МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания к контрольным заданиям

Чебоксары
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания к контрольным заданиям

Чебоксары
2013

УДК 51(075.8)
ББК В1я73

Составители: С. К. Иванова,
С. С. Сайкин,
Г. А. Стакун,
А. П. Тарасов

Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных: метод. указания к контрольным заданиям / сост. С. К. Иванова, С. С. Сайкин, Г. А. Стакун, А. П. Тарасов. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. — 56 с.

Составлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Приведены основные теоретические сведения по дифференцированию функций одной и нескольких переменных и методы применения производных в исследовании функций. Рассмотрены примеры решения основных прикладных задач, предложены контрольные задания.

Для студентов I курса заочного отделения технических факультетов.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук, доцент С. С. Сайкин

Утверждено Учебно-методическим советом университета

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания к контрольным заданиям

Редактор *Е. Н. Григорьева*
Компьютерный набор и верстка *В. Г. Сытина*

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 07.03.2013. Формат 60×84/16. Бумага газетная.
Гарнитура Журнальная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,2. Тираж 300 экз. Заказ № 135.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15

Общие указания

Настоящее издание является продолжением серии методических указаний для студентов-заочников, начатой с брошюры «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ» (сост. В. Г. Агаков, А. Н. Быкова и др., 2011), содержащей материал первых трех контрольных работ первого семестра I курса.

В настоящей брошюре содержится вспомогательный материал и задания контрольных работ 4, 5 и 6.

Во время выполнения контрольных работ рекомендуется придерживаться следующих правил:

1) студент должен выполнять контрольных задания по варианту, номер которого совпадает с последними двумя цифрами его учебного номера перед буквой З;

2) контрольную работу следует выполнять в тетради, отдельной для каждой работы;

3) на обложке работы должны быть ясно прописаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы;

4) решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях;

5) перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие;

6) после получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты, не заштриховывая их, а выписывая на оставшихся свободных страницах той же тетради.

1. Производная и ее приложения

1.1. Производные

Литература: [2. Т. 1, гл. III, § 1–24].

Рассмотрим функцию $y(x)$, непрерывную на некотором промежутке. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция $y(x)$ получит приращение

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x).$$

Определение 1. ***Производной*** *данной функции $y(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.*

Производная **обозначается** следующим образом:

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

По определению,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Таблица производных основных элементарных функций:

1) $(C)' = 0$;
2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$;
3) $(e^x)' = e^x$;
4) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a \neq 1$;
5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
7) $(\sin x)' = \cos x$;
8) $(\cos x)' = -\sin x$;
9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$;
11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
18) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Правила дифференцирования:

1) $\left[u(x) \pm v(x)\right]' = u(x)' \pm v(x)'$;

2) $\left[u(x)v(x)\right]' = u(x)v(x)' + u(x)v(x)'$;

3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u(x)'v(x) - u(x)v(x)'}{v(x)^2}$;

4) дифференцирование сложной функции $y = f[u(x)]$:

$$y'_x = f'_u u'_x;$$

5) дифференцирование обратной функции:

$$y = f(x) \ \leftrightarrow \ x = \varphi(y), \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ или } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)};$$

6) дифференцирование функции, заданной параметрически в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

7) дифференцирование функции, заданной неявно в виде $F(x, y) = 0$. Дифференцируем обе части равенства по x, учитывая, что $y = y(x)$, т.е. $F[x, y(x)]' = 0$. Получившееся равенство является линейным уравнением относительно $y'_x(x)$, из него находим y'_x;

8) логарифмическое дифференцирование. Для некоторых функций, например, вида $y(x) = u(x)^{v(x)}$, удобно применить следующее правило*:

$$y'_x = y(x)(\ln y(x))'.$$

В ходе выполнения этой операции сначала производится действие в скобках — логарифмирование, а затем дифференцирование, тогда производная функции $y = u(x)^{v(x)}$ находится следующим образом:

$$y' = y(\ln u^v)' = y(v \ln u)' = y\left(v' \ln u + v\frac{1}{u}u'\right) = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u}u'\right).$$

Определение 2. ***Производной n-го порядка*** *от функции $y(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка.*

Обозначения производной n-го порядка: $y^{(n)}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

По определению,

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}(x)\right]'.$$

*Это правило получено из формулы дифференцирования сложной логарифмической функции: $[\ln y(x)]' = y'(x)/y(x)$.

Пример 1. Вычислить производные от заданных функций.

В процессе нахождения производных от заданных функций в первую очередь необходимо установить тип функции. Затем, в зависимости от сложности функции, применяем соответствующую формулу и правила дифференцирования.

а) $y = \sqrt{x - \sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}}$.

Решение. Данная функция задана явно, по структуре является сложной. Применяя формулу производной от сложной функции и правила дифференцирования, получаем:

$$y' = \left(\sqrt{x - \sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x - \sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}}}\left(1 - \frac{1 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{2\sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}}\right) = \frac{2\sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} - 1}{4\sqrt{x - \sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}}\sqrt{x + x^{\frac{1}{3}}}};$$

б) $y = \dfrac{\arcsin(4x)}{1 - 4x}$.

Решение. Применяя правила дифференцирования частного и сложных функций, получаем:

$$y' = \left(\frac{\arcsin(4x)}{1 - 4x}\right)' = \frac{(\arcsin(4x))'(1 - 4x) - \arcsin(4x)(1 - 4x)'}{(1 - 4x)^2} =$$

$$= \frac{(1 - 4x)\dfrac{4}{\sqrt{1 - 16x^2}} + 4\arcsin(4x)}{(1 - 4x)^2};$$

в) $y = \sin\left(e^{x^2 + 3x - 2}\right)$.

Решение. Применяя формулу производной от сложной функции, получаем:

$$y' = \left[\sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)\right]' = \cos\left(e^{x^2+3x-2}\right)\left(e^{x^2+3x-2}\right)' =$$

$$= \cos\left(e^{x^2+3x-2}\right) e^{x^2+3x-2}(x^2 + 3x - 2)' =$$

$$= \cos\left(e^{x^2+3x-2}\right) e^{x^2+3x-2}(2x + 3);$$

г) $y = (\arccos x)^{\ln\sqrt{x}}$.

Решение. Данная функция является сложной: одновременно и показательной, и степенной. Следовательно, для нахождения производной от этой функции применим правило логарифмического дифференцирования:

$$y' = \left(\ln(\arccos x)^{\ln\sqrt{x}}\right)' = y\left(\ln\sqrt{x}\,\ln\arccos x\right)' =$$

$$= (\arccos x)^{\ln\sqrt{x}}\left(\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\ln\arccos x + \ln\sqrt{x}\,(\ln\arccos x)'\right) =$$

$$= (\arccos x)^{\ln\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2x}\ln(\arccos x) + \ln\sqrt{x}\,\frac{1}{\arccos x}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right);$$

д) $y^2\sin(x+y) = \operatorname{arctg}(xy)$.

Решение. В данном случае функция задана неявно. Продифференцируем заданную функцию с учетом того, что $y = y(x)$:

$$y^2\sin(x+y) = \operatorname{arctg}(xy) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (y^2)'\sin(x+y) + y^2[\sin(x+y)]' = \frac{1}{1+(xy)^2}(xy)' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2yy'\sin(x+y) + y^2\cos(x+y)(1+y') = \frac{y+xy'}{1+(xy)^2}.$$

Рассматривая это равенство как уравнение относительно y', получаем производную:

$$y'\left(2y\sin(x+y) + y^2\cos(x+y) - \frac{x}{1+x^2y^2}\right) =$$

$$= \frac{y}{1+x^2y^2} - y^2\cos(x+y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{y - y^2\cos(x+y)(1+x^2y^2)}{[2y\sin(x+y) + y^2\cos(x+y)](1+x^2y^2) - x};$$

е) $y = \ln(e^x\cos x)$. Найти также вторую производную $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} \equiv y'_x = [\ln(e^x\cos x)]' = \frac{1}{e^x\cos x}(e^x\cos x)' =$$

$$= \frac{e^x\cos x + e^x(-\sin x)}{e^x\cos x} = 1 - \operatorname{tg} x;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(1-\operatorname{tg} x) = (1-\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x};$$

ж) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(t^2-1), \\ y = \ln(t^2-1). \end{cases}$ Найти также $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} \equiv y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{2t}{t^2-1}}{\dfrac{2t}{1+(t^2-1)^2}} = \frac{1+(t^2-1)^2}{t^2-1} = \frac{1}{t^2-1} + t^2 - 1.$$

Получим формулу производной второго порядка от функции, заданной параметрически:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d(y'_x)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{d(y'_x)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Таким образом,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{1}{t^2-1} + t^2 - 1\right)'_t}{\dfrac{2t}{1+(t^2-1)^2}} =$$

$$= \frac{2t[(t^2-1)^2-1][(t^2-1)^2+1]}{(t^2-1)^2 2t} = (t^2-1)^2 - \frac{1}{(t^2-1)^2}.$$

1.2. Формула Тейлора и ее применение

Формула Тейлора

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + ... + \frac{y^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n + R_n, \qquad (1.1)$$

где R_n — остаточный член. Распространенной является запись **остаточного члена в форме Лагранжа:**

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \leqslant \xi \leqslant a. \qquad (1.2)$$

С помощью формулы (1.1) можно вычислить приближенные значения функции $y(x)$, если известны значения этой функции и ее производных до порядка n в «начальной» точке $x = a$ и удается оценить остаточный член R_n.

Так, если известно, что на отрезке, которому принадлежит значение x, $|y^{(n+1)}(\xi)| < M$, то

$$|R_n| = \frac{|y^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} < \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$$

и, следовательно, в качестве оценки R_n можно взять любую величину, удовлетворяющую условию

$$\frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \alpha_0. \tag{1.3}$$

Отбросив из формулы (1.1) остаточный член R_n, получим приближенную формулу, по которой производят приближенные вычисления функции:

$$y(x) \approx y(a) + y'(a)(x-a) + \ldots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{1.4}$$

Условие (1.3) можно использовать и для определения числа n, если погрешность α_0 задана ранее, но надо иметь в виду, что условие (1.3) определяет погрешность формулы (1.4). Так, если вычислять по формуле (1.4) приближенное значение $y(x)$ при конкретном числовом значении x, то может оказаться, что слагаемые (по крайней мере, некоторые) вычисляются приближенно, и тогда погрешность результата вычислений будет представлять собой сумму погрешностей слагаемых и погрешности формулы (1.4). Так, если вести вычисления всех слагаемых с одинаковой погрешностью α_0, которая является и погрешностью формулы (1.4), то общая погрешность значения, вычисленного по формуле (1.4), будет составлять $\beta = (n+2)\alpha_0$. В случае, если заранее задана точность результата α, надо подобрать α_0 так, чтобы обеспечить выполнение неравенства

$$(n+2)\alpha_0 \leqslant \alpha,$$

откуда

$$\alpha_0 < \frac{\alpha}{n+2}. \tag{1.5}$$

При достаточно малом числе членов (при $n \leqslant 8$) условие (1.5) будет выполняться, если положить

$$\alpha_0 = 10^{-1}\alpha. \tag{1.6}$$

Обычно точность вычислений задается в виде $\alpha = 10^{-m}$. Условие (1.6) показывает, что $\alpha_0 = 10^{-(m+1)}$. Это значит, что вычисления необходимо производить с одним запасным знаком. Условие (1.3), которое можно использовать для определения числа n, в этом случае принимает следующий вид:

$$|R_n| < 10^{-1}\alpha. \tag{1.7}$$

Замечание. Установлено, что один запасной знак обеспечивает требуемую точность при $n \leqslant 8$. Практически это будет верно и при значительно бо́льшем числе членов. Легко заметить, что два запасных знака обеспечивают требуемую точность при $n \leqslant 98$. К тому же значения функции и ее производных в точке $x = a$ обычно бывают известны с абсолютной точностью, поэтому два первых члена в формуле (1.4) абсолютно точны и, следовательно, при одном запасном знаке требуемая точность обеспечивается более чем при девяти членах.

Пример 2. Применив формулу Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа в функции $y = e^x$, вычислить с точностью до 0,001 значения $e^{0,1}$ и $e^{0,2}$. Методом линейной интерполяции вычислить приближенное значение $e^{0,14}$.

Решение. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $y = e^x$ имеет следующий вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда получаем

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}. \tag{1.8}$$

Значения $x_1 = 0{,}1$ и $x_2 = 0{,}2$ принадлежат отрезку $[0; 0{,}5]$, следовательно, $0 < \theta x_1 < x_2 < 0{,}5$ и $e^{\theta x} < e^{0,5} < 2$;

$$|R_n| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При заданной погрешности условия (1.7) будут заведомо выполняться, если положить

$$\frac{2x^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-1}\alpha,$$

откуда

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}5 \cdot 10^{-1}\alpha. \tag{1.9}$$

Запись условия, определяющего n в виде (1.9), удобна, потому что вычисляя последовательно слагаемые в (1.8) по формулам

$$u_k = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

имеем возможность одновременно видеть, достигнута ли требуемая точность, т.е. выполнено ли условие (1.7).

Полагая $\alpha = 0{,}001$, получим из (1.9) условие

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}5 \cdot 10^{-4} \tag{1.10}$$

и при $x = 0{,}01$ имеем

$$u_0 = 1 = 1{,}0000; \quad u_1 = \frac{0{,}1}{1!} = 0{,}1 = 0{,}1000; \quad u_2 = \frac{(0{,}1)^2}{2!} = 0{,}0050;$$

$$u_3 = \frac{(0{,}1)^3}{3!} \approx 0{,}0002; \quad u_4 = \frac{(0{,}1)^4}{4!} = \frac{0{,}0001}{24} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Итак, нашли, что

$$e^{0,1} \approx u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \approx 1{,}105.$$

Условие (1.10) оказалось выполненным при $k = n+1 = 4$, т.е. при $n = 3$. Всего сохранено четыре слагаемых. Следовательно, одного запасного знака было достаточно. Аналогично вычисляется $e^{0,2} \approx 1{,}221$ (требуемая точность достигнута при $n = 4$).

В случае, если известны значения функции в двух близких точках и необходимо вычислить приближенное значение в промежутке, то применяется **метод линейной интерполяции**. Геометрически этот метод основан на замене дуги графика функции на некотором участке хордой (рис. 1.1).

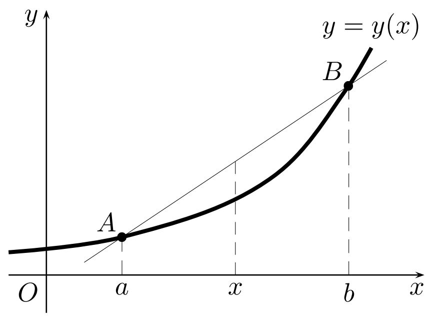

Рис. 1.1

Пусть для данной функции $y(x)$ известны два значения $y(a)$ и $y(b)$. Проведем через точки $A(a, y(a))$ и $B(b, y(b))$ прямую

$$\frac{\widetilde{y} - y(a)}{y(b) - y(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{или} \quad \widetilde{y} = y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{b - a}(x - a).$$

Полагая $y(x) \approx \widetilde{y}$, где $y(x)$ — ордината точки графика функции $y(x)$, а $\widetilde{y}$ — ордината соответствующей точки хорды, получаем формулу для приближенного значения $y(x)$:

$$y(x) \approx y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{b - a}(x - a). \tag{1.11}$$

Полагая $y(x) = e^x$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}2$, $x = 0{,}14$ и используя значения $e^{0,1} \approx 1{,}105$, $e^{0,2} \approx 1{,}221$, по формуле (1.11) линейной интерполяции получим

$$e^{0,14} \approx 1{,}105 + \frac{1{,}221 - 1{,}105}{0{,}2 - 0{,}1}(0{,}14 - 0{,}1) \approx 1{,}151.$$

1.3. Наибольшие и наименьшие значения функции

Литература: [2. Т. 1, гл. V, § 1–7].

Определение 3. *Функция $y(x)$ в точке x_1 имеет максимум, если значение функции в точке x_1 больше, чем ее значение во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1.*

Определение 4. *Функция $y(x)$ в точке x_1 имеет минимум, если значение функции в точке x_1 меньше, чем ее значение во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1.*

Функция, определенная на отрезке, может достигать максимума и минимума только при значениях x, заключенных внутри рассматриваемого отрезка. Максимумы и минимумы функции называют **экстремумами** функции.

Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума). *В случае, если дифференцируемая функция $y(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль (либо не существует в этой точке).*

Определение 5. *Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или не существует, называются* ***критическими точками****.*

Теорема 2 (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция $y(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1). Тогда, если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, функция при $x = x_1$ имеет максимум. В случае, когда при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, функция имеет в этой точке минимум.*

Теорема 3 (достаточное условие существования экстремума). *Пусть функция имеет первую производную, обращающуюся в нуль в данной точке x_1: $y'(x_1) = 0$. Пусть также существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1 вторая производная $y''(x)$, тогда при $x = x_1$ функция имеет максимум, если $y''(x_1) < 0$, и минимум, если $y''(x_1) > 0$.*

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений на отрезке:

1) определить критические точки;

2) найти значения данной функции в полученных критических точках;

3) найти значения функции на концах рассматриваемого отрезка;

4) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее и наименьшее на данном отрезке.

Пример 3. Для функции $y = x^3 - 3x + 3$ определить на отрезке $[-3; 1{,}5]$ наибольшее и наименьшее значения.

Решение. Определяем критические точки для данной функции. Для этого находим первую производную и приравниваем ее к нулю:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0.$$

Решениями данного уравнения являются $x_1 = \pm 1$, $x_2 = -1$.

Находим вторую производную для данной функции:

$$y'' = 6x.$$

Поскольку $y''(1) = 6 > 0$, то в точке $x = 1$ функция имеет минимум. Вычисляем значение функции в этой точке: $y(1) = 1$. Далее, $y''(-1) = -6 < 0$, следовательно, в точке $x = -1$ имеет место максимум. Значение функции в этой точке $y(-1) = 5$.

Определяем значения функции на концах отрезка:

$$y(1{,}5) = \frac{15}{8}; \quad y(-3) = -15.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $[-3; 1{,}5]$ есть $y(-1) = 5$, а наименьшее — $y(-3) = -15$.

Пример 4. Какие размеры необходимо придать цилиндру, чтобы при данном объеме V его полная поверхность S была наименьшей?

Решение. Обозначив через r радиус основания цилиндра и через h — высоту цилиндра, будем иметь

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Поскольку объем цилиндра задан, то при данном r величина h определяется формулой

$$V = \pi r^2 h,$$

откуда

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу для S, получаем

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}, \quad \text{или} \quad S = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right),$$

где V — заданное число.

Таким образом, мы представили S как функцию одного независимого переменного r. Найдем наименьшее значение этой функции в промежутке $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right), \quad \frac{dS}{dr} = 0 \Rightarrow 2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Следовательно, в точке $r = r_1$ функция S имеет минимум. Заметив, что $\lim\limits_{r\to 0} S = \infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty} S = \infty$, т.е. при стремлении r к нулю и бесконечности поверхность S неограниченно возрастает, приходим к выводу, что в точке $r = r_1$ функция S имеет наименьшее значение, тогда при $r = r_1$ высота цилиндра равна

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Таким образом, для того, чтобы при данном объеме V полная поверхность S цилиндра была наименьшей, высота цилиндра должна равняться его диаметру.

Контрольная работа 4

Задание 1. Найти производные от данных функций.

1.1. а) $y = \sqrt{x^2+3x} - \sqrt[3]{(6x-1)^2}$; б) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x}$; г) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $x^2\cos y - y\sin x = 0$.

1.2. а) $y = x\sqrt{1+x}$; б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} - x$;

в) $y = \operatorname{arctg}(\sin x)$; г) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\ln y = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

1.3. а) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x}$; б) $y = \cos^3(2x)$;

в) $y = x^2\arccos x - \sqrt{x+x^2}$; г) $y = x^{e^{x^2}}$;

д) $a^{xy} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = 0$.

1.4. а) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$; б) $y = 5\sqrt[5]{4x+3} - \sqrt{x^3+1} - \dfrac{1}{x}$;

в) $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$; г) $y = \sqrt[x]{\arcsin x^2}$;

д) $x + y + e^{xy} = 2$.

1.5. а) $y = \sqrt[5]{\dfrac{1-x^2}{1+x^3}}$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y = \arccos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $y\cos x + \sin(x-y) = \sin y$.

1.6. а) $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \dfrac{5}{x}}$; б) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$;

в) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$; г) $y = (\cos x)^{x^2}$;

д) $2x^2 + xy - y^3 = 0$.

1.7. а) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

д) $x\sin y - y\cos x + y^2 = 0$.

1.8. а) $y = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $y = \arccos(e^x)$; г) $y = x^{\arcsin x}$;

д) $\ln y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

1.9. а) $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg} x + x^{\frac{1}{3}}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$; г) $y = (\ln x)^x$;

д) $x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$.

1.10. а) $y = x + \sqrt[5]{\dfrac{1+x^5}{1-x^5}}$; б) $y = \operatorname{tg}^2(x^3+1)$;

в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$; г) $y = x^{\operatorname{tg} x}$;

д) $xy + \arcsin(x+y) = 0$.

1.11. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$; б) $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}$;

в) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$; г) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$;

д) $y=\arcsin(x-y)+a^{xy}$.

1.12. а) $y=(2x-1)^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{5}(x^2+3)^{-\frac{3}{4}}$; б) $y=\cos^2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$;

в) $y=a^{\sin^3 x}$; г) $y=x^{\operatorname{arctg}(x^2+1)}$;

д) $\arcsin(xy)=\cos a^{y-x}$.

1.13. а) $y=\sqrt[6]{x^2+1}-\dfrac{4x^3}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; б) $y=\sin(\cos x)$;

в) $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$; г) $y=(\sin x)^{\arccos\sqrt{x}}$;

д) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}=x^{-y}$.

1.14. а) $y=\sqrt{\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}}$; б) $y=\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$;

в) $y=x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$; г) $y=[\operatorname{arctg}(x+1)]^{\ln x}$;

д) $\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}=(x-y)^{\frac{1}{3}}$.

1.15. а) $y=\dfrac{x+1}{x-(x^3+2)^{\frac{1}{3}}}$; б) $y=\dfrac{x^2}{\operatorname{arctg}x}$;

в) $y=3^{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}$; г) $y=(\sqrt{x}a^x)^{\sqrt[3]{x}}$;

д) $y=2^y-y^{2x}+\operatorname{arctg}(x+y)$.

1.16. а) $y=\sqrt[3]{x^4-5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y=\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$; г) $y=x^{\frac{2}{x}}$;

д) $x\sin y-y\cos x=0$.

1.17. а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}-6(2+x)^{\frac{1}{3}}$; б) $y=\sin^3 2x$;

в) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; г) $y=x^{e^x}$;

д) $e^{xy}-x^2+y^2=0$.

1.18. а) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y = e^{1+\ln^2 x}$;

в) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$; г) $y = x^{\arcsin x}$;

д) $y \sin x + \cos(x-y) = \cos y$.

1.19. а) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^4}{1-x^4}}$; б) $y = \operatorname{tg} \ln \sqrt{x}$;

в) $y = 3^{\cos^2 x}$; г) $y = xe^{-x}$;

д) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$.

1.20. а) $y = \dfrac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;

в) $y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x}$; г) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $xe^y + ye^x = xy$.

1.21. а) $y = (2x-1)^{-\frac{1}{3}} + 5(x^3+2)^{-\frac{3}{4}}$; б) $y = \cos \ln^2 x$;

в) $y = (e^{\sin x} - 1)^2$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

д) $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$.

1.22. а) $y = 3\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$; б) $y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

в) $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $y = (\ln x)^x$;

д) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$.

1.23. а) $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

д) $e^{x+y} = \sin\dfrac{y}{x}$.

1.24. а) $y = \left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $y = \arcsin\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)$;

в) $y = e^{-\cos^4 5x}$; г) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 3x}$;

д) $(x+y)^2 = (x-2y)^3$.

1.25. а) $y = \dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y = e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$;

в) $y = x \operatorname{arctg}^3 5x + \ln \operatorname{tg} x$; г) $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$;

д) $y \ln x - x \ln y = x + y$.

Задание 2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для данных функций.

2.1. а) $y = \dfrac{x-1}{x+1}e^{-x}$; б) $x = t + \ln\cos t,\ y = t - \ln\sin t$.

2.2. а) $y = \operatorname{arctg} x^2$; б) $x = 2t - \sin 2t,\ y = \sin^3 t$.

2.3. а) $y = x^2 \ln x$; б) $x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t,\ y = \cos^3 t$.

2.4. а) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $x = t^5 + 2t,\ y = t^3 + 8t - 1$.

2.5. а) $y = \ln\operatorname{ctg} 4x$; б) $x = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + t,\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t}$.

2.6. а) $y = (1-x)^{\frac{2}{3}}$; б) $x = \arcsin(t^2 - 1),\ y = \arccos 2t$.

2.7. а) $y = \cos^2 x$; б) $x = t^2 + t + 1,\ y = t^3 + t$.

2.8. а) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; б) $x = \operatorname{ctg} t,\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

2.9. а) $y = xe^{-x}$; б) $x = \dfrac{2-t}{2+t^2},\ y = \dfrac{t^2}{2+t^2}$.

2.10. а) $y = \ln\ln x$; б) $x = 2\cos^3 2t,\ y = \sin^3 2t$.

2.11. а) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; б) $x = at\cos t,\ y = at\sin t$.

2.12. а) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$; б) $x = \cos\dfrac{t}{2},\ y = t - \sin t$.

2.13. а) $y = \sqrt[3]{x}(\ln x)^3$; б) $x = t + \sin\dfrac{t^2}{2},\ y = 1 - \cos\sqrt{t}$.

2.14. а) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$; б) $x = t^2,\ y = \dfrac{t^3}{3-t}$.

2.15. а) $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)^2$; б) $x = \cos(at^2),\ y = \sin(at^2)$.

2.16. а) $y = xe^{x^2-x}$; б) $x = \arccos t^2,\ y = \arcsin\sqrt[3]{t}$.

2.17. а) $y = (\operatorname{arctg} x)x^2$; б) $x = e^{2t},\ y = \sin t^2$.

2.18. а) $y = x - \operatorname{arctg} x^2$; б) $x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t,\ y = 2\ln\operatorname{ctg} t$.

2.19. а) $y = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x$; б) $x = t^2 + 1,\ y = e^{t^3}$.

2.20. а) $y = \ln\operatorname{arctg} x$; б) $x = 3\cos^2 t,\ y = 2\sin^3 t$.

2.21. а) $y = e^x \sin^3 x$; б) $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$.

2.22. а) $y = \dfrac{1}{\cos(x + \sin x)}$; б) $x = \varphi(1 - \sin\varphi)$, $y = \varphi\cos\varphi$.

2.23. а) $y = \ln\left(x \sin\sqrt{1-x^2}\right)$; б) $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}$, $y = \dfrac{1}{t^2-1}$.

2.24. а) $y = x\sqrt{1+\sin^2 x}$; б) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

2.25. а) $y = \ln\cos\operatorname{arctg}(e^x - 1)$; б) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^3}{1+t^3}$.

Задание 3. Вычислить с точностью до 0,001 значения e^a и e^b, применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $y = e^x$. Методом линейной интерполяции вычислить приближенное значение e^{x_0}.

3.1. $a = 0{,}11$; $b = 0{,}14$; $x_0 = 0{,}12$.

3.2. $a = 0{,}50$; $b = 0{,}52$; $x_0 = 0{,}51$.

3.3. $a = 0{,}14$; $b = 0{,}16$; $x_0 = 0{,}15$.

3.4. $a = 0{,}53$; $b = 0{,}55$; $x_0 = 0{,}54$.

3.5. $a = 0{,}17$; $b = 0{,}19$; $x_0 = 0{,}18$.

3.6. $a = 0{,}56$; $b = 0{,}58$; $x_0 = 0{,}57$.

3.7. $a = 0{,}20$; $b = 0{,}22$; $x_0 = 0{,}21$.

3.8. $a = 0{,}59$; $b = 0{,}61$; $x_0 = 0{,}60$.

3.9. $a = 0{,}23$; $b = 0{,}25$; $x_0 = 0{,}24$.

3.10. $a = 0{,}62$; $b = 0{,}64$; $x_0 = 0{,}63$.

3.11. $a = 0{,}26$; $b = 0{,}28$; $x_0 = 0{,}27$.

3.12. $a = 0{,}65$; $b = 0{,}67$; $x_0 = 0{,}66$.

3.13. $a = 0{,}29$; $b = 0{,}31$; $x_0 = 0{,}30$.

3.14. $a = 0{,}68$; $b = 0{,}70$; $x_0 = 0{,}69$.

3.15. $a = 0{,}32$; $b = 0{,}34$; $x_0 = 0{,}33$.

3.16. $a = 0{,}71$; $b = 0{,}73$; $x_0 = 0{,}72$.

3.17. $a = 0{,}35$; $b = 0{,}37$; $x_0 = 0{,}36$.

3.18. $a = 0{,}74$; $b = 0{,}76$; $x_0 = 0{,}75$.

3.19. $a = 0{,}38$; $b = 0{,}40$; $x_0 = 0{,}39$.

3.20. $a = 0{,}77$; $b = 0{,}79$; $x_0 = 0{,}78$.

3.21. $a = 0{,}41$; $b = 0{,}43$; $x_0 = 0{,}42$.

3.22. $a = 0{,}80$; $b = 0{,}82$; $x_0 = 0{,}81$.

3.23. $a = 0{,}44$; $b = 0{,}46$; $x_0 = 0{,}45$.

3.24. $a = 0{,}83$; $b = 0{,}85$; $x_0 = 0{,}84$.

3.25. $a = 0{,}47$; $b = 0{,}49$; $x_0 = 0{,}48$.

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = y(x)$ на отрезке $[a; b]$.

4.1. $y = \dfrac{x+16}{x^2+13}$, $[-5; 5]$.

4.2. $y = \dfrac{x}{2} + \cos x$, $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4.3. $y = \dfrac{x-3}{x^2+16}$, $[-5; 5]$.

4.4. $y = \dfrac{x}{2} - \sin x$, $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

4.5. $y = \dfrac{x+3}{x^2+7}$, $[-3; 7]$.

4.6. $y = \dfrac{x}{2} + \cos x$, $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\pi\right]$.

4.7. $y = \dfrac{x-5}{x^2+11}$, $[-3; 7]$.

4.8. $y = \dfrac{x}{2} - \sin x$, $\left[-2\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

4.9. $y = \dfrac{x-4}{x^2+9}$, $[-4; 6]$.

4.10. $y = \dfrac{x}{2} + \cos x$, $\left[-2\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

4.11. $y = x^3 - 3x + 1$, $[0; 3]$.

4.12. $y = x^5 - \dfrac{5x^3}{3} + 2$, $[0; 2]$.

4.13. $y = \dfrac{x}{2} + \cos x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4.14. $y = x^3 - 3x + 1$, $[-1; 0{,}5]$.

4.15. $y = x^5 - \dfrac{5x^3}{3} + 2$, $[-2; 0]$.

4.16. $y = \dfrac{x}{2} + \cos x$, $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4.17. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[0; 4]$.

4.18. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[-3; 1]$.

4.19. $y = x^3 - 3x + 1$, $[0{,}5; 2]$.

4.20. $y = x^5 - \dfrac{5x^3}{3} + 2$, $[-0{,}5; 3]$.

4.21. $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2; 2]$.

4.22. $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0; 4]$.

4.23. $y = \sin 2x - x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4.24. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $[0; 3]$.

4.25. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задание 5. Решить задачи.

5.1. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на сжатие пропорционально площади этого сечения. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на сжатие было наибольшим?

5.2. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V, причем стоимость квадратного метра материала, из которого изготавливается дно бака, равна p_1 р., а идущего на стенки — p_2 р. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

5.3. В прямоугольной системе координат через точку $(1; 2)$ проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

5.4. Из полосы жести шириной 11 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

5.5. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим?

5.6. В прямоугольной системе координат через точку $(1;4)$ проведена прямая, пересекающаяся с положительными полуосями координат. Написать уравнение прямой, если сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, принимает наименьшее значение.

5.7. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

5.8. Из полосы жести шириной 30 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

5.9. Стрела прогиба балки прямоугольного поперечного сечения обратно пропорциональна произведению ширины этого сечения на куб его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, с наименьшей стрелой прогиба (наибольшей жесткости)?

5.10. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

5.11. Из бревна, имеющего форму усеченного конуса, надо вырезать балку в форме параллелепипеда, поперечное сечение которого представляет собой квадрат, а ось совпадает с осью бревна. Найти размеры балки, при которых объем ее будет наибольшим, если диаметр бóльшего основания бревна равен 5 дм, меньшего — 4 дм, длина бревна (считая по оси) — 6 м.

5.12. Сосуд, состоящий из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой, должен вмещать 18 л воды. Найти размеры сосуда, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала.

5.13. Какова должна быть сторона основания правильной треугольной призмы данного объема V, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

5.14. Полоса жести шириной a должна быть согнута в виде открытого желоба так, чтобы поперечное сечение желоба имело форму кругового сегмента. Каким должен быть центральный угол, опирающийся на этот сегмент, для того чтобы вместимость желоба была наибольшей?

5.15. Круговой сектор имеет данный периметр l. Каков должен быть радиус сектора для того, чтобы площадь сектора была наибольшей?

5.16. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки объемом V. Найти высоту цилиндра и радиус, при которых на ведро уйдет наименьшее количество материала.

5.17. Какова должна быть высота равнобедренного треугольника, вписанного в окружность диаметра d, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

5.18. На оси параболы $x^2 = 12y$ на расстоянии 7 единиц от вершины в сторону вогнутости параболы дана точка P. Найти на параболе точку, ближайшую к точке P.

5.19. На странице книги печатный текст (вместе с промежутками между строками) должен занимать 216 см^2. Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, правое и левое — 2 см. Каковы должны быть размеры страницы для того, чтобы ее площадь была наименьшей?

5.20. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна 300 см. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

5.21. Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

5.22. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

5.23. В точках A и B, расстояние между которыми равно a, находятся источники света соответственно с силами F_1 и F_2. На отрезке AB найти наименее освещенную точку.

Примечание. Освещенность точки источником света силой F обратно пропорциональна квадрату расстояния r ее от источника света:

$$E = \frac{kF}{r^2}, \quad k = \text{const}.$$

5.24. Найти высоту прямого круглого конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

5.25. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

2. Приложения дифференциального исчисления

2.1. Исследование функций с помощью пределов и производных

Литература: [2. Т. 1, гл. V, § 1–5, 9–11].

Общий план исследования функций:

1. *Определение естественной области существования* функции $y = f(x)$.

2. *Классификация точек разрыва.* Осуществляется через вычисление односторонних пределов в точках разрыва и на концах области определения функции. При этом, если какой-либо из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ обращается в ∞, то точка $x = a$ является точкой разрыва второго рода, а прямая $x = a$ — вертикальной асимптотой графика функции.

3. *Нахождение интервалов возрастания и убывания функции и экстремумов.* Согласно геометрическому смыслу производной известно, что там, где $y'(x) > 0$, функция возрастает, а там, где $y'(x) < 0$, — убывает. В соответствии с этим составляем неравенства и, решив их, находим промежутки возрастания и убывания. Найденные при этом точки, в которых функция определена и непрерывна, а знаки производной слева и справа различны, являются точками локального экстремума (max) и (min). Кроме того, вид экстремума в точке, где выполнено необходимое условие его существования ($y'(x_0) = 0$), может быть определен по знаку 2-й производной, а именно: если $y''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума; если $y''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.

4. *Определение направления выпуклости графика функции.* На интервалах значений переменной x, где $y''(x_0) > 0$, график функции выпуклый вниз, а там, где $y''(x_0) < 0$, — выпуклый вверх. В соответствии с этим составляются и решаются вышеуказанные неравенства. Точки, в которых вторая производная обращается в нуль, а при переходе через нее меняет знаки, называются **точками перегиба** графика функции.

5. *Нахождение асимптот графика функции.* Наряду с вертикальными асимптотами, определенными в пункте 2, график может иметь и наклонные асимптоты с уравнениями $y = kx + b$,

параметры которого находятся по формулам

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx). \tag{2.1}$$

6. На основании проведенного исследования *строится график функции*.

Пример 1. Исследовать методом дифференциального исчисления функцию

$$y = \frac{x^2 + 20}{x - 4}$$

и, используя результаты исследования, построить ее график.

Решение. 1. Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, за исключением точки $x = 4$, т.е. $D(y) = \{x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)\}$.

2. Исследование поведения функции в окрестности точки разрыва $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \to 4+0} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = +\infty.$$

Значит, точка $x = 4$ является для данной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 4$ — вертикальной асимптотой графика.

3. Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю:

$$y'(x) = \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2}; \quad \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2} = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -2, \, x_2 = 10.$$

Решив полученное уравнение, исследуем знак производной, т.е. решив неравенства $y' > 0$ или $y' < 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x+2)(x-10)}{(x-4)^2} > 0, \\[2ex] \dfrac{(x+2)(x-10)}{(x-4)^2} < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y' > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (10; +\infty), \\ y' < 0 \text{ при } x \in (-2; 4) \cup (4; 10). \end{array}\right.$$

На основании этих результатов делаем вывод, что функция $y(x)$ возрастает на интервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (10; +\infty)$ и убывает на интервалах $x \in (-2; 4) \cup (4; 10)$, $y(-2) = y_{\max} = -4$, $y(10) = y_{\min} = 20$.

4. Определим точки перегиба и направление выпуклости графика функции на интервалах. Для этого найдем вторую производную заданной функции, а также точки обращения ее в

нуль и исследуем знак этой производной:

$$y''(x) = \frac{36}{(x-4)^3}; \quad y'' \neq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} y'' > 0, \\ y'' < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{36}{(x-4)^3} > 0, \\ \dfrac{36}{(x-4)^3} < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y'' > 0 \text{ при } x \in (4; +\infty), \\ y'' < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 4). \end{array}\right.$$

Следовательно, точек перегиба у графика функции нет, график на интервале $x \in (4; +\infty)$ — выпуклый вверх, на интервале $x \in (-\infty; 4)$ — выпуклый вниз.

5. Выясним наличие у графика данной функции наклонных асимптот. Определим параметры уравнения асимптот $y = kx + b$ по формулам (2.1):

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+20}{x^2-4x} = 1; \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+20}{x-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+20}{x-4} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ — наклонная асимптота графика заданной функции.

6. Принимая во внимание все полученные результаты, строим график (рис. 2.1). Удобно сначала нанести асимптоты

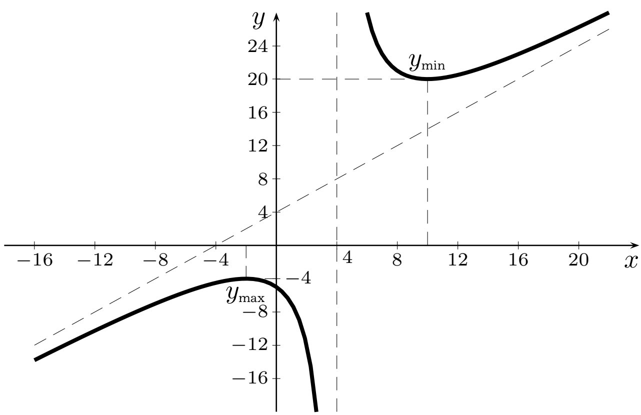

Рис. 2.1

и все замечательные точки графика, в том числе и точки пересечения с осями координат — в данном случае одна точка с координатами $(0; -5)$.

2.2. Приближенное решение уравнения методом хорд и касательных

Литература: [2. Т. 1, гл. VI, § 8].

Непосредственное нахождение действительных корней уравнения указанным методом предваряется определением количества действительных корней и отделением их.

Многочлен третьей степени может иметь от 1 до 3 действительных корней, что видно из следующих возможных схематических графиков многочлена 3-й степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (рис. 2.2).

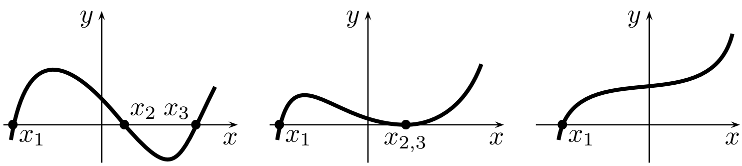

Рис. 2.2

«Отделить корни» — это значит выделить интервалы значений аргумента, содержащие только один действительный корень. Это можно сделать, исследовав знак функции $y(x)$ на участках монотонности, так как если на участке монотонности есть действительный корень, то знаки функции на его концах различны.

Для последующего нахождения корня «методом хорд и касательных» желательно найти менее трудоемкий метод, возможно, более «узкий» интервал, содержащий корень. Это можно сделать с помощью приближенного графического решения и вычислений значений функции $y(x)$ в районе этого приближенного решения.

Для графического решения представим уравнение $y(x) = 0$ в форме $y_1(x) = y_2(x)$ и построим, по возможности точно, графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Абсциссой точки пересечения графиков будет число, обращающее уравнения в числовые тождества, т.е. это действительный корень.

Метод хорд и касательных позволяет приблизиться к точному значению корня с двух сторон и оборвать вычисления, когда разность значений абсцисс точек пересечения хорды и касательной с осью Ox станет меньше требуемой точности вычисления.

Рисунки 2.3, 2.4 иллюстрируют указанные методы. Касательную к графику эффективнее строить в том конце интервала $(a; b)$, где значения первой производной $y'(x)$ больше (угол наклона касательной к оси Ox бо́льший). Так эффективнее начинать вычисления методом касательных.

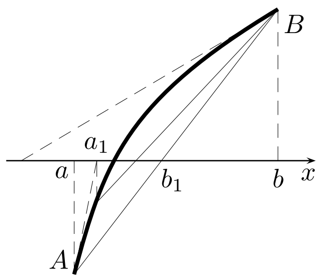

Рис. 2.3

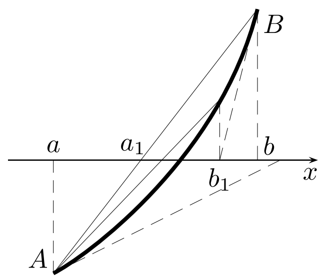

Рис. 2.4

Реализуются методы хорд и касательных формулами:
— метод хорд:

$$x_1 = \frac{ay(b) - by(a)}{y(b) - y(a)}; \tag{2.2}$$

— метод касательных:

$$x_1 = a - \frac{y(a)}{y'(a)} \quad \text{или} \quad x_1 = b - \frac{y(b)}{y'(b)}. \tag{2.3}$$

Пример 2. Определить количество действительных корней уравнения $x^3 + 10x + 10 = 0$, отделить эти корни и, применяя метод хорд и касательных, найти их приближенные значения с точностью до 0,001.

Решение. 1. *Отделение действительных корней уравнения.* В данном случае производная $y' = 3x^2 + 10$ при всех значениях x положительна, т.е. функция $y(x)$ монотонно возрастает — действительный корень один.

2. *Приближенное графическое решение.*

$$y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 10x + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -10x - 10 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}1x^3 = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = y_2(x).$$

Из графика решения (рис. 2.5) видно, что действительный корень x_1 лежит в интервале $x \in (-1; 0)$. Проведем уточняющие вычисления:

$$y(-1) = -1 - 10 + 10 = -1; \quad y(-0{,}8) = -0{,}512 - 8 + 10 = 1{,}488.$$

Значит, $x_1 \in (-1; -0{,}8)$.

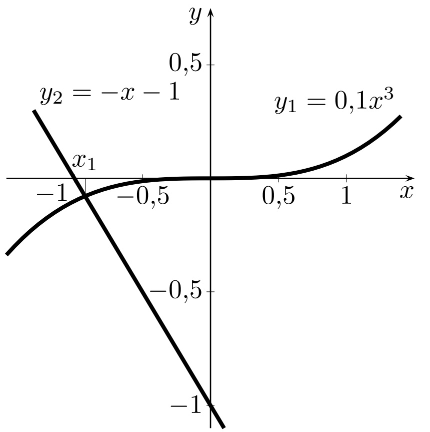

Рис. 2.5

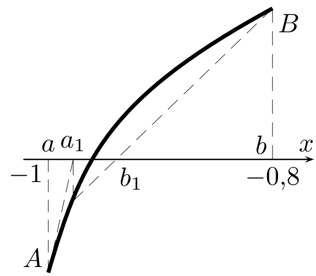

Рис. 2.6

3. *Уточнение корня методом хорд и касательных.* Подставляя в формулы (2.2) и (2.3)

$$y(x) = x^3 + 10x + 10, \quad y'(x) = 3x^2 + 10, \quad a = -1, \quad b = -0{,}8$$

и учитывая, что $y''(x) = 6x$, $y''(x) < 0$ при $x \in (a; b)$, т.е. график выпуклый вверх (рис. 2.6), в соответствии с вышесказанным начнем с вычисления приближенного значения методом касательных на конце A дуги AB:

1) метод касательных:

$$a_1 = a - \frac{y(a)}{y'(a)} = -1 + \frac{1}{13} = -0{,}9231;$$

2) метод хорд:

$$b_1 = \frac{a_1 y(b) - b y(a_1)}{y(b) - y(a_1)} = \frac{-0{,}9231 \cdot 1{,}488 - 0{,}8 \cdot 0{,}0176}{1{,}488 + 0{,}0176} = -0{,}92171;$$

3) метод касательных:

$$a_2 = a_1 - \frac{y(a_1)}{y'(a_1)} = -0{,}9231 + \frac{0{,}0176}{12{,}5563} = -0{,}92169.$$

Поскольку $|a_2 - b_1| = 0{,}00002 < 0{,}001$, то за приближенное решение с требуемой точностью можно принять среднее арифметическое этих двух приближений:

$$x_1 \approx \frac{a_2 + b_1}{2} = -0{,}9217.$$

2.3. Приложение дифференциального исчисления к геометрии в пространстве

Литература: [2. Т. 1, гл. IX, § 1–4].

Векторное уравнение кривой в пространстве:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Параметрическое уравнение кривой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Производная векторной функции по параметру

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dx}{dt}\bar{k}$$

является вектором, направленным по касательной к кривой, и, следовательно, с его помощью для некоторой точки кривой $A(x_0, y_0, z_0)$ можно записать **уравнение касательной прямой**

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{dz}{dt}} \qquad (2.4)$$

и **уравнение нормальной плоскости**

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0. \qquad (2.5)$$

Кривизна линии, заданной векторным уравнением с произвольным параметром, находится по формуле

$$\mathrm{K}^2 = \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]^2 \Bigg/ \left\{\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2\right\}^3. \qquad (2.6)$$

Здесь в числителе и знаменателе скалярные квадраты векторов.

Пример 3. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии

$$\bar{r}(t) = (t^3 - 1)\bar{i} + (t^2 + 1)\bar{j} + (4t^3 - 3t + 1)\bar{k}$$

в точке $t_0 = 1$.

Решение. Напишем уравнение данной кривой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2 + 1, \\ z = 4t^3 - 3t + 1. \end{cases}$$

Подставив $t_0 = 1$ в эти уравнения, найдем координаты нужной точки: $A(x_0 = 0, y_0 = 2, z_0 = 2)$. Далее найдем вектор касательной к кривой

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 3t^2\bar{i} + 2t\bar{j} + (12t^2 - 3)\bar{k}$$

в точке A:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = \left.3t^2\right|_{t=1} = 3; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = \left.2t\right|_{t=1} = 2;$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = \left.12t^2 - 3\right|_{t=1} = 9.$$

Подставив координаты точки A и касательного вектора в каноническое уравнение (2.4), получим искомое уравнение касательной в точке A:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{9}.$$

Уравнение нормальной плоскости, проходящей через точку A, получим в соответствии с (2.5), используя координаты точки A и координаты вектора $d\bar{r}/dt$ как нормального к плоскости:

$$3x + 2(y-2) + 9(z-2) = 0 \quad \text{или} \quad 3x + 2y + 9z - 22 = 0.$$

Проведем необходимые вычисления для нахождения кривизны по формуле (2.6):

$$\left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_A = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}; \quad \left.\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|_A = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}\right|_{t=1} =$$

$$= \left.6t\bar{i} + 2\bar{j} + 24t\bar{k}\right|_{t=1} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 24\bar{k};$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & 9 \\ 6 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 30\bar{i} - 18\bar{j} - 6\bar{k},$$

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]^2 = 30^2 + 6^2 + 18^2 = 1260;$$

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = 3^2 + 2^2 + 9^2 = 94, \quad \left\{\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2\right\}^3 = 94^3 = 829644;$$

$$\text{K} = \sqrt{\frac{1260}{829644}} \approx 0{,}03897.$$

Контрольная работа 5

Задание 1. Исследовать методом дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

1.1. а) $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1.2. а) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $y = xe^{-x^2}$.

1.3. а) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; б) $y = e^{2x-x^2}$.

1.4. а) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; б) $y = x^2 - 2\ln x$.

1.5. а) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y = \ln(x^2-4)$.

1.6. а) $y = \dfrac{4x^3+5}{x}$; б) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$.

1.7. а) $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$; б) $y = \ln(x^2+1)$.

1.8. а) $y = \dfrac{x^4}{x^3+1}$; б) $y = (2+x^2)e^{-x^2}$.

1.9. а) $y = \dfrac{4x^3}{x^3-1}$; б) $y = \ln(9-x^2)$.

1.10. а) $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; б) $y = (x+1)e^{3x+1}$.

1.11. а) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; б) $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1.12. а) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y = xe^{-x}$.

1.13. а) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1.14. а) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

1.15. а) $y = \dfrac{x}{3-x^2}$; б) $y = x\ln x$.

1.16. а) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y = \ln(2x^2+3)$.

1.17. а) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$; б) $y = x^3 e^{-x}$.

1.18. а) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$; б) $y = \dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1.19. а) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$.

1.20. а) $y = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$; б) $y = x - \operatorname{arctg} x$.

1.21. а) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y = xe - \frac{x^2}{2}$.

1.22. а) $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$; б) $y = x^2 e^{-x}$.

1.23. а) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$; б) $y = \sqrt{e^{x^2}-1}$.

1.24. а) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \ln x - \dfrac{x^2}{2}$.

1.25. а) $y = \dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Задание 2. Определить количество действительных корней уравнения, отделить эти корни и, применяя метод хорд и касательных, найти их приближенные значения с точностью до 0,001.

2.1. $x^3+5x+7=0$.

2.2. $x^3+4x+6=0$.

2.3. $x^3+x+3=0$.

2.4. $x^3+2x-11=0$.

2.5. $x^3+x+1=0$.

2.6. $x^3+x-1=0$.

2.7. $x^3+x-4=0$.

2.8. $x^3+6x-1=0$.

2.9. $x^3+2x+4=0$.

2.10. $x^3+4x+8=0$.

2.11. $x^3+3x-1=0$.

2.12. $x^3+2x-5=0$.

2.13. $x^3+2x-10=0$.

2.14. $x^3+x-3=0$.

2.15. $x^3+2x+1=0$.

2.16. $x^3+2x-4=0$.

2.17. $x^3-x+7=0$.

2.18. $x^3+2x+2=0$.

2.19. $x^3 + x + 4 = 0.$

2.20. $x^3 + 5x - 1 = 0.$

2.21. $x^3 - 4x - 2 = 0.$

2.22. $x^3 - 3x - 5 = 0.$

2.23. $x^3 + 3x + 2 = 0.$

2.24. $x^3 + 3x - 2 = 0.$

2.25. $x^3 + 3x + 3 = 0.$

Задание 3. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\bar{r} = \bar{r}(t)$ в точке t_0.

3.1. $\bar{r}(t) = (t - \sin t)\bar{i} + (1 - \cos t)\bar{j} + 2\sin t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

3.2. $\bar{r}(t) = 2\sin t\,\bar{i} + 3\operatorname{tg} t\,\bar{j} + 2\cos t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

3.3. $\bar{r}(t) = 2\sin^2 t\,\bar{i} + 2\cos^2 t\,\bar{j} + \sin 2t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

3.4. $\bar{r}(t) = e^{-t}\bar{i} + e^{t}\bar{j} + t\,\bar{k};\quad t_0 = 0.$

3.5. $\bar{r}(t) = (t^3 + 8t)\bar{i} + t^2\bar{j} + (t^5 + 3t)\bar{k};\quad t_0 = 0.$

3.6. $\bar{r}(t) = 2t\,\bar{i} - 3t\,\bar{j} + \ln\operatorname{tg} t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

3.7. $\bar{r}(t) = (t^2 - 3)\bar{i} + (t^3 + 2)\bar{j} + \ln t\,\bar{k};\quad t_0 = 1.$

3.8. $\bar{r}(t) = (2t^2 - 5)\bar{i} + (t^2 + 2t)\bar{j} - \sqrt{5 - t^2}\,\bar{k};\quad t_0 = 2.$

3.9. $\bar{r}(t) = (2 - t)\bar{i} + \sqrt{25 - t^2}\,\bar{j} + t^2\bar{k};\quad t_0 = 4.$

3.10. $\bar{r}(t) = \ln(t - 3)\bar{i} + t\,\bar{j} + (t^2 - 16)\bar{k};\quad t_0 = 4.$

3.11. $\bar{r}(t) = \sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + \dfrac{t}{2\pi}\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

3.12. $\bar{r}(t) = e^{t}\cos t\,\bar{i} + e^{t}\sin t\,\bar{j} + e^{t}\bar{k};\quad t_0 = 0.$

3.13. $\bar{r}(t) = 2\sin t\,\bar{i} + \operatorname{tg} t\,\bar{j} + 2\cos t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

3.14. $\bar{r}(t) = \left(4 - \dfrac{t^2}{2}\right)\bar{i} + (t^3 - 2)\bar{j} + \dfrac{t^2 - 4}{t}\bar{k};\quad t_0 = 2.$

3.15. $\bar{r}(t) = 2(t - \sin t)\bar{i} + 2(1 - \cos t)\bar{j} + 3\sin t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

3.16. $\bar{r}(t) = 2e^{t}\bar{i} + 2e^{-t}\bar{j} + t\,\bar{k};\quad t_0 = 0.$

3.17. $\bar{r}(t) = (t^3 + 8t)\bar{i} + 3t^2\bar{j} + (t^5 + 3t)\bar{k};\quad t_0 = 1.$

3.18. $\bar{r}(t) = \sin\dfrac{t}{2}\bar{i} + \cos^2\dfrac{t}{2}\bar{j} + \dfrac{1}{2}\sin t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

3.19. $\bar{r}(t) = \sin 2t\,\bar{i} + \dfrac{3}{2}\operatorname{tg} 2t\,\bar{j} + \cos 2t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{8}.$

3.20. $\bar{r}(t) = \sin^2 t\,\bar{i} + \sin t\cos t\,\bar{j} + \cos^2 t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

3.21. $\bar{r}(t) = 3\sqrt{t}\,\bar{i} + (t^2 - t)\bar{j} + (3t^2 + t)\bar{k};\quad t_0 = 1.$

3.22. $\bar{r}(t) = \sqrt{10 - t^2}\,\bar{i} + (t^3 - 2t)\bar{j} + (4t - 3t^2)\bar{k};\quad t_0 = 3.$

3.23. $\bar{r}(t) = \cos 2t\,\bar{i} + 3\sin 2t\,\bar{j} + 3\operatorname{ctg} t\,\bar{k};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

3.24. $\bar{r}(t) = (t^3 - 3)\bar{i} + (t^4 + 3)\bar{j} + \ln t\,\bar{k};\quad t_0 = 1.$

3.25. $\bar{r}(t) = t^3\bar{i} - 2t\,\bar{j} + (3t^2 - 2t + 1)\bar{k};\quad t_0 = 2.$

3. Функции нескольких переменных

3.1. Частные производные

Литература: [2. Т. 1, гл. VIII, § 1, 2, 5, 6, 12].

Если каждой паре значений двух независимых друг от друга переменных x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение z, то говорят, что z есть **функция двух независимых переменных** x и y, определенная в области D, и пишут

$$z = f(x, y) \quad \text{или} \quad F(x, y, z) = 0.$$

Переменной x функции двух переменных $z = f(x, y)$ дадим приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной, и рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется **частной производной 1-го порядка** функции $z = f(x, y)$ по x и **обозначается** одним из символов:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогичным образом определяется частная производная по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных следует, что они вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования (при этом все переменные, кроме той, по которой производится дифференцирование, рассматриваются как постоянные).

Пример 1. Найти частные производные функции $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Решение. Считая y постоянной, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Считая x постоянной, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Частными производными 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных 1-го порядка и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}.$$

Пример 2. Найти частные производные 2-го порядка функции $z = x^3y^2 + x\sin y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2y^2 + \sin y)'_x = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x^3y + x\cos y)'_y = 2x^3 - x\sin y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2y^2 + \sin y)'_y = 6x^2y + \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2x^3 + x\cos y)'_x = 6x^2y + \cos y.$$

Аналогично вводятся понятия частных производных более высоких порядков.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, тогда **ε-окрестностью** точки $M_0(x_0, y_0)$ называется множество точек $M(x, y) \in D$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$. По-другому, ε-окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ называется множество внутренних точек круга радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 3. Для функции $z = x\operatorname{arctg}(y/x) - x^2 - y^2$ показать, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z + x^2 + y^2 = 0.$$

Решение. Вычислим частные производные функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) - 2x = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} - 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} - 2y = \frac{x^2}{x^2+y^2} - 2y.$$

Подставив их в дифференциальное уравнение, имеем

$$x\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} - 2x\right) + y\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - 2y\right) -$$

$$-x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 =$$

$$= x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{x^2y}{x^2+y^2} - 2x^2 + \frac{yx^2}{x^2+y^2} - 2y^2 -$$

$$-x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2x^2 + 2y^2 \equiv 0,$$

так как в левой части все выражения взаимно уничтожаются.

Определение функции двух переменных и частных производных можно обобщить на случай произвольного числа переменных.

Пусть $\mathfrak{R}^n$ — n-мерное арифметическое пространство, т.е. множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел x_1, x_2, …, x_n: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Далее, пусть множество D является подмножеством множества $\mathfrak{R}^n$, т.е. $D \subset \mathfrak{R}^n$. В случае, если каждому набору $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то говорят, что на множестве D задана функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n независимых переменных x_1, x_2, …, x_n.

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$ n независимых переменных. Придавая значению переменной x_k приращение Δx_k, а остальные переменные оставив неизменными, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Настоящий предел называется **частной производной 1-го порядка данной функции по переменной x_k** в данной точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Аналогичным образом обобщаются и производные высших порядков.

3.2. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Литература: [2. Т. 1, гл. VIII, § 7, 8].

Для функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ составим ее **полное приращение** $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой в точке $M(x, y)$**, если всюду в некоторой окрестности этой точки ее полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + o(\rho), \tag{3.1}$$

где $o(\rho)$ — бесконечно малая величина относительно

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2};$$

A_1, A_2 — некоторые числа, не зависящие от x и y.

Дифференциалом dz 1-го порядка функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz этой функции, линейная относительно Δx и Δy, т.е.

$$dz = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных x и y равны $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, и для вычисления дифференциала dz функции $z = f(x, y)$ справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{3.2}$$

Теперь формулу (3.1) можно записать в следующем виде:

$$\Delta z = dz + o(\rho). \tag{3.3}$$

Поскольку

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} o(\rho) = 0,$$

то при достаточно малых Δx и Δy можно приближенно положить $\Delta z \approx dz$, откуда имеем

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz$$

или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) применяется в приближенных вычислениях значений функций.

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке M_0 (**точке касания**) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

В случае, если уравнение поверхности имеет неявный вид $F(x, y, z) = 0$, уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)+$$
$$+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормали при этом имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

В случае, когда поверхность задана в явной форме $z = f(x, y)$, уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \qquad (3.5)$$

а уравнение нормали —

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример 4. Дана функция $z = \ln(x^2 - 3y^2)$ и точки $A(2; 1)$ и $B(2{,}02; 0{,}98)$. Требуется:

1) вычислить значение $z_1 = z(B)$ в точке B;

2) вычислить приближенное значение $\bar{z}_1$ функции в точке B исходя из значения $z_0 = z(A)$ функции в точке A, заменив приращение функции дифференциалом;

3) оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции дифференциалом;

4) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = \ln(x^2 - 3y^2)$ в точке $C(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Решение. 1. Подставим координаты $x = 2{,}02$ и $y = 0{,}98$ точки B в выражение функции $z = \ln(x^2 - 3y^2)$ и, используя таблицу логарифмов (калькулятор), вычислим

$$z = z(B) = \ln[(2{,}02)^2 - 3 \cdot (0{,}98)^2] = \ln(1{,}1992) = 0{,}1823.$$

2. Для приближенного вычисления значения $\bar{z}_1$ в точке B можно использовать формулу (3.4), так как величины $\Delta x = 0{,}22$ и $\Delta y = -0{,}02$ малы, тогда

$$z_1 = z(B) = \ln[(2{,}02)^2 - 3 \cdot (0{,}98)^2] \approx \ln(2^2 - 3 \cdot 1) + dz = \bar{z}_1.$$

Вычислив в точке A значения функции и дифференциала:

$$\ln(2^2-3)=\ln 1=0;$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2x}{x^2-3y^2}\Delta x-\frac{6y}{x^2-3y^2}\Delta y\Big|_A=$$

$$=\frac{4}{4-3}\cdot 0{,}02-\frac{6}{4-3}\cdot(-0{,}02)=0{,}2,$$

получим

$$\bar{z}_1=0+0{,}2=0{,}2.$$

3. Обозначим относительную погрешность в процентах, которая получается при замене приращения Δz дифференциалом dz, через $\delta\bar{z}_1$, тогда из определения относительной погрешности имеем

$$\delta\bar{z}_1=\frac{|\bar{z}_1-z_1|}{\bar{z}_1}\cdot 100\,\%=\frac{|0{,}2-0{,}1823|}{0{,}2}\cdot 100\,\%=8{,}85\,\%.$$

4. Предварительно вычислим координату z_0 точки C

$$z_0=\ln(x^2-3y^2)\big|_A=\ln 1=0,$$

и значения частных производных

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{2x}{x^2-3y^2}\Big|_A=4;\quad f'_y(x_0,y_0)=\frac{-6y}{x^2-3y^2}\Big|_A=-6.$$

Подставляя эти значения в формулу (3.5), получим

$$z-0=4(x-2)-6(y-1),$$

или, после преобразований, —

$$4x-6y-z-2=0.$$

Это и есть уравнение касательной плоскости в точке $C(2;1;0)$ поверхности $z=\ln(x^2-3y^2)$.

3.3. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области

Литература: [2. Т. 1, гл. VIII, § 16–18].

Функция $z=f(x,y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0,y_0)$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$, что для всех точек $M(x,y)$ из этой окрестности, отличных от точки $M(x_0,y_0)$, выполняется неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ $(f(x_0,y_0)<f(x,y))$.

Максимум и минимум функции называются **экстремумами** функции.

Точки $M_0(x_0, y_0)$, в которых производные $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ функции $z = f(x, y)$ равны 0 или терпят разрыв, называются **критическими точками** этой функции.

Пусть D — некоторая ограниченная замкнутая область плоскости независимых переменных x и y, в которой определена функция $z = f(x, y)$, а точка $M(x, y)$ — произвольная (текущая) точка этой области, тогда наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в этой области D обозначаются соответственно

$$z_{\max} = \max_{M \in D} f(x, y), \quad z_{\min} = \min_{M \in D} f(x, y).$$

Теорема 1. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области D, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений или в критической точке, или на границе области.*

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области D, необходимо:

1) найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках;

2) исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значения на границе области D, причем, если граница состоит из нескольких линий, исследование провести для каждого участка отдельно;

3) сравнить все полученные значения функции и определить наибольшее и наименьшее значения функции в области D.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4 - x$. Сделать чертеж.

Решение. По виду неравенств, определяющих область D, построим чертеж области (рис. 3.1).

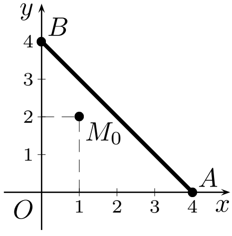

Рис. 3.1

Вычислим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8,$$

и, решив систему $\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0, \end{cases}$ определим критическую точку $M_0(1; 2)$. Данная точка принадлежит области D. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(M_0) = 1 + 8 - 2 - 16 + 5 = 4.$$

Исследуем функцию на границе области D. На отрезке OA $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, тогда функция имеет следующий вид: $z(x) = x^2 - 2x + 5$, где $0 \leqslant x \leqslant 4$. Находим наибольшее и наименьшее значения полученной функции $z(x)$ одной переменной x на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 2; \quad 2x - 2 = 0; \quad x = 1; \quad M_1(1; 0); \quad z(M_1) = 4.$$

Значения на концах отрезка OA: $z(0) = 5$; $z(4) = 13$.

На отрезке OB $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 4$, тогда функция примет следующий вид: $z(y) = 2y^2 - 8y + 5$, где $0 \leqslant y \leqslant 4$. Находим наибольшее и наименьшее значения полученной функции $z(y)$ одной переменной y на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{dz}{dy} = 4y - 8; \quad 4y - 8 = 0; \quad y = 2; \quad M_2(0; 2); \quad z(M_2) = -3.$$

Значения на концах отрезка OB: в точке $O(0; 0)$ значение уже было вычислено; $z(B) = 2 \cdot 16 - 32 + 5 = 5$.

На отрезке AB $y = 4 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, тогда функция имеет следующий вид:

$$z(x) = x^2 + 2(4 - x)^2 - 2x - 8(4 - x) + 5 = 3x^2 - 10x + 5.$$

Находим наибольшее и наименьшее значения полученной функции $z(x)$ одной переменной x на отрезке $[0; 4]$:

$$\frac{dz}{dx} = 6x - 10; \quad 6x - 10 = 0; \quad x = \frac{5}{3}; \quad M_3\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right); \quad z(M_3) = -\frac{10}{3}.$$

В точках A и B значения функции уже были найдены.

Сравнивая полученные значения функции z в критической точке M_0 области D, критических точках M_1, M_2, M_3, принадлежащих границе области, а также угловых точках O, A, B, находим

$$z_{\max} = \max_{M \in D} f(x, y) = z(A) = 13; \quad z_{\min} = \min_{M \in D} f(x, y) = z(M_0) = -4.$$

3.4. Производная по направлению и градиент функции

Литература: [2. Т. 1, гл. VIII, § 13–15].

В плоскости переменных x и y возьмем две точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ и построим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{MM_1}$. Обозначим через MM_1 расстояние между точками M и M_1.

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке M по направлению вектора $\vec{a} = \overrightarrow{MM_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \lim_{MM_1 \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{MM_1},$$

где $f(M_1)$ и $f(M)$ — значения функции $f(x, y)$ в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M(x, y)$ соответственно.

Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, т.е. координаты единичного вектора $\vec{a}_0 = \vec{a}/|\vec{a}|$, тогда, если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то производная по направлению вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{3.6}$$

В случае, когда функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, **градиентом** этой функции называется вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \tag{3.7}$$

Градиент функции $z = f(x, y)$ в каждой точке $M(x, y)$ направлен в сторону наибольшего возрастания функции, а по величине

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

дает скорость наибольшего возрастания функции.

Пример 6. Для функции $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, точки $A(1; 1)$ и вектора $\vec{a} = (3; 4)$ найти:

1) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z$ в точке A;

2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение. 1. Вычислим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + 2y}{2\sqrt{x^2 + 2xy}} = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 2y}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2xy}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y}}.$$

По формуле (3.7) находим градиент в произвольной точке:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 2xy}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2xy}}\vec{j}.$$

Определим значение этого градиента в точке $A(1; 1)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(A) = \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}.$$

2. Определим направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16} = 5; \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

Итак, $\cos\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 4/5$. Теперь по формуле (3.6) найдем производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3.5. Метод наименьших квадратов для обработки результатов эксперимента

Литература: [2. Т. 1, гл. VIII, § 19].

Пусть на основании эксперимента получено n значений y_1, y_2, … , y_n функции (процесса) y при соответствующих значениях аргумента x и результаты эксперимента оформлены в виде таблицы:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

По этой таблице требуется найти функцию

$$y = \varphi(x), \tag{3.8}$$

удовлетворяющую определенным требованиям. Вид функции определяется из теоретических и инженерных соображений.

Допустим, что вид функции (3.8) подобран следующим образом:

$$y = \varphi(x, a, b, c, ...). \tag{3.9}$$

Данная функция зависит от входящих в нее параметров a, b, c, … , которые подбирают так, чтобы функция (3.9) в каком-то смысле наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс. Одним из способов подбора этих параметров является **метод наименьших квадратов**.

Рассмотрим сумму квадратов разностей экспериментальных значений y_i и значений функции $\varphi(x, a, b, c, ...)$ в соответствующих точках:

$$S(a, b, c, ...) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, ...)]^2. \tag{3.10}$$

Подберем a, b, c, … так, чтобы эта сумма имела наименьшее значение. Таким образом, задача сводится к нахождению значений параметров a, b, c, … , при которых функция $S(a, b, c, ...)$ имеет минимальное значение. Учитывая необходимые условия экстремума функции нескольких переменных, получаем, что эти параметры должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad \dots, \tag{3.11}$$

или, в развернутом виде,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left([y_i-\varphi(x_i,a,b,c,...)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,...)}{\partial a}\right)=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}\left([y_i-\varphi(x_i,a,b,c,...)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,...)}{\partial b}\right)=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}\left([y_i-\varphi(x_i,a,b,c,...)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,...)}{\partial c}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.12)$$

Система (3.12) состоит из стольких уравнений, сколько неизвестных параметров a, b, c, $\ldots$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть функция (3.9) имеет вид

$$\varphi(x,a,b)=ax+b,$$

тогда

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2;$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial S}{\partial a}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}([y_i-(ax_i+b)]x_i)=0,\\
\dfrac{\partial S}{\partial b}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,
\end{cases}$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{cases}
a\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i),\\
a\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i.
\end{cases}\qquad(3.13)$$

Система (3.13) состоит из двух уравнений относительно двух неизвестных a и b .

2. Пусть функция (3.9) имеет вид

$$\varphi(x,a,b,c)=ax^2+bx+c,$$

тогда

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2;$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}([y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i^2) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}([y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0, \end{cases}$$

или в развернутом виде,

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i x_i^2), \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i x_i), \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \tag{3.14}$$

Система (3.14) состоит из трех линейных уравнений относительно трех параметров a, b, c.

Пример 7. Пусть экспериментально получено 5 значений функции y:

x	1	2	3	5	5
y	-4	$-0{,}5$	$0{,}5$	4	$4{,}5$

Методом наименьших квадратов найти функцию, выражающую приближенно функцию y. Построить чертеж, на котором отметить экспериментальные точки, и график полученной функции $y = f(x)$.

Решение. Покажем полученные экспериментальные значения на плоскости (рис. 3.2). По расположению точек можно судить о том, что исследуемый процесс (т.е. функция $y = \varphi(x)$) линейный:

$$\varphi(x, a, b) = ax + b.$$

Определим коэффициенты a и b по методу наименьших квадратов из системы (3.13). Предварительно вычислим:

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i y_i) = -4\cdot 1 - 0{,}5\cdot 2 + 0{,}5\cdot 3 + 4\cdot 4 + 4{,}5\cdot 5 = 35;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = -4 - 0{,}5 + 0{,}5 + 4 + 4{,}5 = 4{,}5;$$

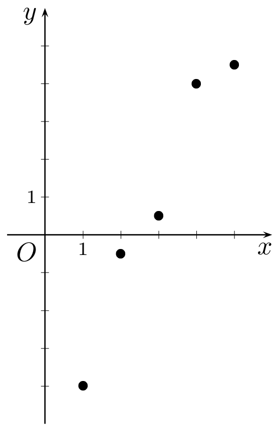

Рис. 3.2

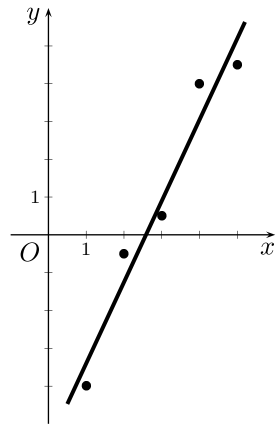

Рис. 3.3

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55; \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Теперь система (3.13) примет следующий вид:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 35, \\ 15a + 5b = 4{,}5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 2{,}15$, $b = -5{,}55$ и

$$\varphi(x, a, b) = 2{,}15x - 5{,}55.$$

Построим чертеж (рис. 3.3), где отметим экспериментальные данные и полученную прямую.

Контрольная работа 6

Задание 1. Докажите, что функция $z = f(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $F(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}) = 0$.

1.1. $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $\quad F = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y^2}$.

1.2. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $\quad F = x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$.

1.3. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$; $\quad F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.4. $z = e^{xy}$; $\quad F = x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz$.

1.5. $z = \ln(x + e^{-y})$; $F = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.6. $z = \dfrac{x}{y}$; $F = x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.7. $z = x^y$; $F = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

1.8. $z = xe^{\frac{y}{x}}$; $F = x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.9. $z = \sin(x + ay)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.10. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $F = (x - y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.11. $z = \arcsin\dfrac{x - y}{x + y}$; $F = x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.12. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $F = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

1.13. $z = \dfrac{xy}{x + y}$; $F = x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z$.

1.14. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$; $F = x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z$.

1.15. $z = \dfrac{y^2}{\sqrt{xy}}$; $F = x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.16. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.17. $z = e^{xy}$; $F = x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.18. $z = e^{-x-3y}\sin(x + 3y)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.19. $z = \dfrac{\sin(x - y)}{x}$; $F = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.20. $z = e^{\frac{y}{x}}$; $F = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.21. $z = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; $\quad F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} + xyz.$

1.22. $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\quad F = x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right).$

1.23. $z = y\cos(x-y)$; $\quad F = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y}.$

1.24. $z = x\sin\dfrac{y}{x} - x^2 - y^2$; $\quad F = x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z + x^2 + y^2.$

1.25. $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$; $\quad F = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y^2}.$

Задание 2. Дана функция $z = f(x, y)$ и точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$.

Требуется:

1) вычислить значение z_0 в точке $A(x_0, y_0)$ и z_1 в точке $B(x_1, y_1)$;

2) вычислить приближенное значение $\bar{z}_1$ функции в точке $B(x_1, y_1)$, исходя из значения z_0 в точке $A(x_0, y_0)$ и заменив приращение функции при переходе из точки A к точке B дифференциалом;

3) оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции дифференциалом;

4) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $C(x_0, y_0, z_0)$.

2.1. $z = x^y\sqrt{y}$; $\quad A(1;4)$, $\quad B(1{,}03;3{,}98)$.

2.2. $z = \sqrt[5]{x^3 + y^2 + 1}$; $\quad A(3;2)$, $\quad B(2{,}97;2{,}02)$.

2.3. $z = \ln\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$; $\quad A(1;1)$, $\quad B(0{,}98;1{,}03)$.

2.4. $z = \dfrac{x}{x^4 + y^2}$; $\quad A(2;3)$, $\quad B(2{,}03;2{,}97)$.

2.5. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y}$; $\quad A(1;1)$, $\quad B(1{,}04;0{,}98)$.

2.6. $z = \sqrt[6]{x^4 = y^5 + 15}$; $\quad A(3;2)$, $\quad B(3{,}03;1{,}98)$.

2.7. $z = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - 8)$; $\quad A(2;1)$, $\quad B(2{,}02;0{,}98)$.

2.8. $z = \dfrac{10}{x^3 - y^2}$; $\quad A(5;5)$, $\quad B(4{,}98;5{,}03)$.

2.9. $z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$; $\quad A(4;1)$, $\quad B(4{,}02;0{,}97)$.

2.10. $z = (2 - \sqrt{x})^y$; $\quad A(1;3)$, $\quad B(0{,}97;3{,}02)$.

2.11. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; $A(2;2)$, $B(1{,}92;2{,}12)$.

2.12. $z = \sqrt[3]{2x^2 - y^2 + 1}$; $A(6;3)$, $B(6{,}14;3{,}16)$.

2.13. $z = \ln\sqrt{5x^2 - y^2}$; $A(1;2)$, $B(1{,}02;1{,}85)$.

2.14. $z = x^{\sqrt{y}}$; $A(1;4)$, $B(1{,}05;3{,}94)$.

2.15. $z = \sqrt[4]{4x^2 - y^2 + 4y}$; $A(2;4)$, $B(1{,}96;4{,}16)$.

2.16. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1;2)$, $B(1{,}02;1{,}96)$.

2.17. $z = x^2 + 3xy - 6y$; $A(4;1)$, $B(3{,}96;1{,}03)$.

2.18. $z = 3x^2 - xy + x + y$; $A(1;3)$, $B(1{,}06;2{,}92)$.

2.19. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; $A(2;3)$, $B(2{,}02;2{,}97)$.

2.20. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; $A(2;1)$, $B(1{,}96;1{,}04)$.

2.21. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; $A(2;4)$, $B(1{,}98;3{,}91)$.

2.22. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$; $A(-1;3)$, $B(-0{,}98;2{,}97)$.

2.23. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$; $A(3;2)$, $B(3{,}05;1{,}98)$.

2.24. $z = 2xy + 3y^2 - 5x$; $A(3;4)$, $B(3{,}04;3{,}95)$.

2.25. $z = xy + 2y^2 - 2x$; $A(1;2)$, $B(0{,}97;2{,}03)$.

Задание 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Построить чертеж.

3.1. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$; $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 3$.

3.2. $z = x^2 + 2y^2 + 1$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

3.3. $z = -2x^2 - y^2 - xy + 3$; $x \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$.

3.4. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $x \geqslant 1$, $y \geqslant -1$, $x + y \leqslant 1$.

3.5. $z = x^2 + 2y^2 + 2xy$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3.6. $z = 5x^2 + y^2 - 3xy + 4$; $x \geqslant -1$, $y \geqslant -1$, $x + y \leqslant 1$.

3.7. $z = -x^2 + 2xy + 10$; $0 \leqslant y \leqslant 4 - x^2$.

3.8. $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$; $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x + y + 2 \geqslant 0$.

3.9. $z = x^2 + xy - 2$; $4x^2 - 4 \leqslant y \leqslant 0$.

3.10. $z = x^2 + xy$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 3$.

3.11. $z = x^2 y$; $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$.

3.12. $z=-2x^2-y^2+4;\quad x^2+y^2\leqslant 1.$

3.13. $z=x^2+xy-2x-y;\quad 0\leqslant x\leqslant 3,\quad 0\leqslant y\leqslant 4.$

3.14. $z=x^2+xy;\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant -\dfrac{3}{2}x+3.$

3.15. $z=x^3+y^3-3xy;\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant 3.$

3.16. $z=0{,}5x^2-xy;\quad 0{,}5x^2\leqslant y\leqslant 3.$

3.17. $z=xy^2+1;\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad -1\leqslant y\leqslant 2.$

3.18. $z=x^2-2y^2+4;\quad x^2+y^2\leqslant 1.$

3.19. $z=y^2-xy+2x+y;\quad 0\leqslant x\leqslant 4,\quad 0\leqslant y\leqslant 4.$

3.20. $z=x^2+y^2-4xy;\quad 0\leqslant x\leqslant 4,\quad 0\leqslant y\leqslant 4.$

3.21. $z=x^2-y^2+4xy-6x-2y;\quad 0\leqslant x\leqslant 4,\quad 0\leqslant y\leqslant 4-x.$

3.22. $z=x^2+2y^2+4xy+1;\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 2.$

3.23. $z=x^2-2y^2+4xy-6x+5;\quad 0\leqslant x\leqslant 3,\quad 0\leqslant y\leqslant 3-x.$

3.24. $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy;\quad -2\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant x^2.$

3.25. $z=x^2-2xy+3;\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant 4-x^2.$

Задание 4. Даны функция $z=f(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор $\vec{a}(a_x,a_y)$. Найти:

1) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,z$ в точке $A(x_0,y_0)$;

2) производную в точке $A(x_0,y_0)$ по направлению вектора $\vec{a}(a_x,a_y)$.

4.1. $z=x^2+xy+y^2;\quad A(1;1),\quad \vec{a}(2;-1).$

4.2. $z=2x^2+3xy+y^2;\quad A(2;1),\quad \vec{a}(3;-4).$

4.3. $z=\ln(5x^2+3y^2);\quad A(1;1),\quad \vec{a}(3;2).$

4.4. $z=\ln(5x^2+4y^2);\quad A(1;1),\quad \vec{a}(2;-1).$

4.5. $z=5x^2+6xy;\quad A(2;1),\quad \vec{a}(1;2).$

4.6. $z=\mathrm{arctg}(xy^2);\quad A(2;3),\quad \vec{a}(4;-3).$

4.7. $z=\arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right);\quad A(1;2),\quad \vec{a}(5;-12).$

4.8. $z=\ln(3x^2+4y^2);\quad A(1;3),\quad \vec{a}(2;-1).$

4.9. $z=3x^4+2x^2y^3;\quad A(-1;2),\quad \vec{a}(4;-3).$

4.10. $z=3x^2y^2+5xy^2;\quad A(1;1),\quad \vec{a}(2;1).$

4.11. $z = 2x^2 + xy; \quad A(-1;2), \quad \vec{a}(3;4).$

4.12. $z = \ln(x^2 + xy^2); \quad A(1;2), \quad \vec{a}(3;-4).$

4.13. $z = \operatorname{arctg}(xy); \quad A(2;3), \quad \vec{a}(4;3).$

4.14. $z = x^3y + xy^2; \quad A(1;3), \quad \vec{a}(-5;12).$

4.15. $z = \dfrac{x}{y^2}; \quad A(3;4), \quad \vec{a}(-3;-4).$

4.16. $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}; \quad A(1;-2), \quad \vec{a}(1;2).$

4.17. $z = x^2y + xy^2; \quad A(1;1), \quad \vec{a}(6;-8).$

4.18. $z = \ln(2x + 3y); \quad A(2;2), \quad \vec{a}(-3;2).$

4.19. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}; \quad A(-1;1), \quad \vec{a}(1;-1).$

4.20. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y - 8; \quad A(0;1), \quad \vec{a}(8;-6).$

4.21. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1; \quad A(1;0), \quad \vec{a}(3;4).$

4.22. $z = -x^2 + 3xy - 4y^2 + 4x - 6y - 1; \quad A(1;2), \quad \vec{a}(2;2).$

4.23. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 5; \quad A(3;1), \quad \vec{a}(1;2).$

4.24. $z = -x^2 + 3xy - 3y^2 - 6x + 9y - 4; \quad A(1;-3), \quad \vec{a}(4;-3).$

4.25. $z = -5x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y + 4; \quad A(2;2), \quad \vec{a}(1;-1).$

Задание 5. Экспериментально получено пять значений искомой функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в виде таблицы. Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax + b$, выражающую приближенно функцию $y = f(x)$. Построить чертеж, на котором отметить экспериментальные точки, и график полученной функции $y = f(x)$.

5.1.

x	1	2	3	5	5
y	1,3	1,2	2,3	2,2	3,3

5.2.

x	1	2	3	5	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

5.3.

x	1	2	3	5	5
y	4,5	5,5	4	2	2,5

5.4.

x	1	2	3	5	5
y	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7

5.5.

x	1	2	3	5	5
y	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9

5.6.

x	1	2	3	5	5
y	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

5.7.

x	1	2	3	5	5
y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

5.8.

x	1	2	3	5	5
y	5,2	6,2	4,7	2,7	3,2

5.9.

x	1	2	3	5	5
y	0,3	2,2	3,3	5,2	6,3

5.10.

x	1	2	3	5	5
y	0,2	2,3	3,2	5,3	6,2

5.11.

x	1	2	3	5	5
y	0,8	1,7	3,8	4,7	6,8

5.12.

x	1	2	3	5	5
y	0,1	2,4	3,1	5,4	6,1

5.13.

x	1	2	3	5	5
y	0,9	1,6	3,9	4,6	6,9

5.14.

x	1	2	3	5	5
y	1	1,5	4	4,5	7

5.15.

x	1	2	3	5	5
y	0,9	1,6	1,9	2,6	2,9

5.16.

x	1	2	3	5	5
y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

5.17.

x	1	2	3	5	5
y	5,5	6,5	5	3	3,5

5.18.

x	1	2	3	5	5
y	1,1	1,4	2,1	2,4	3,1

5.19.

x	1	2	3	5	5
y	0,7	1,8	3,7	4,8	6,7

5.20.

x	1	2	3	5	5
y	0,8	1,7	1,8	2,7	2,8

5.21.

x	1	2	3	5	5
y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

5.22.

x	1	2	3	5	5
y	1,2	1,3	2,2	2,3	3,2

5.23.

x	1	2	3	5	5
y	0,4	2,1	3,4	5,1	6,4

5.24.

x	1	2	3	5	5
y	0,7	1,8	1,9	2,8	2,7

5.25.

x	1	2	3	5	5
y	0,6	1,9	3,6	4,9	6,6

Список рекомендуемой литературы

1. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов: в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — Ч. I. — М.: Высш. шк., 1986.

2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. — Т. 1. — М.: Интеграл-Пресс, 2001.

3. *Шипачев В. С.* Высшая математика: учеб. для вузов / В. С. Шипачев. — М.: Высш. шк., 2001.

Оглавление