\cdot kt\sqrt{a^2+k^2}\,dt=$$

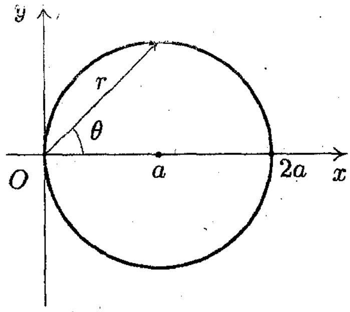

Рис. 4

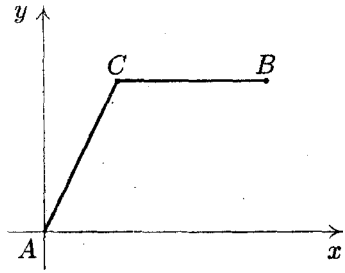

Рис. 5

$$= \frac{1}{2}a^2k\sqrt{a^2+k^2}\int\limits_0^{2\pi} t\sin 2t\,dt =$$

$$= \frac{a^2k}{2}\sqrt{a^2+k^2}\left(-\frac{t\cos 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\,dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\pi a^2k\sqrt{a^2+k^2}.$$

Пример 5.7. Вычислить $\int\limits_{AB}(x^2+y^2)\,dl$, где AB — ломанная ACB, изображенная на рис. 5, $A(0;0)$, $C(1;2)$, $B(3;2)$.

Решение.

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2)\,dl = \int\limits_{AC}(x^2+y^2)\,dl + \int\limits_{CB}(x^2+y^2)\,dl.$$

Для AC: $y=2x$, $x_0=0$, $x_n=1$. Для CB: $y=2$, $x_0=1$, $x_n=3$.

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2)\,dl = \int\limits_0^1(x^2+4x^2)\sqrt{1+2^2}\,dx + \int\limits_1^2(x^2+2^2)\sqrt{1+0^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 5\sqrt{5}x^2\,dx + \int\limits_1^2(x^2+4)\,dx = 5\sqrt{5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_1^3 = \frac{5}{3}(\sqrt{5}+10).$$

§6. Применения криволинейного интеграла I рода

1. Масса m стержня l, плоского или пространственного, имеющего линейную плотность $\rho = \rho(M)$, вычисляется согласно (2.1) по формуле

$$m = \int\limits_l \rho\, dl. \tag{6.1}$$

2. Координаты центра тяжести однородного стержня l вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_l x\, dl}{s}, \quad \bar{y} = \frac{\int\limits_l y\, dl}{s}, \quad \bar{z} = \frac{\int\limits_l z\, dl}{s}, \tag{6.2}$$

где $s = \int\limits_l dl$ — длина стержня. (Для плоского стержня используются только две первые формулы (6.2).)

3. Площадь S цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz, направляющей AB и ограниченной линией AB и линией пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с цилиндрической поверхностью, согласно (5.1) вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl.$$

Пример 6.1. Найти координаты центра тяжести одной ветки винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение.

$$x_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt}{\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a62+b^2}\,dt} = \frac{a\cdot 0}{2\pi} = 0;$$

$y_c = 0$ аналогично;

$$z_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\cdot 4\pi^2}{2\pi\cdot 2} = \pi b.$$

Итак, $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \pi b$.

§7. Определение криволинейного интеграла II рода

Пусть дана гладкая или кусочно гладкая кривая $\overset{\smile}{AB}$ (рис. 6) и вектор-функция $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, проекции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ которой непрерывны в некоторой области, содержащей кривую $\overset{\smile}{AB}$.

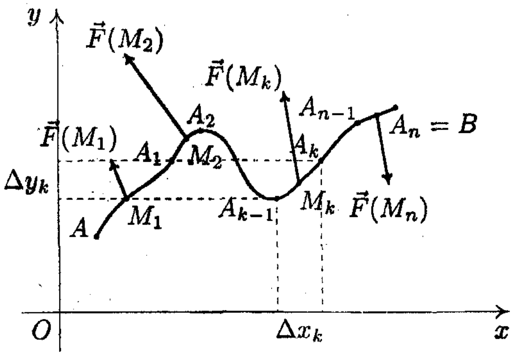

Рис. 6

Разобъем кривую $\overset{\smile}{AB}$ произвольно выбранными точками $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k, ..., A_{n-1}, $A_n = B$ на n частей $\overset{\smile}{A_0A_1}$,

$\overset{\smile}{A_1A_2}$, ..., $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$, ..., $\overset{\smile}{A_{n-1}A_n}$. Обозначим через λ наибольшую из длин частичных дуг $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$, $k = 1, ..., n$; $(\Delta x_k, \Delta y_k)$ — проекции вектора $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ $(k = 1, ..., n)$ на оси координат. Выберем произвольную точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ на каждой части $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$, $k = 1, ..., n$.

Составим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}(M_k), \overrightarrow{A_{k-1}A_k}) = \sum_{k=1}^{n} P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k. \qquad (7.1)$$

Сумма (7.1) называется интегральной суммой.

Пусть теперь число разбиений кривой $\overset{\smile}{AB}$ неограниченно возрастает $(n \to \infty)$, причем так, что $\lambda \to 0$.

Если существует предел интегральной суммы (7.1) и этот предел не зависит от способа разбиения кривой $\overset{\smile}{AB}$ и выбора точек M_k, то этот предел называется криволинейным интегралом II рода (по координатам) и обозначается

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k). \qquad (7.2)$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл II рода от вектор-функции $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ по пространственной кривой $\overset{\smile}{AB}$:

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k +$$

$$+ R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k). \qquad (7.3)$$

Обозначим $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$ для пространственной кривой $\overset{\smile}{AB}$ и $d\vec{l} = (dx, dy)$ для плоской кривой.

Тогда подынтегральные выражения в левых частях в формулах (7.2) и (7.3) могут быть представлены в виде скалярного произведения вектор-функции $\vec{F}(M)$ на вектор $d\vec{l}$: $(\vec{F}(M), d\vec{l})$.

Таким образом, криволинейный интеграл II рода может быть записан в виде

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}(M), d\vec{l}). \tag{7.4}$$

Определение криволинейного интеграла II рода давалось в предположении, что $\breve{AB}$ кусочно-гладкая кривая, а компоненты вектор-функции $\vec{F}(M)$ непрерывны в точках кривой $\breve{AB}$. При этих предположениях предел интегральной суммы (7.1) существует и не зависит от способа разбиения кривой $\breve{AB}$ на части и от выбора точек M_k, т.е. криволинейный интеграл II рода существует.

§8. Механический смысл криволинейного интеграла II рода

Пусть материальная точка M перемещается вдоль кривой $\breve{AB}$ под действием переменной силы $\vec{F}(M)$. Тогда каждое слагаемое интегральной суммы (7.1) $(\vec{F}(M_k), \overrightarrow{A_{k-1}A_k}) \approx E_k$ представляет собой работу силы $\vec{F}(M)$ при перемещении материальной точки вдоль частичной дуги $\breve{A_{k-1}A_k}$, а интегральная сумма — работу силы $\vec{F}(M)$ $(E \approx \sum\limits_{k=1}^{n} E_k)$ при перемещении материальной точки вдоль кривой AB. Это представление будет тем точнее, чем меньше λ. Естественно принять предел интегральной суммы при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$ за точное значение работы.

Таким образом, криволинейный интеграл II рода равен работе силы $\vec{F}(M)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой $\breve{AB}$:

$$E = \int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{AB} (\vec{F}(M), d\vec{l}). \tag{8.1}$$

§9. Свойства криволинейного интеграла II рода

Криволинейый интеграл II рода имеет ряд свойств, подобных свойствам интеграла I рода.

1°. Линейность:

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}_1(M) + \vec{F}_2(M), d\vec{l}) = \int\limits_{AB} (\vec{F}_1(M), d\vec{l}) + \int\limits_{AB} (\vec{F}_2(M), d\vec{l}); \qquad (9.1)$$

$$\int\limits_{AB} (\alpha\vec{F}(M), d\vec{l}) = \alpha \int\limits_{AB} (\vec{F}(M), d\vec{l}). \qquad (9.2)$$

2°. Аддитивность по области: если кривая $\breve{AB}$ разбита на части $\breve{AA_1}$, $\breve{A_1A_2}$, ..., $\breve{A_kB}$, то

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}(M), d\vec{l}) =$$

$$= \int\limits_{AA_1} (\vec{F}(M), d\vec{l}) + \int\limits_{A_1A_2} (\vec{F}(M), d\vec{l}) + \ldots + \int\limits_{A_kB} (\vec{F}(M), d\vec{l}). \qquad (9.3)$$

В отличие от криволинейного интеграла I рода криволинейный интеграл II рода зависит от выбора начальной и конечной точек, а именно:

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}(M), d\vec{l}) = -\int\limits_{BA} (\vec{F}(M), d\vec{l}).$$

§10. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода осуществляется также, как и криволинейного интеграла I рода, путем приведения его к обыкновенному определенному интегралу.

1. Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$; точки $A(x_0, f(x_0))$, $B(x_n, f(x_n))$; $dy = f'(x)\,dx$, тогда

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_n} P(x, f(x))\,dx + Q(x, f(x)) f'(x)\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))\,dx.$$

2. Пусть кривая AB задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Точка A соответствует значению параметра t_0, точка B — t_n. Тогда

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} P(x(t), y(t))x'(t)\,dt + Q(x(t), y(t))y'(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))\,dt.$$

Пусть AB — пространственная кривая. Без ограничения общности можно считать, что она задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Точка A соответствует $t = t_0$, точка B — $t = t_n$; имеется функция $\vec{F}(x;y;z) = (P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z))$. Тогда

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)+$$

$$+R(x(t), y(t), z(t))z'(t))\,dt.$$

Пример 10.1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{AB} xy\,dx + (x+y)\,dy$, принимая за AB: а) отрезок ON, $O(0;0)$, $N(1;1)$; б) дугу параболы $y = x^2$, соединяющую точки O и N; в) ломанную OMN, $M(1;0)$ (рис. 7).

Решение. а) $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $dy = dx$.

$$I = \int_0^1 (x^2 + 2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3};$$

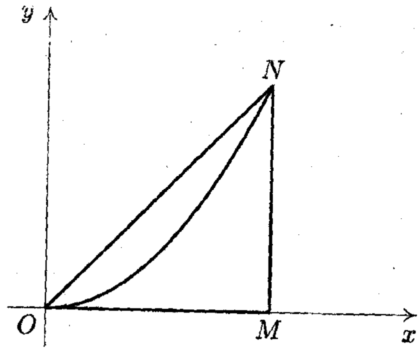

Рис. 7

б) $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $dy = 2x\,dx$.

$$I = \int_0^1 [x^3 + (x + x^2)2x]\,dx = \frac{17}{12};$$

в) контур интегрирования разобъем на 2 кривые — отрезки OM и MN. На OM $y = 0$ и $dy = 0$, а на MN $x = 0$, $dx = 0$, то есть

$$I = \int_0^1 (1 + y)\,dy = \left.\frac{(y+1)^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Пример 10.2. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{AB} y\,dx - x\,dy$, где AB — дуга циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, от точки $A(0;0)$ до точки $B(4\pi;0)$. Точка A соответствует $t = 0$, а точка B — $t = 2\pi$.

Решение.

$$I = \int_0^{2\pi} (4(1 - \cos t)^2 - 4(t - \sin t)\sin t)\,dt = 4\int_0^{2\pi} (2 - 2\cos t - t\sin t)\,dt =$$

$$= 4\left[2t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} t\sin t\,dt\right] =$$

$$= 4\left[4\pi + t\cos t\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\cos t\,dt\right] = 16\pi - 4(-t\cos t + \sin t)\Big|_0^{2\pi} = 24\pi.$$

Пример 10.3. Вычислить $\int\limits_{AB} xy\,dy$ вдоль кривой $x = y - y^3$ от точки A с ординатой $y_0 = -2$ до точки B с ординатой $y_n = 2$.

Решение.

$$\int\limits_{AB} xy\,dy = \int\limits_{-2}^{2}(y - y^3)y\,dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = -\frac{112}{45}.$$

§11. Связь между криволинейными интегралами I и II рода

Обозначим через α и β углы, составляемые с осями координат направленной касательной к кривой AB в точке $M(x, y)$ (рис. 8).

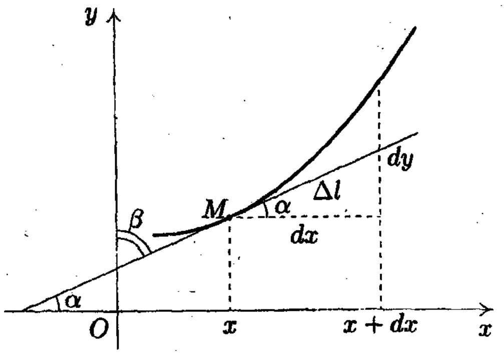

Рис. 8

Получим $dx = dl\cos\alpha$, $dy = dl\cos\beta$. Тогда

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha\,dl;$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)\cos\beta\,dl.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy = \int\limits_{AB} (P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta)\,dl. \quad (11.1)$$

§12. Формула Грина

Если AB — замкнутая кривая, то есть A совпадает с B.

Положительным будем называть то направление обхода, при котором область, ограниченная контуром, остается слева по отношению к точке, совершающей обход.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру, пробегаемому в положительном направлении, обозначают символом

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \quad (12.1)$$

Пусть L — плоский кусочно-гладкий замкнутый контур, D — ограниченная этим контуром область.

Если функции P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области D, то

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \quad (12.2)$$

Формула (12.2) называется формулой Грина.

§13. Независимость криволинейного интеграла II рода от контура интегрирования

Теорема 13.1. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области G. Тогда следующие 4 условия эквивалентны:

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой L, расположенной в G,

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0;$$

2) для любых двух точек A и B области G значение интеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ не зависит от выбора пути интегрирования, целиком лежащего в G;

3) выражение $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, определенной в области G:

$$\exists u(x,y): \ P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du(x,y);$$

4) в области G всюду $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Приведенные в теореме факты имеют физическое истолкование. В частности, утверждение 2) $\Rightarrow$ 3) означает, что если в данном силовом поле работа силы вдоль кривой не зависит от формы кривой, то поле потенциальное.

§14. Приложения криволинейного интеграла II рода

1. Работа E силы $\vec{F} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой AB вычисляется по формуле

$$E = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

2. Площадь S области D, ограниченной замкнутой кривой L, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx.$$

Пример 14.1. Найти работу силы тяжести $\vec{F} = (0; mg)$ при перемещении материальной точки из точки $M_0(x_0, y_0)$ в $M_n(x_n, y_n)$.

Решение.

$$E = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_n,y_n)} mg\,dy = mgy_n - mgy_0.$$

Пример 14.2. Вычислить площадь, ограниченную астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение.

$$S_D = \frac{1}{2} \oint\limits_L x\,dy - y\,dx.$$

$$S_D = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t(-3a\cos 62t\sin t))\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\,dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x62 + y^2}}$, где AB — отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, $A(0; -2)$, $B(4; 0)$;

2) $\int\limits_{AB} \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где AB — кривая $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

3) $\oint\limits_L (2x + y)\,dl$, где L — контур ΔABO с вершинами $A(1; 0)$, $B(0; 2)$, $O(0; 0)$;

4) $\int\limits_{AB} (x + y)\,dx - x\,dy$ и $\int\limits_{AB} y\,dx + x\,dy$, где а) AB — прямая, соединяющая точки $(0; 0)$ и $(4; 2)$; б) AB — ломанная, соединяющая точки $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(4; 2)$. Сделать выводы из полученных результатов. Пояснить, почему в одном случае интеграл зависит от пути интегрирования, а во втором — нет;

5) $\oint\limits_L (x^2 - y)\,dx$, где L — контур прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ (интегрирование вести в положительном направлении);

6) $\int\limits_{AB} \sqrt{x}\,dx + \sqrt{y}\,dy$, где AB — кривая $y = x^2$, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$;

7) $\int\limits_{AB} xy\,dx + y^2\,dy$ по кривой $x = t^2$, $y = t$ $(1 \leqslant t \leqslant 2)$ в направлении возрастания параметра;

8) $\int\limits_{AB} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ по окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. С помощью формулы Грина вычислить криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_{L} (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$, где L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$;

2) $\oint\limits_{L} y^2\,dx + (x+y)^2\,dy$ по контуру ΔABC с вершинами $A(0;0)$, $B(a;a)$, $C(0;a)$;

3) $\oint\limits_{L} (y-x)^2\,dx + (x+y^2)\,dy$, где контур L ограничивает круговой сектор радиуса R с углом φ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y)$ при перемещении материальной точки по эллипсу в положительном направлении, если сила в каждой точке (x,y) эллипса направлена к центру эллипса и по величине равна расстоянию от точки (x,y) до центра эллипса.

4. В каждой точке плоскости действует сила $\vec{F} = \{xy; x+y\}$. Вычислить работу при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1;1)$: а) по прямой $y = x$; б) по параболе $y = x^2$.

Глава 6.
Поверхностные интегралы

§1. Элементы теории поверхностей

Поверхность S называется гладкой, если в каждой ее точке существует, и притом единственная, касательная плоскость.

Для гладкости поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ имела непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

Поверхность S называется кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких поверхностей.

Площадь P гладкой поверхности S вычисляется по формуле

$$P = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dxdy, \tag{1.1}$$

где D_{xy} — проекция поверхности S на плоскость Oxy.

Поверхность S может быть задана уравнением $x = \varphi(y, z)$ или уравнением $y = \psi(x, z)$. В этом случае площадь P поверхности S будет вычисляться по формуле

$$P = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}\, dydz$$

или

$$P = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + \psi'^2_x + \psi'^2_z}\, dxdz,$$

где D_{yz} и D_{xz} — проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxz соответственно.

Пусть поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, D_{xy} — проекция поверхности S на плоскость Oxy, l_0 — граница области D_{xy}. Тогда контур l, проекция которого на плоскость Oxy совпадает с l_0, называется границей поверхности или кривой, на которую натянута данная поверхность.

Прямая, проходящая через данную точку поверхности перпендикулярно к касательной плоскости, называется нормалью к поверхности. В каждой точке M гладкой поверхности S имеется единственная нормаль, которая может иметь 2 противоположных направления.

Если на поверхности S существует замкнутый контур, не имеющий общих точек с границей, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется односторонней. Примером такой поверхности является лист Мёбиуса. Односторонние поверхности называются неориентируемыми.

Гладкая поверхность S называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направление нормали к поверхности.

Пусть S — двусторонняя поверхность. Возьмем на ней точку M_0 и припишем нормали в этой точке определенное направление. Взяв какую-либо другую точку M_1 поверхности, соединим M_0 и M_1 произвольным путем K, лежащим на поверхности и не пересекающим ее границы. При этом направление нормали непрерывно меняется и точка M_0 придет в положение M_1 с вполне определенным направлением нормали. Можно доказать, что это направление не зависит от формы пути.

Таким образом, на двусторонней поверхности выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет направление нормали во всех ее точках. Совокупность всех точек поверхности с приписанными нормалями называется стороной поверхности.

Любая гладкая поверхность, определенная уравнением $z = f(x, y)$, является двусторонней. Направляющие косинусы нормали к этой поверхности вычисляются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{-f'_x}{\pm\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}; \quad \cos\beta = \frac{-f'_y}{\pm\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}};$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}, \tag{1.2}$$

где α, β, γ — углы, которые нормаль составляет с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно. Выбрав в каждой точке поверхности вектор нормали так, чтобы он составлял с положительным направлением оси Oz острый угол («+» перед радикалом), мы получим верхнюю сторону поверхности, а при противоположной ориентации поверхности («−» перед радикалом) — ее нижнюю сторону.

Двусторонняя поверхность называется ориентируемой, а выбор ее стороны — ориентацией поверхности.

С понятием ориентации поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы.

Пусть S — ориентированная поверхность и l — ее граница, которая может состоять из одного или нескольких контуров. Направление обхода контура l считается положительным, если наблюдатель, расположенный на поверхности так, что направление вектора нормали совпадает с направлением от его ног к голове, обходя контур l, оставляет поверхность S все время слева от себя. Противоположное направление обхода называется отрицательным.

§2. Поверхностные интегралы I рода

Пусть S — некоторая гладкая или кусочно-гладкая поверхность и $f(M) = f(x, y, z)$ — непрерывная функция точки M этой поверхности.

Разобъем поверхность S на части $\Delta\sigma_k$ и в каждой части выберем точку M_k произвольным образом (рис. 1). Составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k, \tag{2.1}$$

где ΔS_k — площадь части $\Delta\sigma_k$ поверхности. Будем называть диаметром части σ_k поверхности наибольшее расстояние между точками этой части. Обозначим через λ_k диаметр части $\Delta\sigma_k$, а λ — наибольший из этих диаметров: $\lambda = \max\limits_k\{\lambda_k\}$.

Пусть теперь число разбиений $n \to \infty$ так, чтобы $\lambda \to 0$. Если при этом существует предел интегральной суммы (2.1) и он не зависит от выбора точек M_k и от разбиения поверхности, то этот предел называется поверхностным интегралом I рода (по площади

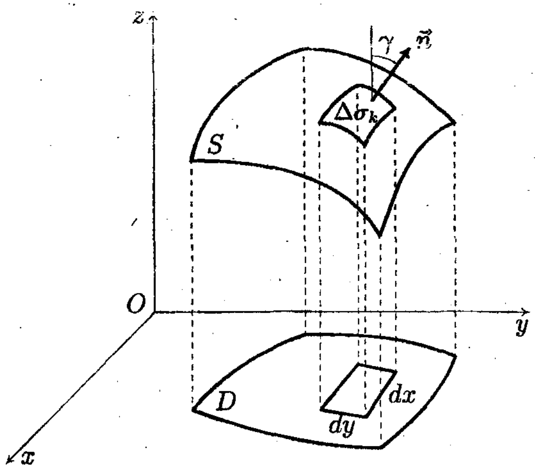

Рис. 1

поверхности). Обозначение:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_S f(M)\,dS. \tag{2.2}$$

§3. Свойства поверхностного интеграла I рода и его вычисление

Значение поверхностного интеграла I рода не зависит от ориентации поверхности, поскольку ни значение функции в точках поверхности, ни площадь поверхности на зависят от выбранного направления нормали.

Поверхностный интеграл I рода является аналогом криволинейного интеграла I рода, поэтому для него выполняются равенства, аналогичные равенствам (4.1)–(4.4) главы 5.

Если S — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$, а $F(x,y,z)$ — непрерывная функция, определенная в точках поверхности S, то справедливо равенство

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy, \tag{3.1}$$

где D_{xy} — проекция поверхности S на плоскость Oxy.

Формулу (3.1) можно записать в виде

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} F(x,y,f(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}, \qquad (3.2)$$

где γ — угол, который вектор нормали $\vec{n}$ в точке $M(x,y,z)$ составляет с положительным направлением оси Oz.

Если поверхность задана уравнением $x = \varphi(y,z)$ ил $y = \psi(x,z)$, получаем соответственно

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{yz}} F(\varphi(y,z),y,z)\sqrt{1+\varphi_y'^2+\varphi_z'^2}\,dydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} F(\varphi(y,z),y,z)\frac{dydz}{|\cos\alpha|};$$

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{xz}} F(x,\psi(x,z),z)\sqrt{1+\psi_x'^2+\psi_z'^2}\,dxdz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xz}} F(x,\psi(x,z),z)\frac{dxdz}{|\cos\beta|},$$

где D_{yz} и D_{xz} — проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxz, а α и β — углы, образованные вектором нормали с положительным направлением осей Ox и Oy.

Если поверхность S является кусочно-гладкой, то для сведения поверхностного интеграла, взятого по такой поверхности, к двойному нужно представить его в виде суммы интегралов по гладким частям этой поверхности.

Пример 3.1. Вычислить $\iint\limits_{S} z^2\,dS$, где S — часть конической поверхности $z^2 = x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

Решение. Имеем

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy.$$

Тогда

$$I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{2}\, dxdy,$$

где D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

$$I = \sqrt{2} \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 4\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \sqrt{2} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

§4. Некоторые приложения поверхностного интеграла I рода

Пусть по гладкой или кусочно-гладкой поверхности S распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\mu(x, y, z)$, причем $\mu(x, y, z)$ непрерывна на S. Такую поверхность называют материальной. Тогда

$$m = \iint\limits_S \mu(x, y, z)\, dS; \tag{4.1}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint\limits_S x\mu(x, y, z)\, dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint\limits_S y\mu(x, y, z)\, dS,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iint\limits_S z\mu(x, y, z)\, dS; \tag{4.2}$$

$$J_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)\, dS, \tag{4.3}$$

где m — масса поверхности S; $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты центра тяжести, J_z — момент инерции поверхности S относительно оси Oz.

Пример 4.1. Пусть S — часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$, $z = 1$ (рис. 2).

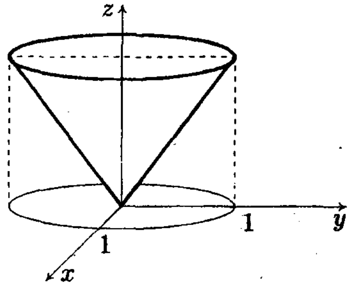

Рис. 2

Найти: а) площадь поверхности S; б) координаты центра тяжести, если считать поверхность однородной с $\mu = 1$.

Решение. а) Площадь поверхности найдем по формуле (1.1):

$$P = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{2}\, dxdy = \pi\sqrt{2}.$$

б) координаты центра тяжести найдем по формулам (4.2):

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{2}\, dxdy = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho = 0.$$

Аналогично получим $\bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}\, dxdy = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}.$$

Здесь мы учли, что $m = \mu \cdot P = \pi\sqrt{2}$.

§5. Поверхностные интегралы II рода

Пусть S — гладкая двусторонняя поверхность, ограниченная линией l, и пусть в каждой точке поверхности определена вектор-функция

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k},$$

компоненты которой являются непрерывными функциями. Зафиксируем одну из сторон этой поверхности, выбрав направление нормали $\vec{n}(M) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Разобъем поверхность S произвольным образом на элементарные площадки $\Delta\sigma_k$, на каждой из которых возьмем произвольную точку $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$. Обозначим через ΔS_k площадь элементарной площадки $\Delta\sigma_k$, λ — наибольший диаметр элементарной площадки $\Delta\sigma_k$.

Составим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\vec{F}(M_k), \vec{n}(M_k)\Big)\,\Delta S_k. \tag{5.1}$$

S_n называется интегральной суммой.

Пусть теперь $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$. Если при этом существует предел интегральной суммы (5.1) и он не зависит от способа разбиения поверхности S и выбора M_k, то этот предел называется криволинейным интегралом II рода от вектор-функции $\vec{F}(M)$ по поверхности S. Обозначение:

$$\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}(M_k), \vec{n}(M_k))\Delta S_k. \tag{5.2}$$

В формуле (5.2) скалярное произведение $(\vec{F}, \vec{n})$ запишем в координатной форме. Получим

$$\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS = \iint\limits_S (P(M)\cos\alpha + Q(M)\cos\beta + R(M)\cos\gamma)\,dS. \tag{5.3}$$

Поскольку $dS\cos\alpha = dS_{yz} = dydz$, $dS\cos\beta = dS_{xz} = dzdz$, $dS\cos\gamma = dS_{xy} = dxdy$ — площади проекций элементарной площадки на координатные плоскости, то интеграл может быть записан в виде

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS. \tag{5.4}$$

§6. Гидромеханическое истолкование поверхностного интеграла II рода

Пусть имеется некоторое течение жидкости, причем скорость частиц жидкости, протекающих через данную точку, зависит только от координат этой точки. В каждой точке $M(x,y,z)$ области задан вектор скорости $\vec{v}(x,y,z)$, то есть в области определено поле скоростей:

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Плотность жидкости будем считать постоянной, равной 1.

Требуется определить количество жидкости, протекающей за единицу времени через заданную поверхность.

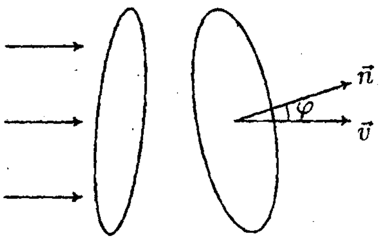

Рис. 3

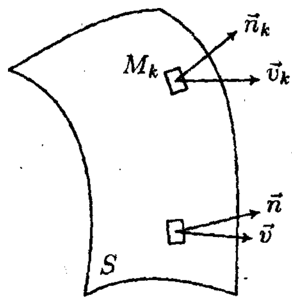

Рис. 4

Поток жидкости через элементарную площадку (рис. 3) находится по формуле $K = |\vec{v}|\cos\varphi = (\vec{v}, \vec{n})$. Суммируя потоки через все элементарные площадки (рис. 4), получим

$$K_n = \sum_{k=1}^{n}(\vec{v}_k, \vec{n}_k) = \sum_{k=1}^{n}(P_k\cos\alpha_k + Q_k\cos\beta_k + R_k\cos\gamma_k)\Delta S_k. \quad (6.1)$$

Таким образом, поток через поверхность S равен

$$K = \lim K_n = \lim \sum (P_k\cos\alpha_k + Q_k\cos\beta_k + R_k\cos\gamma_k)\Delta S_k =$$

$$= \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS. \quad (6.2)$$

§7. Свойства поверхностного интеграла II рода и его вычисление

Для поверхностного интеграла II рода справедливы свойства, аналогичные свойствам (9.1)–(9.3) (глава 5) для криволинейного интеграла II рода.

При переходе к другой стороне поверхности вектор нормали $\vec{n}$ имеет направление $-\vec{n} = (-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma)$.

Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность S задана уравнением $z = f(x,y)$ и взята верхняя сторона этой поверхности, а $R(x,y,z)$ — ограниченная на S функция. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,f(x,y)]\,dxdy.$$

Если интеграл берется по нижней стороне поверхности, то справедлива формула

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,f(x,y)]\,dxdy.$$

Аналогично получаем

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} R[\varphi(y,z),y,z]\,dydz,$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\,dzdx = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q[x,\psi(x,z),z]\,dxdz,$$

где $x = \varphi(y,z)$ и $y = \psi(x,z)$ — уравнения поверхности S, разрешенные относительно x и y.

Отметим, что в формулах интегралы, стоящие слева, существуют, если существуют двойные интегралы, стоящие справа в каждой из формул.

Пример 7.1. Вычислить $\iint\limits_S x\,dydz + dxdz + xz^3\,dxdy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенная в первом октанте (рис. 5).

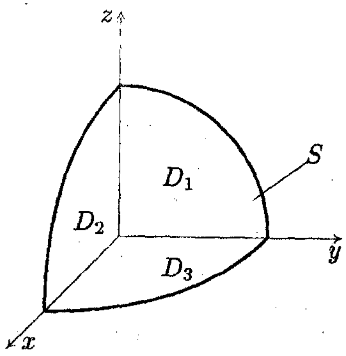

Рис. 5

Решение. Обозначим D_1, D_2 и D_3 проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy соответственно. Это будут четверти кругов:

$$D_1: y^2 + z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0; \qquad D_2: x^2 + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0;$$

$$D_3: x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

$$I_1 = \iint\limits_S x\,dydz = \iint\limits_{D_1} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\,dydz = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1 \right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$I_2 = \iint\limits_S dxdz = \iint\limits_{D_2} dxdz = \frac{\pi}{4}$$

— площадь четверти круга радиуса 1.

$$I_3 = \iint\limits_S xz^2\,dxdy = \iint\limits_{D_1} x(1 - x^2 - y^2)\,dxdy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 r(1 - r^2)r\,dr = 1 \cdot \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Итак,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{2}{15} = \frac{5\pi + 2}{12}.$$

Пример 7.2. Вычислить $\iint_S z\cos\gamma\, dS$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Здесь z нельзя выразить однозначной функцией от x и y для всей поверхности S. Разобъем поверхность на две части: S_1 с уравнением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и S_2 с уравнением $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Получим

$$\iint\limits_S z\cos\gamma\, dS = \iint\limits_{S_1} z\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{S_2} z\cos\gamma\, dS.$$

Преобразуем каждый из интегралов в двойной интеграл:

$$\iint\limits_{S_1} z\cos\gamma\, dS = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$

где D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. S_2 — внешняя сторона полусферы, расположенная ниже плоскости Oxy, значит, $\cos\gamma\, dS = -dxdy$ и

$$\iint\limits_{S_2} z\cos\gamma\, dS = -\iint\limits_D -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$

где D — тот же круг. В результате получим

$$\iint\limits_S z\cos\gamma\, dS = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy + \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi,$$

поскольку здесь $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ выражает объем полусферы радиуса 1, он равен $\frac{2}{3}\pi$.

§8. Формулы Стокса и Остроградского

Для поверхностных интегралов имеет место формула, аналогичная формуле Грина, позволяющая свести вычисление интеграла по поверхности S к вычислению криволинейного интеграла по контуру L, ограничивающему эту поверхность.

Теорема 8.1. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, то имеет место формула

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \qquad (8.1)$$

Замечание. Если поверхность S — часть плоскости, параллельной плоскости Oxy, то $\Delta z = 0$ и мы получим формулу Грина как частный случай формулы Стокса.

Из формулы (8.1) следует, что если

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}=0, \qquad (8.2)$$

то криволинейный интеграл по любой пространственной замкнутой кривой L равен нулю:

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0. \qquad (8.3)$$

В этом случае криволинейный интеграл не зависит от формы кривой интегрирования.

Как и для плоской кривой, выполнение условий (8.2) является не только достаточным, но и необходимым для (8.3).

При выполнении условий (8.2) подынтегральное выражение в (8.3) является полным дифференциалом, то есть существует функция $u(x,y,z)$ такая, что

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=du(x,y,z).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_A^B du=u(B)-u(A).$$

В теории поля $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ называется циркуляцией вектора $\vec{F} = (R, P, Q)$ по линии L. Вектор

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \operatorname{rot}\vec{F}$$

называется ротором или вихрем векторного поля $\vec{F} = (P, Q, R)$. Тогда формула Стокса может быть записана в следующей векторной форме:

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n})\,d\sigma = \oint\limits_L (\vec{F}, d\vec{l}). \tag{8.4}$$

Введем в рассмотрение вектор $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$, называемый «набла». Тогда $\operatorname{rot}\vec{F}$ может быть представлен в виде векторного произведения:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = [\vec{\nabla}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Формула Стокса может быть представлена в следующем векторном виде:

$$\iint\limits_S [\vec{\nabla}, \vec{F}]\,dS = \oint (\vec{F}, d\vec{l}).$$

Условие независимости криволинейного интеграла от формы кривой интегрирования с точки зрения теории поля состоит в том, чтобы $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, т.е. поле было безвихревым.

Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области V, тогда имеет место формула

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS, \tag{8.5}$$

где S — граница области V и интегрирование по S производится по ее внешней стороне.

Формула (8.5) называется формулой Остроградского. Эта формула устанавливает связь между тройным интегралом по области V и поверхностным интегралом по ограничивающей эту область поверхности S.

Формула Остроградского имеет следующее истолкование:

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \oiint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS$$

— поток вектора $\vec{F} = (P, Q, R)$ через замкнутую поверхность S.

Выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{F}$$

есть дивергенция вектора $\vec{F}$: $\operatorname{div}\vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F})$. Дивергенция векторного поля — плотность источника или количество векторных линий, начинающихся в бесконечно малом объеме в расчете на единицу этого объема.

Таким образом, формула Остроградского может быть записана в виде

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \oiint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS$$

или

$$\iiint\limits_V (\vec{\nabla}, \vec{F})\,dV = \oiint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS.$$

Пример 8.1. Вычислить поток вектора $\vec{F} = (x; y; z)$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (нормаль внешняя).

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского:

$$\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS = \iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_V (1 + 1 + 1)\,dxdydz = 3 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3.$$

Глава 7.

Числовые ряды

§1. Введение

Для чего нужны числовые и функциональные ряды? Вопрос не риторический. Дело в том, что большинство студентов, впервые встречаясь с этим математическим аппаратом, не понимают смысла замены компактной, «красивой» функции вроде $\sin x$ или e^x на громоздкое (бесконечно длинное) выражение — ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

Смысл этого в том, что возможность представления функции в виде суммы более простых функций (в математике это свойство называется аналитичностью, т.е. разложимостью функции) дает способ вычислить значения таких функций для любого допустимого значения аргумента и с любой степенью точности. Иначе значения, например, $\sin\frac{\pi}{10}$, мы бы считали, измеряя длины сторон треугольника и составляя отношения, а это, конечно, гораздо менее точно. А как считать, например, $e^{-3{,}8}$? Вообще не понятно. Хотя любой калькулятор с функциями вычисляет эти значения, как раз используя микропрограммы разложения функций в ряды.

Кроме этого применения есть и другие, например, вычисление некоторых интегралов от функций, не имеющих элементарных первообразных, приближенное решение дифференциальных уравнений.

Возможность представления функкий рядами и область применимости этих рядов требуют обоснования. Это и является первой частью изучаемого раздела математического анализа — исследование сходимости числовых рядов. Ряд называется сходящимся, если он имеет конечную сумму. Используя аппарат исследования сходимости числовых рядов, далее строится теория представления функций сходящимися функциональными рядами, что и является основной целью раздела.

§2. Основные определения

Числовым рядом из действительных чисел называется бесконечная сумма вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$. Для краткого обозначения ряда используют символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Считается, что ряд задан, если известен закон образования «общего члена» ряда — u_n, т.е. задана последовательность $\{u_n\}$ как функция целочисленного аргумента n.

Основным практическим вопросом в теории рядов является их суммируемость (сходимость), т.е. существование числа или функции, являющихся конечным выражением суммы всех членов ряда. Но в силу наличия бесконечно большого числа слагаемых эта задача не может быть решена алгебраическим суммированием.

Суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм, которая находится следующим образом:

1) число $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ называется n-ой частичной суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) частичные суммы при $n = 1, 2, 3, \ldots$ образуют последовательность $\{S_n\}$;

3) предел этой последовательности, если он существует, и есть сумма ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Так можно непосредственно доказать существование суммы ряда и найти ее. Однако основная сложность заключается в составлении функции S_n в конечной форме (без многоточий).

Пример 2.1. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Решение. Из элементарной математики известны следующие формулы для геометрической прогрессии:

$$a_1,\ a_2=a_1\cdot q,\ \ldots,\ a_n=a_1\cdot q^{n-1},\ S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Если $|q|<1$ — это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, тогда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q}\right)=\frac{a_1}{1-q}-0=\frac{a_1}{1-q}=S.$$

Тогда для геометрической прогрессии $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$:

$$a_1=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2},\ S_n=1-\frac{1}{2^n},\ S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

Если $|q|>1$, то $\lim S_n$ не существует, т.к. S_n неограниченно возрастает; для геометрической прогрессии $\{2^n\}$: $a_1=2$, $q=2$,

$$S_n=2(2^n-1),\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2(2^n-1)=\infty.$$

Таким образом, ряды, построенные из геометрических прогрессий, являются сходящимися, если $|q|<1$, и расходящимися, если $|q|>1$. Если $q=1$, то

$$S_n=a_1+a_1+a_1+\ldots+a_1$$

стремится к $\pm\infty$ в зависимости от знака a_1; если $q=-1$, то

$$S_n=a_1-a_1+a_1-a_1+\ldots=\begin{cases}0, & \text{при } n \text{ четном},\\ a_1, & \text{при } n \text{ нечетном},\end{cases}$$

т.е. определенного предела у S_n нет.

Пример 2.2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

(по индукции заключаем, что все промежуточные члены суммы взаимоуничтожаются), тогда

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

В большинстве практически интересных случаев найти сумму ряда по определению не удается как раз из-за упомянутой сложности. Поэтому в практике задачу нахождения суммы ряда разбивают на две части: 1) доказывают существование этой суммы, но не непосредственно (т.е. по опредлению), а косвенно, через признаки, а затем, в случае сходимости, 2) вычисляют сумму приближенно, но с любой требуемой точностью, ограничиваясь конечным числом членов ряда. Вычисление суммы любого конечного числа членов ряда без доказательства сходимости никакого достоверного значения суммы ряда не дает.

§3. Свойства сходящихся числовых рядов

Свойство 3.1. Отбрасывание или добавление или изменение конечного числа членов ряда не нарушает его сходимости или расходимости.

Действительно, конечное число членов ряда всегда можно просуммировать алгебраически. Остальные же члены, а они составляют бесконечно длинный «хвост» ряда, и определяют его сходимость или расходимость.

Свойство 3.2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам S и T соответственно, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, причем его сумма равна $S + T$.

Доказательство. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ — n-ые частичные суммы данных рядов, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ — n-ая частичная сумма исследуемого ряда. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = S + T.$$

Свойство 3.3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S, то для любого числа c ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ тоже сходится к сумме cS. Если $c \neq 0$, то справедливо и обратное утверждение. Доказательство аналогично предыдущему.

§4. Необходимый признак сходимости числовых рядов

В математике существуют две основные формы условных утверждений: необходимые и достаточные. В чем их различие?

Необходимые условия, как правило, более простые для проверки, чем достаточные, и **обязательно** выполняются при наличии интересующего нас свойства или объекта. Например, при наличии экстремума в точке дифференцируемости функции ее первая производная обращается в нуль. Поэтому мы говорим, что обращение в нуль первой производной является необходимым условием существования экстремума дифференцируемой функции.

Однако из выполнения необходимого условия еще нельзя сделать окончательный вывод о наличии интересующего нас свойства. Действительно, обращение первой производной в нуль в некоторой точке не гарантирует наличие в этой точке экстремума. Например, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, но при $x = 0$ экстремума $f(x)$ нет.

Но поскольку интересующее нас свойство обязательно сопровождается выполнением необходимого условия, то из невыполнения этого условия можно сделать определенный вывод об отсутствии нужного свойства.

В практике исследования функций мы использовали необходимые условия для обнаружения точек, где экструмум возможен, и уже затем исследовали эти точки с помощью достаточных условий.

В нашем настоящем случае — при исследовании рядов — таким необходимым признаком сходимости числового ряда является равенство нулю предела n-го члена ряда.

Теорема 4.1. У всех сходящихся числовых рядов $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Вычитая почленно эти равенства, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Из этого признака практически полезным является логическое

Следствие 4.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то окончательного ответа о поведении ряда мы еще не имеем. Ряды, удовлетворяющие этому условию, могут быть как расходящимися, так и сходящимися: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический — расходится; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — бигармонический — сходится (это мы покажем далее с помощью достаточных признаков сходимости).

Достаточных признаков сходимости несколько. Это разнообразие вызвано тем, что какой-либо один признак не всегда удобен для любой формы функции, задающей общий член ряда $\{u_n\}$. Выбор признака обусловлен опытом исследователя либо осуществляется через перебор известных признаков. При этом важно понимать, что сходимость или расходимость конкретного ряда присуща ему изначально и не зависит от примененного признака. Выбор признака может оказаться удачным — если мы получили определенный ответ, или неудачным — если мы не смогли получить определенный ответ.

§5. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

1. Признаки сравнения. Общие принципы работы этих признаков таковы: к исследованию данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ привлекается вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, который нам известен из предыдущего опыта или сами его конструируем. Поведение вспомогательного ряда (т.е. сходимость или расходимость) нам известно или может быть легко установлено. Тогда при выполнении того или иного критерия сравнения делается вывод о сходимости или расходимости данного ряда.

Признак 5.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $u_n \leqslant v_n$ для любого n, начиная с некоторого $n = N$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Признак 5.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $u_n \geqslant v_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Признак 5.3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = c$, ($c \neq 0$, $c \neq \infty$) то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ или оба сходятся или оба расходятся.

Эти признаки просты в применении, нужно лишь иметь некоторый опыт для удачного подбора подходящего вспомогательного ряда. Довольно часто в этих целях используются ряды, полученные из обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (ряды сходятся при $p > 1$, раходятся при $p \leqslant 1$) и из геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ (ряды сходятся при $|q| < 1$, расходятся при $|q| \geqslant 1$).

Пример 5.1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{2^n}$.

Решение. Вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n}$ сходится, т.к. $\left\{\dfrac{\pi}{2^n}\right\}$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, $q = \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1.$$

Вывод: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ сходится по признаку 5.3.

Пример 5.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

Решение. Вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармонический, расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{1+n^2}=1.$$

Данный ряд расходится.

Пример 5.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{0,01n^2+1}$.

Решение. Вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — бигармонический, сходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{0,01n^2+1}=100.$$

Данный ряд сходится.

2. Признак Даламбера.

Признак 5.4. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$: а) сходится при $l<1$; б) расходится при $l>1$; в) нет ответа при $l=1$.

Справедливость утверждения не столь очевидна, как в предыдущих признаках, поэтому приведем

Доказательство. а) Пусть $l<1$. Выберем число q таким: $l<q<1$. Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, следует, что, начиная с некоторого номера $n=N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$, т.к. в окрестности предела находятся почти все члены последовательности $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$. Запишем

эти неравенства для $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$, начиная с номера N:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < q, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < q, \ \dots,$$

откуда получим такую цепочку сравнений:

$$\begin{aligned} &u_{N+1} < qu_N, \\ &u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N, \\ &u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Рассмотрим два ряда: данный

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots \tag{5.1}$$

и вспомогательный

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \dots . \tag{5.2}$$

Второй ряд построен на геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, он сходится. От ряда (5.1) отбросим конечное число членов $(N - 1)$, что не влияет на сходимость ряда, а оставшаяся часть ряда $u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$ удовлетворяет условиям сходимости по признаку сравнения 5.1 с рядом (5.2). Значит, ряд (5.1) тоже сходится.

б) Пусть $l > 1$, тогда, начиная с некоторого номера $n = N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, а значит, члены ряда возрастают и тогда не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$). Значит, ряд расходится.

Пример 5.4. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots .$$

Решение. $u_n = \frac{2n}{3^n}$, $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Ряд сходится.

Пример 5.5. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{3!}{2\cdot 4}+\frac{5!}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{7!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots.$$

Решение. $u_n=\dfrac{(2n-1)!}{2\cdot n!}$, $u_{n+1}=\dfrac{(2n+1)!}{2\cdot(n+1)!}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!\cdot 2\cdot n!}{2(n+1)!(2n-1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot n!}{n!(n+1)\cdot(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)}{n+1}=\infty.$$

Ряд расходится.

Пример 5.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Решение.

$$u_n=\frac{1}{n},\ u_{n+1}=\frac{1}{n+1};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Ответ не получен.

3. Признак Коши.

Признак 5.5. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$: а) сходится при $l<1$; б) расходится при $l>1$; в) нет ответа при $l=1$.

Доказательство признака аналогично доказательству признака Даламбера. Область применимости признака Коши определяется удобством нахождения предела от $\sqrt[n]{u_n}$.

Пример 5.7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1.$$

Ряд сходится.

Пример 5.8. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e>1.$$

Ряд расходится.

4. Интегральный признак сходимости ряда. Исследование сходимости рядов этим признаком зачастую позволяет получить определенный ответ тогда, когда не срабатывают признаки Даламбера и Коши.

Сходимость ряда связывают со сходимостью несобственного интеграла по бесконечному промежутку от функции непрерывного аргумента x, построенной по формуле общего члена ряда u_n.

Признак формулируется так:

Признак 5.6. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и не возрастают ($u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant \ldots$), $f(x)$ — не возрастающая положительная при $x \geqslant 1$ функция, причем $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, ..., тогда, если интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство (это еще одна иллюстрация применения очень полезной теоремы из теории пределов: «Монотонно возрастающая, ограниченная сверху функция имеет предел»). Построим два варианта изображения членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, совмещенных с графиком функции $f(x)$ (рис. 1 и 2). Площадь каждого прямоугольника численно равна соответствующему члену ряда. Сумма площадей прямоугольников от 1 до n — это S_n — n-ая частичная сумма ряда. Площадь криволинейной трапеции при $x \in [1; n]$ — это интеграл $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Из рис. 1 следует $S_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, из рис. 2 — $S_{n+1} - u_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, т.е. $S_{n+1} < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1$.

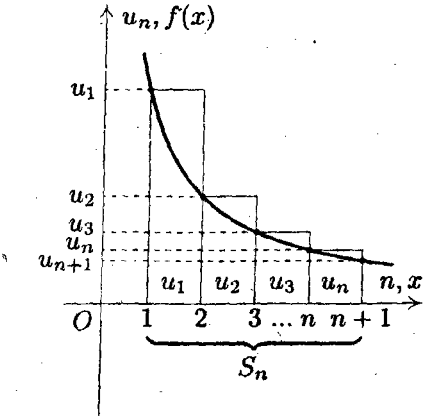

Рис. 1

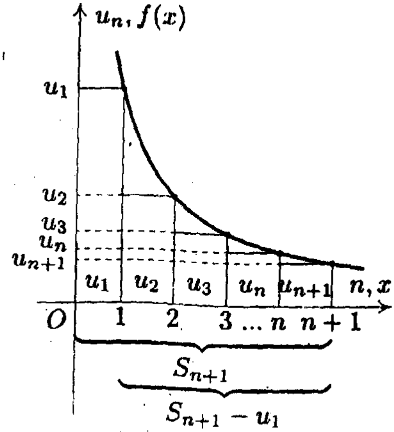

Рис. 2

При $n \to \infty$ интеграл $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ превращается в несобственный интеграл по бесконечному промежутку: $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Пусть интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение. Тогда, учитывая, что

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$$

и предыдущие неравенства, получим цепочку неравенств

$$S_n < S_{n+1} < \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx + u_1,$$

т.е. монотонно возрастающая (в силу положительности членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$) последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ по упомянутой выше теореме. Это и есть сумма ряда.

Пусть теперь интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ расходится, т.е. $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \infty$. Значит, $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$. А так как $S_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример 5.9. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение. Это обобщенный гармонический ряд, $u_n = \frac{1}{n^p}$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Если $p = 1$, то

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int\limits_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \left(\ln x\Big|_1^N\right) = \lim_{N\to\infty} \ln N = \infty$$

и ряд расходится. Если $p \neq 1$, то

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \int\limits_1^N \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^N\right) = \frac{1}{1-p} \lim_{N\to\infty} (N^{1-p} - 1).$$

Если $p > 1$, то $\frac{1}{1-p} \lim\limits_{N\to\infty} (N^{1-p} - 1) = \frac{1}{p-1}$ — ряд сходится; если $p < 1$, то $\frac{1}{1-p} \lim\limits_{N\to\infty} (N^{1-p} - 1) = \infty$ — ряд расходится.

Пример 5.10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$.

Решение. $u_n = \frac{2}{3+n^2}$, $f(x) = \frac{2}{3+x^2}$.

$$\int\limits_1^\infty \frac{2}{3+x^2}dx = 2\lim_{N\to\infty} \int\limits_1^N \frac{dx}{3+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{N\to\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_1^N\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{N\to\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{N}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ряд сходится.

Пример 5.11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. $u_n = \frac{1}{n\ln n}$, $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{N\to\infty}\int_2^{N}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{N\to\infty}\left(\ln\ln x\Big|_2^N\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}(\ln\ln N - \ln\ln 2) = \infty.$$

Ряд расходится.

Пример 5.12. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

Решение. Применим комбинацию признаков: признак сравнения 5.3 и интегральный признак 5.6. Построим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, исследуем его на сходимость интегральным признаком:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{N\to\infty}\int_2^{N}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln N}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Вспомогательный ряд сходится. Проведем его сравнение с данным рядом:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n\ln^2 n}{(n^2-3)\ln^2 n} = 1.$$

Значит, данный ряд сходится.

§6. Знакочередующиеся числовые ряды

Числовые ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

где все $u_n \geqslant 0$, называются знакочередующимися рядами. К ним не применимы рассмотренные ранее достаточные признаки сходимости в силу существенности знакопостоянства членов ряда при доказательстве признаков. Однако для этих рядов справедлив необходимый признак сходимости и его следствие, а также весьма простой в применении достаточный признак — теорема Лейбница.

Теорема 6.1 [Лейбница]. Если в знакочередующемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$: 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > 0$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, сумма его положительна и не превосходит первого члена ряда: $0 < S < u_1$.

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы ряда.

а) При $n = 2m$ (четном)

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

В силу условий теоремы $S_{2m} > 0$ и возрастает при увеличении n. Перегруппируем члены суммы:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - u_{2m}.$$

Так как все вычитаемые члены положительны, то $S_{2m} < u_1$, значит, последовательность частичных сумм $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, и, соответственно, имеет предел, не превышающий u_1:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S, \quad 0 < S < u_1.$$

б) При $n = 2m+1$, $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S.$$

Сходимость доказана и для нечетных частичных сумм.

Пример 6.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение. Выполнены условия теоремы Лейбница:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Значит, ряд сходится.

§7. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются и положительные и отрицательные, не обязательно регулярно чередующиеся. Например, члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2} = \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots$$

при произвольном фиксированном α будут числа со знаком, зависящим и от α и от n.

К рядам такого типа все ранее доказанные достаточные признаки сходимости не применимы. Но вводя в рассмотрение вспомогательный ряд из модулей членов данного ряда, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 7.1. Если знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то сходится и данный ряд.

К вспомогательному ряду применимы все ранее доказанные достаточные признаки сходимости. Сходимость, доказанная таким образом, называется абсолютной сходимостью.

Пример 7.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Решение. Вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ сравним по признаку 5.1 с бигармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Так как $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то сходится абсолютно и данный ряд.

Следует отметить, что абсолютная сходимость не является необходимым условием сходимости знакопеременного ряда, т.е. это требование несколько завышено по сравнению с определением сходимости. Существуют ряды, которые сходятся, но не абсолютно, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Этот ряд сходится, что устанавливается теоремой Лейбница, но ряд из модулей членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — расходится.

Сходимость такого рода называется условной сходимостью.

На этом мы заканчиваем рассмотрение признаков сходимости числовых рядов, хотя надо отметить, что существуют еще несколько признаков, более сложных в применении и реже употребляемых.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму ряда:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$; 2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-4)}$.

2. Исследовать сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$;

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

3. Исследовать сходимость знакоположительных числовых рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2n+3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n+2}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+5}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5+3n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3+1}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \dfrac{1}{n^2+1}$;

12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{(n^2+1)\ln n}$;

13) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)\ln^2 n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$.

4. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n n^2$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{(2n-1)!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \dfrac{5}{n}$.

Глава 8.
Функциональные ряды

§1. Основные определения

Функциональными рядами называются ряды, члены которых зависят не только от номера суммирования n, но и являются функциями непрерывной переменной x. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x}\right)^{n-1} = 1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^3}+\ldots+\sqrt{x^n}+\ldots.$$

При различных допустимых значениях x из него получаются числовые ряды:

$$\text{при } x=\frac{1}{9},\quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}};$$

$$\text{при } x=4,\quad 1+2+4+8+\ldots+2^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}$$

и т.п.

В общем виде функциональный ряд обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots.$$

Как видно из приведенного выше примера, числовые ряды, получающиеся из одного и того же функционального ряда при различных значениях переменной x, могут быть сходящимися — $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$, или расходящимися — $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}$.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд порождает сходящиеся числовые ряды, называют областью сходимости этого ряда. В области сходимости функционального ряда сумма ряда существует и является функцией от x: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$.

В нашем примере при $x \in (0;1)$ члены ряда образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \sqrt{x}$. Значит, в интервале $(0;1)$ данный ряд определяет функцию $S(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$, являющуюся суммой ряда

$$1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \ldots + \sqrt{x^n} + \ldots = \frac{1}{1-\sqrt{x}}, \qquad 0 < x < 1.$$

Для доказательства некоторых важных свойств сходящихся функциональных рядов вводится более строгое понятие сходимости — равномерная сходимость функционального ряда на некотором промежутке. С этой целью вводятся определения:

— n-ая частичная сумма: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$;

— остаток ряда: $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$.

Очевидно, что для всех значений x из области сходимости ряда

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на отрезке $[a;b]$, если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n \geqslant N$ будет выполнено неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in [a;b]$.

Признаком равномерной сходимости является так называемый признак Вейерштрасса:

Признак 1.1. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ мажорируется некоторым сходящимся числовым рядом с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (т.е. $|u_n(x)| \leqslant a_n$), то ряд равномерно сходится.

Пример 1.1. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots.$$

Решение. Этот ряд для любого $x \in (-\infty;\infty)$ мажорируется сходящимся бигармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Действительно: $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Значит, данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

§2. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Приводимые ниже свойства практически полезны тем, что опираясь на факт сходимости некоторых известных модельных рядов или рядов, изученных ранее, позволяют делать вывод о сходимости новых рядов, привязанных каким-либо образом к известным.

Свойство 2.1. Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций непрерывна.

Свойство 2.2. Ряд, сходящийся равномерно на отрезке $[a;b]$, можно почленно интегрировать на промежутке, принадлежащем области сходимости, причем получающийся ряд сходится равномерно на том же отрезке к $\int\limits_{x_0}^{x} S(x)\,dx$, т.е.

$$\int\limits_{x_0}^{x} u_1(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{x} u_2(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{x_0}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots = \int\limits_{x_0}^{x} S(x)\,dx.$$

Свойство 2.3. Ряд из непрерывных функций, сходящийся равномерно на отрезке $[a;b]$, можно почленно дифференцировать, если при этом получается ряд сходящийся равномерно на том же отрезке. Сумма полученного ряда равна производной от суммы данного, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots = S'(x).$$

§3. Степенные ряды. Интервал сходимости

Степенным рядом называется ряд, составленный из степенных функций, расположенных по возрастанию целых неотрицательных показателей:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Числа a_0, a_1, ..., a_n, ... называются **коэффициентами ряда.**

Можно доказать, что для любого степенного ряда указанного вида существует конечное или бесконечное неотрицательное число R — радиус сходимости ряда — такое, что если $R > 0$, то при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ — расходится. При $|x| = R$, т.е. при $x = R$ и при $x = -R$, может иметь место как сходимость, так и расходимость степенного ряда. Интервал $(-R; R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. В случае, если $R = 0$, то степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ сходится лишь в точке $x = 0$.

Наряду с упомянутым видом степенного ряда рассматриваются и ряды «по степеням бинома $(x - a)$»:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

где a — некоторое постоянное число. Эти ряды легко приводятся к предыдущему виду, если положить $x - a = t$. Тогда все рассуждения о радиусе и интервале сходимости сохраняются, лишь с той поправкой, что интервал сходимости будет симметричен не относительно нуля, а относительно точки $x = a$, т.е. $(a - R; a + R)$.

В простейших случаях радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ может быть определен с помощью признаков Даламбера и Коши. Для применимости признаков введем вспомогательный ряд из модулей членов данного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n$. Как известно, при сходимости этого ряда будет сходится и данный ряд (абсолютная сходимость).

По признаку Даламбера для сходимости построенного ряда достаточно выполнения неравенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} < 1 \text{ или } |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Предположим, что указанный предел существует: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$.

Тогда, решая неравенство $|x|\cdot l < 1$, получим $|x| < \frac{1}{l}$. Это неравенство определяет множество значений аргумента x, при которых данный ряд сходится абсолютно. Если же $|x| > \frac{1}{l}$, то $l|x| > 1$ и ряд расходится.

Таким образом, число $R = \frac{1}{l}$ и есть радиус сходимости данного степенного ряда, т.е. $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Аналогичная цепочка рассуждений приводит к формуле радиуса сходимости по признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|x|^n} < 1 \Rightarrow |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

$$l\cdot|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{l}, \quad |x| < R, \quad R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Пример 3.1. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n}$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot(n+1)}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.2. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Пример 3.3. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Пример 3.4. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}x^n$.

Решение.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1}\right)^{n}} = \frac{1}{e}.$$

Пример 3.5. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 7^n}$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)7^{n+1}}{n \cdot 7^n} = 7, \quad -7 < x-1 < 7, \quad -6 < x < 8.$$

Пример 3.6. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n \cdot 2^n}{2n+1}$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(2n+3)}{(2n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < x+3 < \frac{1}{2}, \quad -\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}.$$

Пример 3.7. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$.

Решение. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. При $x = \frac{1}{2}$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — ряд расходится (гармонический). При $x = -\frac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — ряд сходится по признаку Лейбница. Значит, область сходимости состоит из интервала и нижней границы: $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$.

Пример 3.8. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 7^n}$.

Решение. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 7^{n+1}}{n^2 \cdot 7^n} = 7$. При $x = -6$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ — ряд сходится абсолютно. При $x = 6$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — бигармонический ряд, сходится. Значит, область сходимости $-6 \leqslant x \leqslant 8$.

§4. Дифференцирование и интегрирование сходящихся степенных рядов

Чтобы распространить свойства равномерно сходящихся функциональных рядов на степенные ряды, докажем следующую теорему:

Теорема 4.1. Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на любом отрезке $[-\rho; \rho]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Доказательство. Ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ мажорируется сходящимся числовым рядом $|a_0| + |a_1||\rho| + |a_2||\rho|^2 + ...$ Так как $\rho \in (-R; R)$, значит, данный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

Как следствие этой теоремы получаем все упомянутые свойства:

Свойство 4.1. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда есть непрерывная функция.

Свойство 4.2. Если пределы интегрирования α, β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} a_0\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_1 x\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_2 x^2\,dx + \dots .$$

Свойство 4.3. Если степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = S(x)$ имеет интервал сходимости $(R; R)$, то ряд, полученный почленным дифференцированием данного ряда: $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... = \varphi(x)$, имеет тот же интервал сходимости $(-R; R)$, при этом $\varphi(x) = S'(x)$, если $|x| < R$.

Последнее свойство позволяет проводить дифференцирование сходящегося степенного ряда сколько угодно раз и установить связь между коэффициентами ряда и числовыми значениями суммы ряда и ее производных в центре сходимости.

Для этого продифференцируем ряд n раз:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...,$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... + n a_n x^{n-1} + ...,$$

$$S''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots,$$

$$S'''(x) = 3!a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\ldots2 \cdot a_{n+1}x + \ldots.$$

Полагая в этих равенствах $x = 0$, получаем формулы для определения коэффициентов ряда через сумму:

$$a_0 = S(0),\ a_1 = S'(0),\ a_2 = \frac{S''(0)}{2!},\ a_3 = \frac{S'''(0)}{3!},\ \ldots,\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots.$$

§5. Ряды Тейлора и Маклорена

В разделе «Дифференциальное исчисление» была получена формула Тейлора, дающая представление некоторой функции $f(x)$ многочленом из степенных функций в окрестности некоторой точки $x = a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаточный член.

Если при безграничном увеличении числа членов разложения $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то из многочлена получаем ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots.$$

Следует еще раз подчеркнуть, что это представление функции $f(x)$ рядом справедливо только тогда, когда ряд сходится, т.е. при выполнении условия $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Область сходимости может быть определена так, как мы это делали в §3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, то построенный ряд не представляет данную функцию $f(x)$, хотя может сходиться к другой.

Если в формуле разложения $a = 0$, то получим частный случай — ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Как видим, коэффициенты ряда соответствуют полученным ранее формулам, связывающим коэффициенты сходящегося ряда с производными его суммы.

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \sin x$. По формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

При любом фиксированном x: $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$, радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \infty$. Значит,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Аналогично строятся еще некоторые так называемые табличные разложения:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

§6. Биномиальный ряд. Применение свойств сходящихся степенных рядов для построения разложений

Построим разложение в ряд Маклорена функции

$$f(x) = (1+x)^m,$$

где m — произвольное постоянное число. Определяем коэффициенты разложения:

$$f(0)=1, \quad f'(0)=m(1+x)^{m-1}\big|_{x=0}=m,$$

$$f''(0)=m(m-1)(1+x)^{m-2}\big|_{x=0}=m(m-1), \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}\big|_{x=0}=$$
$$=m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Тогда разложение имеет вид

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots+$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\dots.$$

Оценку остаточного члена проводить не будем, а непосредственно определим ответ на вопрос: «Где справедливо это равенство?», т.е. найдем интервал сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(n+1)!}{n!m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1.$$

Значит, интервал сходимости любого биномиального ряда $(-1;1)$. Область сходимости будем определять для конкретных функций при определенном значении m.

Надо отметить, что для целых и положительных m ряд обрывается на члене степени m (все последующие коэффициенты нули), и такое разложение называется формулой бинома Ньютона. Например,

$$(1+x)^5=1+5x+\frac{5\cdot4}{2!}x^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}x^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!}x^4+$$
$$+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{5!}x^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$$

В общем виде

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\dots+nab^{n-1}+b^n.$$

Выпишем некоторые частные случаи биномиальных рядов и соответствующие области сходимости:

$$m=-1;\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots,\quad |x|<1;$$

$$m=\frac{1}{2};\quad \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\ldots,$$
$$|x|\leqslant 1;$$

$$m=-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\ldots,$$
$$|x|<1.$$

Используя эти и аналогичные разложения, легко через несложные замены переменной, например, $x=-y$, $x=y^2$, $x=-y^2$, $x=\dfrac{y}{2}$ и т.д., построить новые разложения и определить соответствующие области сходимости:

$$\frac{1}{1+\dfrac{y}{2}}=1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2^2}y^2-\frac{1}{2^3}y^3+\ldots,\quad \left|\frac{y}{2}\right|<1\Leftrightarrow|y|<2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}y^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}y^6+\ldots,\quad |-y^2|<1\Leftrightarrow|y|<1,$$

$$\frac{1}{1+y^2}=1-y^2+y^4-y^6+y^8-\ldots,\quad |y|<1.$$

Теперь воспользуемся возможностью почленного интегрирования сходящихся степнных рядов:

$$\int_0^x\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\arcsin x=$$

$$=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}y^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}y^6+\ldots\right)dy=$$

$$=x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\ldots\quad |x|<1;$$

$$\int_0^x\frac{dy}{1+y}=\ln(1+x)=\int_0^x(1-y+y^2-y^3+\ldots)\,dy=$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots, \quad |x| < 1;$$

$$\int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - y^2 + y^4 - y^6 + y^8 - \ldots)\,dy =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Аналогично можно получить сходящиеся разложения и для некоторых других функций. Преимущества такого метода разложения (замена переменной и интегрирование) перед непосредственным применением формулы Тейлора очевидны.

§7. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Как известно, определенные интегралы можно вычислить точно с помощью формулы Ньютона-Лейбница и приближенно по различным схемам, например, по формуле Симпсона. Первый способ хорош, но требует нахождения первообразной, а это иногда трудно, а иногда и невозможно. Второй способ неудобен тем, что требуется многократно вычислять значения подынтегральной функции, что иногда тоже весьма трудно.

Представление функции сходящимся степенным рядом позволяет предложить способ приближенного вычисления через наиболее простые — степенные — функции. Следует только помнить главное условие: работать с рядом (интегрировать) можно только в области сходимости.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 7.1. Вычислить $\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ (функция e^{-x^2} не имеет элементарной первообразной).

Решение. Есть известное разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Сделаем необходимую замену переменной, тогда

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Интегрируя равенство, получим

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \int_0^a \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\Big|_0^a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \frac{a^7}{3!\cdot 7} + \ldots.$$

Заменив a на число, можем вычислить данный интеграл с любой точностью (см. замечание 7.2 к следующему примеру).

Пример 7.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2} x\ln(1+x^3)\,dx$.

Решение. Есть табличное разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \quad |x| < 1.$$

Заменив x на x^3, получим

$$\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Умножим обе части равенства на x:

$$x\ln(1+x^3) = x^4 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{10}}{3} - \frac{x^{13}}{4} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Интегрируем:

$$\int_0^{1/2} x\ln(1+x^3)\,dx = \int_0^{1/2} \left(x^4 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{10}}{3} - \frac{x^{13}}{4} + \frac{x^{16}}{5} - \ldots\right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{16} + \frac{x^{11}}{33} - \frac{x^{14}}{56} + \ldots\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{33}\cdot\frac{1}{32}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{56}\cdot\frac{1}{32}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots.$$

Замечание 7.1. Строя новые разложения, нужно обязательно находить область сходимости.

Замечание 7.2. Точность вычисления определена величиной отбрасываемого «хвоста» полученного числового ряда. Учитывая сходимость ряда, можно быть уверенным, что это погрешность стремится к нулю при увеличении числа учтенных членов ряда. Если же нужна оценка погрешности, то иногда это легко сделать с помощью теоремы Лейбница о знакочередующихся рядах, иногда применяя вспомогательные — мажорирующие — ряды.

В нашем примере отбрасываемый «хвост» является знакочередующимся сходящимся рядом. Значит, погрешность меньше первого отброшенного члена. Например, учитывая в результате первые три члена ряда, получим $\int\limits_0^{1/2} x\ln(1+x^3)\,dx \approx 0,006021$, погрешность меньше $0,000001$, т.к.

$$\frac{1}{56\cdot 32\cdot 512} = \frac{1}{917504} \approx 0,000001$$

есть величина первого отброшенного члена.

§8. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

В случае, когда не удается решить дифференциальное уравнение точно, в квадратурах, прибегают к приближенным методам решения, одним из которых является представление решения рядом Тейлора.

Пусть требуется решить задачу Коши:

$$y'' = F(x, y, y'), \quad y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Допустим, что существует решение, представимое в виде ряда:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots .$$

Необходимо найти коэффициенты $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ..., удовлетворяющие условиям задачи.

Очевидно, из этих условий следует, что $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$, $f''(x_0) = y''|_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0)$. Дифференцируя обе части данного уравнения по x и подставляя затем $x = x_0$, имеем

$$y''' = F'_x + F'_y\cdot y' + F'_{y'}\cdot y'', \quad f'''(x_0) = y'''|_{x=x_0}$$

и т.д. Остается лишь определить область сходимости полученного ряда.

При решении линейных дифференциальных уравнений удобнее находить коэффициенты разложения решения методом неопределенных коэффициентов.

Пример 8.1. Найти решение задачи Коши

$$y'' = -yx^2, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$$

Решение. Полагаем решением ряд

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots.$$

Из начальных условий имеем $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Подставляем разложение в обе части уравнения и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + 6\cdot 5a_6x^4 + 7\cdot 6a_7x^5 + 8\cdot 7a_8x^6 +$$

$$+9\cdot 8a_9x^7 + 10\cdot 9a_{10}x^8 + 11\cdot 10a_{11}x^9 + 12\cdot 11a_{12}x^{10} + \ldots =$$

$$= -x^2 - a_2x^4 - a_3x^5 - a_4x^6 - a_5x^7 - a_6x^8 - a_7x^9 - a_8x^{10} - a_9x^{11} -$$

$$-a_{10}x^{12} - a_{11}x^{13} - \ldots,$$

тогда

$$2a_2 = 0; \quad 6a_3 = 0; \quad 4\cdot 3a_4 = -1; \quad 5\cdot 4a_5 = 0;$$

$$6\cdot 5a_6 = -a_2; \quad 7\cdot 6a_7 = -a_3; \quad 8\cdot 7a_8 = -a_4; \quad 9\cdot 8a_9 = -a_5;$$

$$10\cdot 9a_{10} = -a_6; \quad 11\cdot 10a_{11} = -a_7; \quad 12\cdot 11a_{12} = -a_8; \quad \ldots.$$

Откуда

$$a_2 = 0; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = -\frac{1}{3\cdot 4} = -\frac{1}{12}; \quad a_5 = 0; \quad a_6 = 0; \quad a_7 = 0;$$

$$a_8 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}; \quad a_9 = 0; \quad a_{10} = 0; \quad a_{11} = 0;$$

$$a_{12} = -\frac{1}{34\cdot 78\cdot 11\cdot 12}.$$

Таким образом,

$$y = 1 - \frac{1\cdot 2}{4!}x^4 + \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6}{8!}x^8 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10}{12!}x^{12} + \ldots +$$

$$+(-1)^{4k}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6...(4k-3)(4k-2)}{(4k)!}x^{4k}+\ldots$$

Исследуем сходимость по признаку Даламбера, найдом радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2...(4k-2)(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)(4k)!}{(4k)!\cdot 1\cdot 2...(4k-2)(4k+1)(4k+2)}=\infty.$$

Ряд сходится при всех значениях x. Значит, решение верно.

§9. Тригонометрические ряды Фурье. Гармонический анализ

Для описания периодических процессов, часто встречающихся в технике, например, колебания, вибрация, возвратно-поступательное движение деталей механизмов, удобны функции, обладающие свойством периодичности. Это хорошо известные тригонометрические функции — $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Хорошо известны и простейшие модификации этих функций с помощью постоянных: амплитуды A, частоты ω, начальной фазы α. Например, $A\sin(\omega x+\alpha)$ или, что равносильно, $a\cos\omega x+b\sin\omega x$. Эта, так называемая, простая гармоника имеет период $\frac{2\pi}{\omega}$.

Для целых значений частоты $\omega=n$ и различных α получаем набор простых гармоник:

$$\begin{array}{l}
a_1\cos x+b_1\sin x,\\
a_2\cos 2x+b_2\sin 2x,\\
a_3\cos 3x+b_3\sin 3x,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_n\cos nx+b_n\sin nx,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}$$

при $n=0$ имеем a_0.

Сложные периодические процессы, как правило, не могут быть описаны одной или несколькими простыми гармониками. Отсюда и возникает задача — разложить периодическую функцию $f(x)$ в ряд простых гармоник. Это и есть суть термина «гармонический анализ».

Итак, пусть периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции на отрезке $[-\pi;\pi]$, т.е. является суммой этого ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Достаточным условием представимости функции $f(x)$ рядом Фурье сформулированы в следующей теореме.

Теорема 9.1 [условие Дирихле]. **Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π — кусочно монотонна и ограничена на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева.**

Как следует из теоремы 9.1, класс функций, представимых рядом Фурье, достаточно широк.

Остается разработать механизм построения коэффициентов ряда. Предварительно вычислим несколько несложных определенных интегралов (m, n — целые положительные числа).

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, & (n \neq 0) \\ x|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi. & (n = 0) \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \begin{cases} -\left.\dfrac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, & (n \neq 0) \\ 0. & (n = 0) \end{cases}$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ \pi. & (m = n) \end{cases}$$

$$I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ \pi. & (m = n) \end{cases}$$

$$I_5 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)\, dx = 0.$$

Если искомый ряд сходится равномерно, то допустимо его почленное интегрирование в пределах от $-\pi$ до π, что с учетом вычисленных интегралов I_1 и I_2 дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \left(a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\, dx + b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\, dx\right) +$$

$$+\left(a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\, dx + b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\, dx\right) + \ldots = \pi a_0.$$

Умножая равенство $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ на $\cos nx$ и интегрируя почленно от $-\pi$ до π с учетом интегралов I_1, I_3, I_5, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx +$$

$$+\left(a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\, dx + b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos nx\, dx\right) +$$

$$+\left(a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\, dx + b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos nx\, dx\right) + \ldots = \pi a_n,$$

т.к. только один из интегралов правой части вида $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\, dx$ не равен нулю при $m = n$.

Аналогично, умножая это равенство на $\sin nx$ и интегрируя на отрезке $[-\pi;\pi]$ и учитывая значения интегралов I_2, I_4, I_5, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \pi b_n.$$

Таким образом, получим три формулы для коэффициентов ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Пример 9.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in [-\pi; \pi]$ с периодом 2π.

Решение. Функция кусочна монотонна и ограничена.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right] = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right] = -\frac{1}{\pi}\cdot 2\frac{\pi\cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n};$$

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \dots\right].$$

Пример 9.2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Решение.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\frac{1}{n} + \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{1}{n}\right] = \frac{2}{\pi n}(\cos\pi n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ четное},\\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ нечетное}; \end{cases} \qquad b_n = 0;$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \ldots\right].$$

Замечание 9.1. [об интегралах от четных, нечетных и периодических функций] Для упрощения вычислений интегралов при нахождении коэффициентов ряда Фурье напомним некоторые свойства интегралов от четных, нечетных и периодических функций:

1) интеграл по симметричному промежутку

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{c} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) - \text{четная},\\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная}; \end{cases}$$

2) если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx,$$

каково бы ни было число λ.

С учетом четности или нечетности разлагаемой функции $f(x)$ формулы коэффициентов Фурье принимают вид:

а) в случае четности $f(x)$:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0. \end{cases}$$

б) в случае нечетности $f(x)$:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \end{cases}$$

Значит, четные функции содержат в разложении в ряд Фурье только косинусы, а нечетные — только синусы.

Замечание 9.2. [о разложении функций с периодом $2l$] Приведем еще обобщенный вид формул Фурье и ряда Фурье в случае периодичности функции $f(x)$ с периодом $2l$, вообще говоря, отличным от 2π:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Замечание 9.3. [о разложении непериодических функций] Если функция $f(x)$ кусочно монотонна и ограничена на отрезке $[a, b]$, то ее можно представить рядом Фурье, сходящимся к этой функции на отрезке $[a, b]$. Для этого данную функцию достроим (продолжим) до периодической с периодом $2l$, включающим отрезок $[a, b]$ и совпадающей с данной функцией на $[a, b]$ (рис. 1). Тогда для этой функции

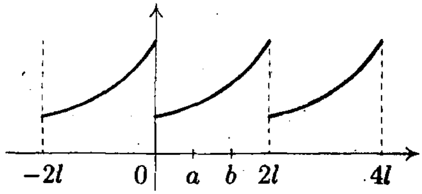

Рис. 1

существует разложение в ряд Фурье, сходящийся к $f(x)$ в точках отрезка $[a, b]$.

В частности, рассмотрим случаи четного или нечетного продолжения данной функции и построение разложения по косинусам или по синусам соответственно.

Пример 9.3. Разложить по косинусам $f(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$.

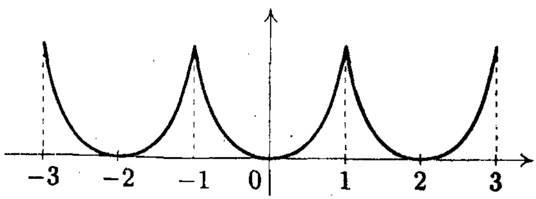

Рис. 2

Решение. Продолженная на всю числовую ось функция $f_1(x)$ определана как $f_1(x) = x^2$, $x \in [-1; 1]$, далее с периодом 2 ($l = 1$) (рис. 2). Находим коэффициенты ряда Фурье и строим разложение:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\,dx = 2\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = 2\int\limits_0^1 x^2\cos\pi n x\,dx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi^2}, \text{ если } n \text{ четное,} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi^2}, \text{ если } n \text{ нечетное;} \end{cases}$$

$$b_n = 0;$$

$$f_1(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}\left(-\cos\pi x + \frac{1}{4}\cos 2\pi x - \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x + \ldots\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x.$$

Пример 9.4. Разложить эту же функцию $f(x) = x^2$ по синусам.

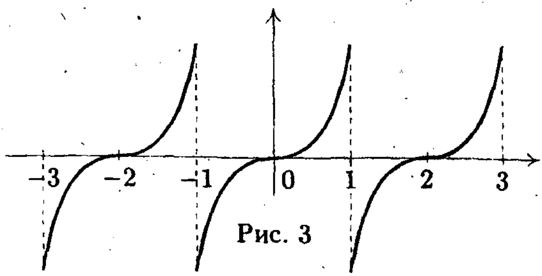

Рис. 3

Решение. Продолжим $f(x)$ нечетным образом на промежуток $[-1; 0)$ и периодически на всю числовую ось (рис. 3). Тогда

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = 2\int_0^1 x^2 \sin\pi n x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos n\pi - \frac{2}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n\pi}, \text{ если } n \text{ четное,} \\ \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{4}{n^3\pi^3}, \text{ если } n \text{ нечетное;} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{4}{\pi^3}\right)\sin\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x + \ldots$$

Замечание 9.4. [комплексная форма ряда Фурье] Используя известные связи между показательными и тригонометрическим функциями — формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

и следствия

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = -i\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2},$$

которые при $y = nx$ имеют вид

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = -i\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2},$$

ряд Фурье можно представить в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}.$$

Для получившихся комплексных коэффициентов вводятся обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n},$$

тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

или, считая, что n пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, запись разложения можно сделать еще компактнее:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Это и есть комплексная форма ряда Фурье.

Формулы для коэффициентов c_n получаются из формулы коэффициентов Фурье a_0, a_n, b_n подстановкой в равенство $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, т.е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Аналогично строится комплексная форма разложения в ряд и формулы коэффициентов для функции $f(x)$ с периодом $2l$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}dx.$$

Пример 9.5. Разложить в ряд Фурье $f(x) = x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, период 2π.

Решение.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$c_{n\,(n\neq 0)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{x}{in}e^{-inx}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{n^2} + \frac{ix}{n}\right)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{i}{n}\cos n\pi = \frac{(-1)^n i}{n};$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n9^n(x-1)^{2n}}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$;

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

2. Разложить функцию в ряд Маклорена, используя «табличные» разложения:

1) $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$;

2) $2x\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-x$;

3) $\dfrac{7}{12+x-x^2}$;

4) $\ln(1-x-6x^2)$;

5) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

6) $\dfrac{\sin x}{x}-\cos 3x$.

3. Вычислить интегралы с точностью до 0,001:

1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^{0,5} x\ln(1+x^2)\,dx$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{0,8} \frac{dx}{1+x^5}$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}/3} x^3\operatorname{arctg} x\,dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_0^{0,5} \sin(2x^2)\,dx$.

4. Функцию $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ разложить в ряд косинусов на интервале $(0;\pi)$.

5. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} x; & x\in(-1;1);\\ 0; & x\in(-2;-1]\cup[1;2]\end{cases}$$

с периодом 4.

6. Найти области сходимости функциональных рядов:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 7^n}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(4n-3)x^n}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!x^n}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot n^2\cdot(x-3)^n$.

7. Разложить функции в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$. Указать области сходимости полученных рядов:

1) $\sqrt[4]{16-3x}$, $x_0=0$;

2) $\dfrac{\arcsin x}{x}-1$, $x_0=0$;

3) $(e^{-x}-1)^2$, $x_0=0$;

4) $\sin(x^2-6x+13)$, $x_0=3$;

5) $\ln(18x^2-9x+1)$, $x_0=0$.

8. Найти приближенные решения дифференциальных уравнений в виде разложения в ряд по степеням x до 5-го порядка включительно:

1) $y'' - (x^2 + x + 1)y' + (x + 1)y = e^{-x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$;
2) $y'' - (x^2 - 2x - 1)y' + x^2 y = \sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;
3) $2y'' + (x - 1)(x + 2)y' + (x + 2)y = x^3$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$.

9. Разложить функции в ряд Фурье в интервале $(a; b)$:

1) $x + 1$ в $(-\pi; \pi)$;
2) $3x - 4$ в $(-2; 2)$;
3) $2x$ в $(0; 1)$;
4) $4 - |x|$ в $(-1; 1)$;
5) $2 - x$ в $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ по синусам;
6) $x - 1$ в $(0; 1)$ по косинусам;
7) $\begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ в $(1; -1)$.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1980. 432 с.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для студентов вузов. Часть 2. М.: Высш. шк. , 1986. 415 с.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука, 1978. Т.1. 456 с.; Т.2. 575 с.

4. Сборник задач по математике для втузов. Часть II. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 368 с.

5. Гусак А.А. Пособие по решению задач по высшей математике. Минск: Вышэйш. шк., 1968. 530 с.

6. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 2001. 479 с.

7. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. 304 с.

8. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2001. 376 с.

9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды: Учебник для вузов. М.: Наука, 1985. 464 с.

Оглавление