МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к типовым расчетам

Чебоксары 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к типовым расчетам

Чебоксары 2009

УДК 517.9

Составители: А. Н. Быкова,
О. И. Кирпикова,
Н. А. Ращепкина,
С. С. Сайкин,
В. И. Стаховская,
Л. Н. Шегай

Дифференциальные уравнения : метод. указания к типовым расчетам / сост. А. Н. Быкова, О. И. Кирпикова, Н. А. Ращепкина и др. ; Чуваш. ун-т. — Чебоксары, 2009. 20 с.

Приводятся решения задач типового расчета по книге Кузнецова А. Н. «Дифференциальные уравнения» (вариант 31-й). Излагаются необходимые теоретические сведения.

Для студентов I–II курсов технических факультетов.

Утверждено Методическим советом университета

Отв. редактор канд. физ.-мат. наук, профессор В. Г. Агаков

Дифференциальные уравнения

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$20x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 5xy^2\,dx.$$

Ответ представить в виде $\psi(x; y) = C$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$(20x + 5xy^2)\,dx = (3x^2y + 3y)\,dy \;\Rightarrow\; 5x(4 + y^2)\,dx = 3y(x^2 + 1)\,dy.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Здесь коэффициенты при dx и dy — произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, другая — только от y, т.е. уравнение имеет вид

$$P_1(x)Q_1(y)\,dx = P_2(x)Q_2(y)\,dy.$$

Разделим переменные, поделив обе части уравнения на $(4+y^2)\times$ $\times(x^2 + 1)$. Тогда

$$\frac{5x\,dx}{x^2+1} = \frac{3y\,dy}{4+y^2}.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int \frac{5x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{3y\,dy}{4+y^2},$$

получим общий интеграл

$$\frac{5}{2}\ln|x^2+1| = \frac{3}{2}\ln|4+y^2| + \frac{1}{2}\ln C.$$

Выполнив потенцирование, приведем общий интеграл данного уравнения к виду

$$\frac{(x^2+1)^5}{(y^2+4)^3} = C.$$

Задание 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$.

Решение. Данное уравнение — однородное, оно приводится к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Действительно, поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим

$$y' = \frac{1 + \dfrac{2y}{x} - 5\dfrac{y^2}{x^2}}{2 - 6\dfrac{y}{x}}.$$

Замена $u = y/x$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными (по отношению к новой неизвестной функции $u(x)$). Подставим $y = ux$, $y' = x\dfrac{du}{dx} + u$ в исходное уравнение. Тогда

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 1}{2 - 6u}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2 - 6u}{u^2 + 1}\,du.$$

Интегрируя это уравнение

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2\,du}{u^2 + 1} - \int \frac{6u}{u^2 + 1}\,du,$$

найдем общий интеграл

$$\ln|x| = 2\operatorname{arctg} u - 3\ln|u^2 + 1| + \ln C.$$

Выполнив потенцирование, получим

$$x = \frac{Ce^{2\operatorname{arctg} u}}{(u^2 + 1)^3}.$$

Возвратимся теперь к прежней функции y, используя подстановку $u = y/x$:

$$x = \frac{Ce^{2\operatorname{arctg}(y/x)}}{\left(\dfrac{y^2}{x^2} + 1\right)^3}.$$

Отсюда получим общий интеграл в виде

$$\frac{(y^2 + x^2)^3}{x^5 e^{2\operatorname{arctg}(y/x)}} = C.$$

Задание 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y + 2}{2x + y - 4}$.

Решение. Данное уравнение имеет вид

$$y' = f\left(\frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1}\right).$$

Оно сводится к однородному уравнению, если $ab_1 - a_1 b \neq 0$, с помощью подстановки

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

где $(\alpha; \beta)$ — точка пересечения прямых

$$ax + by + C = 0, \quad a_1 x + b_1 y + C_1 = 0;$$

или к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $ax + by = t$, если $ab_1 - a_1 b = 0$. В нашем случае, решая систему

$$\begin{cases} y + 2 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0, \end{cases}$$

получим точку $x = \alpha = 3$, $y = \beta = -2$. Сделаем подстановку в исходном уравнении

$$x = u + 3, \quad dx = du; \qquad y = v - 2, \quad dy = dv.$$

Получим однородное уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{2u + v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{du} = \frac{v/u}{2 + v/u}.$$

С помощью замены $t = v/u$, $v = tu$, $\dfrac{dv}{du} = t + u\dfrac{dt}{du}$ это уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными

$$t + u\frac{dt}{du} = \frac{t}{2 + t} \quad \text{или} \quad u\frac{dt}{du} = -\frac{t^2 + t}{2 + t}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение

$$\frac{du}{u} = -\frac{(2 + t)\,dt}{t(t + 1)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{2(1 + t) - t}{t(t + 1)}\,dt.$$

Тогда

$$\ln|u| = -2\ln|t| + \ln|t + 1| + \ln C, \quad u = C\frac{t + 1}{t^2}.$$

Возвращаясь к старым переменным, полагая $u = x - 3$, $v = y + 2$, $t = v/u$, получим общий интеграл уравнения

$$\frac{(y + 2)^2}{y + x - 1} = C.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$$

Решение. Данное уравнение — линейное, оно имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

(y и y' входят в уравнение в первой степени с некоторыми коэффициентами, зависящими от x). Линейное уравнение может решаться методом Бернулли и методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных).

Применим метод Бернулли. Будем искать общее решение в виде

$$y = uv,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — неизвестные функции, одна из которых, например $v(x)$, может быть выбрана произвольно. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{uv}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x}\right) + v\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^2}. \qquad (1)$$

Приравняем к нулю выражение в скобках:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0.$$

Разделим переменные и найдем частное решение этого уравнения:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ln v = \ln x, \quad v = x.$$

Подставим $v = x$ в уравнение (1) и получим еще одно уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^2},$$

из которого находим

$$du = -\frac{2\,dx}{x^3}, \quad u = \frac{1}{x^2} + C.$$

Общее решение исходного уравнения получим, умножая u на v:

$$y = \left(\frac{1}{x^2} + C\right)x \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{x} + Cx.$$

Постоянную C определим из начального условия $y(1) = 1$. Имеем $1 = 1 + C$, т.е. $C = 0$.

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$y = \frac{1}{x}.$$

Замечание. Метод Бернулли позволяет найти общее решение линейного уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$ в виде произведения двух функций $y = u(x)v(x)$. Для нахождения $u(x)$ и $v(x)$ можно пользоваться готовыми формулами

$$v(x) = e^{-\int P(x)\,dx}, \quad u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C. \tag{$*$}$$

Эти формулы получаются с помощью тех же рассуждений, что и в задании 4.

Задание 5. Решить задачу Коши

$$dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)\,dy = 0, \quad y(-1) = 0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на dy, получим

$$\frac{dx}{dy} + 2x = 2\cos^2 y - \sin 2y.$$

Это уравнение — линейное относительно x и x'. Решим его методом Бернулли. Положим

$$x = uv, \quad \frac{dx}{dy} = u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy}.$$

Подставляя x и dx/dy в данное уравнение, получим

$$u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy} + 2uv = 2\cos^2 y - \sin 2y,$$

$$v\left(\frac{du}{dy} + 2u\right) + u\frac{dv}{dy} = 2\cos^2 y - \sin 2y. \tag{1}$$

Определим функцию u из условия $\frac{du}{dy} + 2u = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, найдем частное решение $u(x)$:

$$\frac{du}{u} = -2\,dy, \quad \ln u = -2y, \quad u = e^{-2y}.$$

Подставив $u = e^{-2y}$ в уравнение (1), получим

$$e^{-2y}\frac{dv}{dy} = 2\cos^2 y - \sin 2y.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{dy} = e^{2y}[2\cos^2 y - \sin 2y], \quad \frac{dv}{dy} = e^{2y}[1 + \cos 2y - \sin 2y].$$

Тогда

$$v = \int e^{2y}(1 + \cos 2y - \sin 2y)\,dy.$$

Проинтегрировав по частям, найдем

$$v = \frac{1}{2}e^{2y} + \frac{1}{2}e^{2y}\cos 2y + C.$$

Общее решение исходного уравнения получим, умножая $u(x)$ на $v(x)$:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2y + Ce^{-2y}.$$

Постоянную C определим из условия $y(-1) = 0$. Имеем

$$-1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 0 + Ce^{0} \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

Итак, решение задачи Коши запишется в виде

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2y - 2e^{-2y} \quad \text{или} \quad x = \cos^2 y - 2e^{-2y}.$$

Задание 6. Найти решение задачи Коши

$$xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. В общей классификации каноническая форма записи такова:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0; 1.$$

Через замену неизвестной функции уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению. Для этого предварительно разделим все уравнение на y^{α}:

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x).$$

Сделаем замену $y^{1-\alpha} = z(x)$, тогда $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$; уравнение примет вид

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$$

(линейное уравнение). Вводим две новые неизвестные вместо $z(x)$: $z(x) = u(x)v(x)$. Для этих неизвестных получаются уравнения с разделяющимися переменными, имеющие решения

$$v(x) = e^{(\alpha-1)\int P(x)\,dx}, \quad u(x) = \int \frac{(1-\alpha)Q(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Из этих функций собираем последовательно $z(x)$ и $y(x)$.

Решение примера:

$$xy' + y = xy^2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{xy^2},$$

тогда

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = 1.$$

Замена

$$y^{-1} = z(x) \quad \Rightarrow \quad z' = -y^{-2}y'.$$

Для $z(x)$ получаем линейное уравнение $z' - \dfrac{1}{x}z = -1$, решение его ищем в виде $z(x) = u(x)v(x)$:

$$v(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x, \quad u(x) = -\int \frac{1}{x}\,dx + C = -\ln x + C,$$

тогда

$$z(x) = x(C - \ln x), \quad \frac{1}{y} = x(C - \ln x), \quad y = \frac{1}{x(C - \ln x)}$$

(общее решение). Подставляя его в начальное условие, получим $1 = 1/(C - \ln 1)$, откуда $C = 1$. Решение задачи Коши будет

$$y = \frac{1}{x(1 - \ln x)}.$$

Задание 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{x\,dx + y\,dy + (x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Решение. Представим левую часть уравнения в форме полного дифференциала функции двух переменных:

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

Выражение вида $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, если выполнено равенство $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$. В этом случае уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

равносильно утверждению $du(x, y) = 0$, а решение уравнения (общий интеграл) $u(x, y) = C$. Следовательно, процесс решения — это восстановление функции $u(x, y)$ по ее частным производным $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Покажем это на нашем примере.

$$\frac{x - y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2}\,dy = 0;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Условие полного дифференциала выполнено, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

Тогда

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \varphi(y) = \int \frac{x\,dx}{x^2+y^2} - y\int \frac{dx}{x^2+y^2} + \varphi(y) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y)$$

($\varphi(y)$ — произвольная функция от y вместо произвольной постоянной C, т.к. проверяющее равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ выполнено, а функция $u(x,y)$ найдена в максимально общем виде). Для уточнения функции $u(x,y)$ воспользуемся и вторым условием $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, т.е. решим систему

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},\\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y)\right) \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2},\\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'_y(y) \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2},\\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \varphi'_y(y) \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \varphi'_y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = C.$$

Функция $u(x,y)$ полностью восстановлена:

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C.$$

Общий интеграл уравнения

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C.$$

Задание 8. Для дифференциального уравнения $y' = x + 2y$ методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку $M(1;2)$.

Решение. Метод изоклин — это графический, весьма приближенный способ построения решения — интегральной кривой — по полю направлений, т.е. точечным значениям угла наклона касательных к интегральным кривым, задаваемым уравнением $y' = f(x,y)$. Изоклины — это линии постоянства значений угла наклона, т.е. постоянства y'. Значит, общим уравнением всех изоклин будет равенство $f(x,y) = C$. Если в точках каждой изоклины нарисовать штрихи с наклоном, определяемым равенством $\operatorname{tg}\alpha = C$, то решением задачи будет построение из начальной точки M кривой, огибающей эти штрихи касательных, т.е. касающейся в каждой своей точке какого-либо штриха.

Уравнения изоклин

$$x + 2y = C \quad \text{или} \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{C}{2}.$$

Задавая значения C (желательно с малым шагом), получим сетку изоклин, в нашем случае семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом $k = -1/2$. В точках каждой прямой нарисуем штрихи с наклоном, соответствующим значению C на прямой (рис. 1).

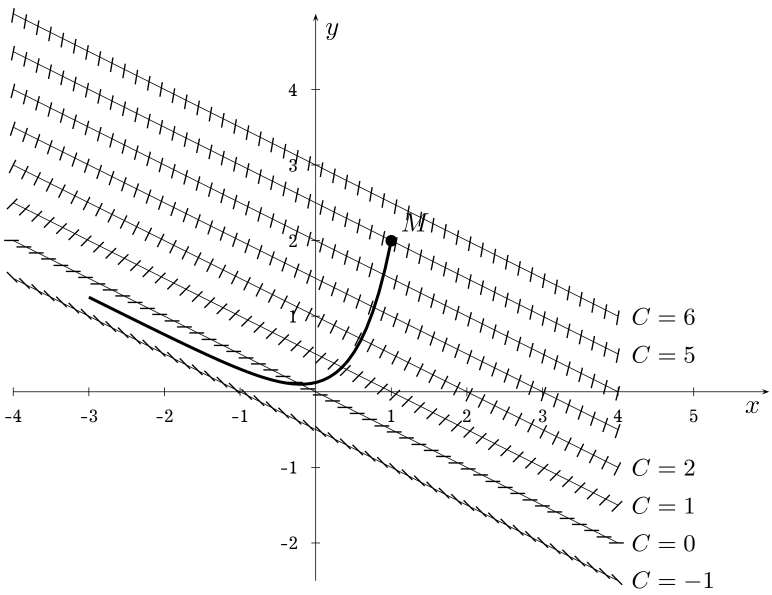

Рис. 1

Задание 9. Найти линию, проходящую через точку $M_0(1;1)$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overline{MN}$ с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy, равную $a = 1$.

Решение. Решение данной задачи — это построение уравнения геометрического места точек, обладающих указанным выше свойством (т.е. обычная задача аналитической геометрии), но свойство это формализуется через производную, т.е. мы получим сначала дифференциальное уравнение искомой линии, а затем, проинтегрировав его при условии прохождения через точку M_0, — частное решение.

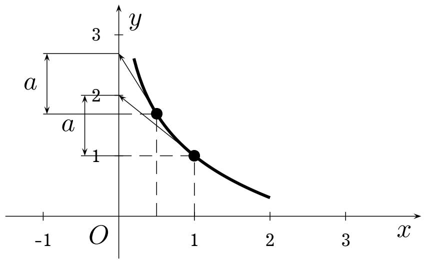

Рис. 2

Для удобства решения построим эскиз искомой кривой (рис. 2). Ее уравнение $y = f(x)$. Пусть $M(x, y)$ — текущая точка кривой, через которую проходит касательный вектор $\overline{MN}$. Для уравнения касательной прямой введем обозначения переменных X и Y, чтобы отличать их от координат точки касания (x, y). Уравнение касательной

$$Y - y = f'(x)(X - x). \qquad (1)$$

На касательной при $X = 0 \quad Y = y+a = y+1$. Тогда уравнение (1) дает $a = f'(x)(-x)$ или $f'(x) = -1/x$ — это и есть дифференциальное уравнение искомой кривой. Интегрируя, получим

$$f(x) = -\int \frac{dx}{x} + C = C - \ln x \quad \text{или} \quad y = C - \ln x$$

— это уравнение всех кривых, обладающих подобным свойством при $a = 1$, но с незафиксированной точкой M_0. Прохождение через точку $M_0(1; 1)$ — это есть начальное условие $y(1) = 1$. Подставив в него решение, получаем $1 = C - \ln 1 \;\Rightarrow\; C = 1$. Тогда уравнение искомой кривой

$$y = 1 - \ln x.$$

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

Решение. Это дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка. Так как уравнение не содержит явно неизвестную функцию $y(x)$, то его порядок можно понизить с помощью замены $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$. Уравнение примет вид

$$(1+x^2)p' + 2xp = 12x^3 \quad \Rightarrow \quad p' + \frac{2x}{1+x^2}p = 12\frac{x^3}{1+x^2}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Воспользуемся готовыми формулами $(*)$ (см. стр. 7):

$$p = u(x)v(x), \quad v(x) = e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx} = e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1},$$

$$u(x) = 12\int \frac{x^3(x^2+1)}{1+x^2}\,dx + C_1 = 3x^4 + C_1,$$

$$p = \frac{3x^4+C_1}{x^2+1} \quad \text{или} \quad y' = \frac{3x^4+C_1}{x^2+1}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$y = \int \frac{3x^4+C_1}{x^2+1}\,dx + C_2 \;\Rightarrow\; y = 3\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = 3\left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right) + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2.$$

Общее решение

$$y = x^3 - 3x + \bar{C}_1 \operatorname{arctg} x + C_2.$$

Задание 11. Найти решение задачи Коши

$$y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка. Так как уравнение не содержит явно переменную x, его порядок можно понизить с помощью замены $y' = p(y(x))$, тогда $y'' = \dfrac{dp}{dy}y' = \dfrac{dp}{dy}p$. Уравнение примет вид

$$\frac{dp}{dy}py^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p\,dp = -\frac{dy}{y^3}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя, получим

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad (y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}.$$

Знак корня выбираем в соответствии со вторым начальным условием, т.е. $-1 = -\sqrt{1+C_1}$, откуда $C_1 = 0$. Тогда

$$y' = -\sqrt{\frac{1}{y^2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\frac{1}{y}.$$

Опять выбираем знак в соответствии с начальным условием:

$$y'(1)\big|_{y=-1} = -1,$$

значит, $y' = \dfrac{1}{y}$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$y\,dy = dx \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{2} = x + C_2 \;\Rightarrow\; y^2 = 2x + C_2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{2x+C_2}.$$

Подставляем в первое начальное условие и выбираем знак: $-1 = -\sqrt{2+C_2}$, откуда $C_2 = -1$. Окончательно получаем частное решение в виде

$$y = -\sqrt{2x-1}.$$

Задание 12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами третьего порядка. Общее решение такого уравнения представляет собой сумму общего решения $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ и частного решения $y^*(x)$ данного неоднородного.

Для нахождения общего решения однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составим и решим характеристическое уравнение

$$k^3 - 5k^2 + 6k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k(k^2 - 5k + 6) = 0,$$

его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Тогда общим решением однородного уравнения будет функция

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения можно найти методом подбора по виду правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right].$$

В нашем случае правая часть уравнения имеет частный вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} = 6x^2 + 2x - 5,$$

т.е. $n = 2$, $\alpha = 0$. Значение α совпадает с одним из простых корней характеристического уравнения $k_1 = 0$. Тогда вид частного решения таков:

$$y^* = x(Ax^2 + Bx + C) \quad \Rightarrow \quad y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C дифференцируем функцию $y^*(x)$ и подставляем с соответствующими множителями в уравнение:

$$\begin{array}{r|l}
0 & y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx \\
6 & y^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx + C \\
(-5) & y^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B \\
1 & y^{*\prime\prime\prime} = 6A \\
\hline
 & 18Ax^2 + (12B - 30A)x + (6C - 10B + 6A) \quad = 6x^2 + 2x - 5.
\end{array}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x слева и справа, получаем систему линейных уравнений для A, B и C:

$$\begin{cases} 18A = 6, \\ -30A + 12B = 2, \\ 6A - 10B + 6C = -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/3, \\ B = 1, \\ C = 1/2. \end{cases}$$

Значит, $y^* = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + \dfrac{1}{2}x$, а общее решение —

$$y = c_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Задание 13. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$.

Решение. Общее решение данного уравнения ищем в виде $y = \bar{y} + y^*$ (см. решение задания 12). Соответствующее однородное уравнение $y''' + y'' - 6y' = 0$ имеет характеристическое уравнение

$$k^3 + k^2 - 6k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k(k^2 + k - 6) = 0,$$

его корни $k_1 = 0$, $k_2 = -3$, $k_3 = 2$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x}.$$

Правая часть неоднородного уравнения

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} = (20x + 14)e^{2x},$$

где $n = 1$, $\alpha = 2$. Значение α совпадает с простым корнем характеристического уравнения $k_3 = 2$. Значит, вид частного решения таков: $y^* = x(Ax+B)e^{2x}$. Находим производные этой функции и подставляем в данное уравнение, тогда

$$(20Ax + 14A + 10B)e^{2x} = (20x + 14)e^{2x}.$$

Разделив обе части равенства на e^{2x} ($e^{2x} \neq 0$) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим систему

$$\begin{cases} 20A = 20, \\ 14A + 10B = 14 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = 1,\ B = 0.$$

Тогда $y^* = x^2e^{2x}$ и общее решение

$$y = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + x^2e^{2x}.$$

Задание 14. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$.

Решение. Общее решение ищем в виде $y = \bar{y} + y^*$ (см. задания 12 и 13). Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ составляем и решаем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = 2$. Тогда общим решением однородного уравнения будет функция $\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Так как правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(M_m(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x) = e^{2x}\sin 6x,$$

где $m = n = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 6$ и $\alpha \pm i\beta = 2 + 6i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в форме

$$y^* = e^{2x}(A\cos 6x + B\sin 6x).$$

Дифференцируем эту функцию дважды и подставляем в данное уравнение, тогда

$$e^{2x}(-36A\cos 6x - 36B\sin 6x) = e^{2x}\sin 6x.$$

Отсюда $A = 0$, $B = 1/36$ и частное решение $y^* = -\dfrac{1}{36}e^{2x}\sin 6x$. Общее решение

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - \frac{1}{36}e^{2x}\sin 6x.$$

Задание 15. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x$.

Решение. Общее решение ищем в виде $y = \bar{y} + y^*$ (см. задания 12, 13, 14). Для нахождения решения соответствующего однородного уравнения $y''' - 100y' = 0$ составляем и решаем характеристическое уравнение $k^3 - 100k = 0$. Его корни $k_1 = 0$,

$k_2 = 10$, $k_3 = -10$. Решением однородного уравнения будет функция $\bar{y} = C_1 + C_2e^{10x} + C_3e^{-10x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора поступаем в соответствии со следующей теоремой: если правая часть неоднородного дифференциального уравнения представлена в виде суммы функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то его частное решение также можно искать в виде $y^* = y_1^* + y_2^*$, где каждое слагаемое — есть частное решение соответствующего уравнения. В нашем случае

$$y''' - 100y' = 20e^{10x}, \tag{1}$$

$$y''' - 100y' = 100\cos 10x. \tag{2}$$

Для уравнения (1) имеем

$$f_1(x) = P_n(x)e^{\alpha x} = 20e^{10x}, \quad n = 0, \quad \alpha = 10 = k_2,$$

тогда решение $y_1^* = Axe^{10x}$. Подставляем производные этой функции в уравнение (1) и получим равенство

$$(300A + 1000Ax - 100A - 1000Ax)e^{10x} = 20e^{10x},$$

отсюда $A = 1/10$ и $y_1^* = 1/(10)xe^{10x}$.

Для уравнения (2)

$$f_2(x) = e^{\alpha x}(M_m(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x) = 100\cos 10x,$$

$n = m = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 10$, $\alpha \pm i\beta \neq k_i$; решение ищем в виде $y_2^* = B\cos 10x + C\sin 10x$. Находим производные и подставляем в уравнение (2), получим равенство

$$-2000C\cos 10x + 2000B\sin 10x = 100\cos 10x,$$

откуда

$$\begin{cases} -2000C = 100, \\ 2000B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ C = -1/20 \end{cases} \quad \text{и} \quad y_2^* = -\frac{1}{20}\sin 10x.$$

Частное решение

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{10}xe^{10x} - \frac{1}{20}\sin 10x.$$

Общее решение

$$y = C_1 + C_2e^{10x} + C_3e^{-10x} + \frac{1}{10}xe^{10x} - \frac{1}{20}\sin 10x.$$

Задание 16. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение. Данное уравнение решаем методом вариации произвольных постоянных. Для соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ составляем и решаем характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm i$, тогда $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Общее решение данного неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, в котором использована форма решения $\bar{y}$, но константы варьируются — заменены неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Производные этих функций в общем виде определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

где $y_{1,2}(x)$ — частные, линейно не зависимые решения однородного уравнения. В нашем случае

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая систему правилом Крамера, имеем $\Delta = 1$, $\Delta_1 = -\operatorname{tg} x$, $\Delta_2 = 1$, тогда $C_1'(x) = -\operatorname{tg} x$, $C_2'(x) = 1$. Следовательно,

$$C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x \, dx + C_1 = \ln|\cos x| + C_1, \; C_2(x) = \int dx + C_2 = x + C_2.$$

Общее решение данного уравнения

$$y = (\ln|\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x.$$

Подставляя эту функцию и ее производные в начальные условия, получим

$$y(0) = (\ln 1 + C_1) \cdot 1 + (0 + C_2) \sin 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1;$$

$$y'(0) = -\frac{\sin x}{\cos x} \cos x + (\ln|\cos x| + C_1)(-\sin x) +$$
$$+ \sin x + (x + C_2) \cos x \big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Искомое решение задачи Коши

$$y = (1 + \ln|\cos x|) \cos x + x \sin x.$$

Список рекомендуемой литературы

1. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. — 5-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2005. — 240 с.

2. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Павлов, Т. Я. Кожевникова. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. 2. — 415 с.

3. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Для втузов / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1976. — Т. 2. — 576 с.

4. *Бугров Я. С.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

5. Дифференциальные уравнения и операционное исчисление : рук-во по выполнению типовых расчетов / сост. А. Н. Быкова и др. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1992. — 26 с.

Учебное издание

Составители:
БЫКОВА Алевтина Николаевна
КИРПИКОВА Ольга Ивановна
РАЩЕПКИНА Нина Александровна
САЙКИН Сергей Семенович
СТАХОВСКАЯ Вера Ивановна
ШЕГАЙ Людмила Николаевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к типовым расчетам

Отв. за выпуск Н. А. Романова
Компьютерный набор и верстка В. Г. Сытина

Подписано в печать 18.03.09. Формат 60×84/16. Бумага писчая.
Гарнитура Журнальная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1,16. Уч.-изд. л. 0,98. Тираж 500 экз. Заказ № 132.

Чувашский государственный университет
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15