ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.
ГРАФИКИ.
ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания к типовым расчетам

Чебоксары 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.
ГРАФИКИ.
ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания к типовым расчетам

Чебоксары 2009

УДК 517.1

Составители: А. Н. Быкова,
Е. В. Володина,
Г. М. Филиппова,
С. И. Фролов

Дифференцирование. Графики. Интегралы : метод. указания к типовым расчетам / сост. А. Н. Быкова, Е. В. Володина, Г. М. Филиппова, С. И. Фролов ; Чуваш. ун-т. — Чебоксары, 2009. 35 с.

Дана методика решения 31-го варианта типовых расчетов «Дифференцирование», «Графики», «Интегралы» по задачнику Кузнецова Л. А. «Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты».

Для студентов I–II курсов технических факультетов.

Утверждено Методическим советом университета

Отв. редактор канд. физ.-мат. наук, профессор В. Г. Агаков

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Справочный материал

1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует). Производная обозначается $y'(x)$ или $f'(x)$. Итак, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной называется **дифференцированием** функции.

Геометрически производная $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x. Уравнения касательной и нормали, проведенных в точке $M_0(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$, соответственно имеют вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

2. Правила дифференцирования:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$;

2) $(uv)' = u'v + uv'$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

4) $(cu)' = c(u)'$, где c — постоянная;

5) если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x и

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

6) $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ при $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

3. Формулы дифференцирования:

1) $(c)' = 0$, c — постоянная; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; 4) $(a^x)' = a^x \ln a$;
5) $(e^x)' = e^x$; 6) $(\sin x)' = \cos x$;
7) $(\cos x)' = -\sin x$; 8) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
13) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Дифференциал функции $y = f(x)$: $dy = f'(x)\,dx$.

Примеры решения задач

Задание 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos\left((x+\Delta x)\sin \dfrac{1}{x+\Delta x}\right) - 1 + \cos\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[-2\sin\left(\frac{x}{2}\sin\frac{1}{x} + \frac{x+\Delta x}{2}\sin\frac{1}{x+\Delta x}\right) \times\right.$$

$$\left.\times \sin\left(\frac{x}{2}\sin\frac{1}{x} - \frac{x+\Delta x}{2}\sin\frac{1}{x+\Delta x}\right) \Big/ \Delta x\right] =$$

$$= -2\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{1}{x+\Delta x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -2\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{1}{x+\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= -2\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x\left(\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x+\Delta x}\right)-\Delta x\sin\dfrac{1}{x+\Delta x}}{2\Delta x} =$$

$$= -\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\left[x\cdot 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\Delta x}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\Delta x}\right)\Big/\Delta x-\sin\frac{1}{x+\Delta x}\right] =$$

$$= \sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x}-2x\cos\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2x(x+\Delta x)}}{\Delta x}\right) =$$

$$= \sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x}-2x\cos\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2x(x+\Delta x)}\right) =$$

$$= \sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x}-2x\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2x^2}\right); \quad f'(0)=0.$$

Задание 2. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y = 6\sqrt[3]{x}-\frac{16\sqrt[4]{x}}{3}, \quad x_0 = 1.$$

Решение.

$$y_0 = f(x_0) = 6\sqrt[3]{1}-\frac{16\sqrt[4]{1}}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y' = 6\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}; \quad y'(1) = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y-y_0 = y'(x_0)(x-x_0); \quad y-\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x-1); \quad 2x-3y=0.$$

Задание 3. Найти дифференциал dy:

$$y = x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|.$$

Решение.

$$dy = y'dx = \left[1\cdot\sqrt{x^2-1}+x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)\right]dx = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Задание 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad x = 1{,}58.$$

Решение.

$$y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0)+y'(x_0)\Delta x;\quad x_0=1{,}5;\quad \Delta x=0{,}08;$$

$$y(1{,}5)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1{,}5+1}}=\frac{1}{2};\quad y'=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}};$$

$$y'(1{,}5)=-\frac{1}{\sqrt{(2\cdot 1{,}5+1)^3}}=-\frac{1}{8};$$

$$y(1{,}58)\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot 0{,}08=0{,}5-0{,}01=0{,}49.$$

Задание 5. Найти производную:

$$y=\frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение.

$$y'=\frac{(18x^5+16x^3-2x)\sqrt{1+x^2}-(3x^6+4x^4-x^2-2)\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{15(1+x^2)}=$$

$$=\frac{15x^7+14x^5+19x^3+16x}{15(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{15x^7+14x^5+19x^3+16x}{15\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Задание 6. Найти производную: $y=\dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$.
Решение.

$$y'=\frac{2xe^{x^2}(1+x^2)-e^{x^2}\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^3e^{x^2}}{(1+x^2)^2}.$$

Задание 7. Найти производную: $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.
Решение.

$$y'=\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}2\ln(\ln^3 x)\frac{1}{\ln^3 x}3\ln^2 x\frac{1}{x}=\frac{6}{x(\ln x)\ln^2(\ln^3 x)}.$$

Задание 8. Найти производную:

$$y=\operatorname{tg}\sqrt{\cos\frac{1}{3}}+\frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}.$$

Решение.

$$y'=\left(\operatorname{tg}\sqrt{\cos\frac{1}{3}}\right)'+\left(\frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}\right)'=$$

$$=0+\frac{2\cdot 31\sin 31x\cos 31x\cos 62x-\sin^2 31x(-\sin 62x)\cdot 62}{31\cos^2 62x}=$$

$$= \frac{31\sin 62x\cos 62x + 31(1-\cos 62x)\sin 62x}{31\cos^2 62x} = \frac{\sin 62x}{\cos^2 62x}.$$

Задание 9. Найти производную: $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}$.
Решение.

$$y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+5\right)} = \frac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin x+5\cos^2\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1-\cos x}{2}+\sin x+\dfrac{5+5\cos x}{2}} = \frac{1}{3+\sin x+2\cos x}.$$

Задание 10. Найти производную: $y = \dfrac{2}{3}\operatorname{cth} x - \dfrac{\operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh}^3 x}$.
Решение.

$$y' = -\frac{2}{3}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sh} x\operatorname{sh}^3 x - \operatorname{ch} x\cdot 3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^6 x} =$$

$$= -\frac{2}{3\operatorname{sh}^2 x} - \frac{\operatorname{sh}^2 x - 3\operatorname{ch}^2 x}{3\operatorname{sh}^4 x} = \frac{-2\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 x + 3\operatorname{ch}^2 x}{3\operatorname{sh}^4 x} =$$

$$= \frac{3(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)}{3\operatorname{sh}^4 x} = \frac{1}{\operatorname{sh}^4 x}.$$

Задание 11. Найти производную: $y = x^{e^x}x^9$.
Решение.

$$\ln y = \ln\left(x^{e^x}x^9\right); \quad \ln y = e^x\ln x + 9\ln x;$$

$$\frac{1}{y}y' = e^x\ln x + e^x\frac{1}{x} + \frac{9}{x};$$

$$y' = y\left(e^x\ln x + \frac{e^x+9}{x}\right) = x^{e^x}x^9\left(e^x\ln x + \frac{e^x+9}{x}\right).$$

Задание 12. Найти производную:

$$y = \arcsin e^{-2x} + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}-1}).$$

Решение.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-4x}}}(-2e^{-2x}) + \frac{1}{e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}}\left(2e^{2x} + \frac{4e^{4x}}{2\sqrt{e^{4x}-1}}\right) =$$

$$= \frac{-2e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}} + \frac{2e^{2x}(\sqrt{e^{4x}-1}+e^{2x})}{(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})\sqrt{e^{4x}-1}} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{e^{4x}-1}} + \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}} = 2\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}.$$

Задание 13. Найти производную:

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$$

Решение.

$$y' = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \arcsin x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} +$$

$$+\frac{-2}{2(1-x^2)} = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Задание 14. Найти производную: $y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}}$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}}}\left(\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}} \times \frac{1}{\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right)^2} \times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{2\operatorname{tg} x}}\cdot\frac{2}{\cos^2 x}\right)\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right) -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2\sqrt{2\operatorname{tg} x}}\cdot\frac{2}{\cos^2 x}\right)\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}\cdot 2(1-\operatorname{tg} x)}{2\sqrt{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right)^2\sqrt{2\operatorname{tg} x}\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}\sqrt{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right)\sqrt{2\operatorname{tg} x}\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg} x}{\sqrt{2\operatorname{tg} x}\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right)} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg} x}{\sqrt{2\operatorname{tg} x}\cos x\left(\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right)}.$$

Задание 15. Найти производную y'_x, если

$$\begin{cases} x = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

Решение.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

$$x'_t = \left(\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)' = \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$y'_t = \left(\sqrt{1+t^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)' =$$

$$= \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}t-(1+\sqrt{1+t^2})}{t^2} =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t^2-\sqrt{1+t^2}-1-t^2}{(1+\sqrt{1+t^2})t\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{(1+\sqrt{1+t^2})t\sqrt{1+t^2}} = \frac{t^2+1}{t\sqrt{1+t^2}};$$

$$y'_x = \frac{t^2+1}{t\sqrt{1+t^2}}\sqrt{1+t^2} = \frac{t^2+1}{t}.$$

Задание 16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$:

$$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} \qquad t_0 = 0.$$

Решение.

$$y - y_0 = y'_x(x_0)(x-x_0); \quad y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(x_0)}(x-x_0).$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^{-t})'}{(2e^t)'} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2e^{2t}};$$

При $t_0 = 0$: $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. $y'_x(x_0) = -\dfrac{1}{2\cdot 1} = -\dfrac{1}{2}$;

$y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$; $\quad x + 2y - 4 = 0$ — уравнение касательной;

$y-1=2(x-2);\quad 2x-y-3=0$ — уравнение нормали.

Задание 17. Найти производную n-го порядка: $y=3^{2x+5}$.
Решение.

$$y'=2\cdot 3^{2x+5}\ln 3;\quad y''=(y')'=(2\ln 3)^2\cdot 3^{2x+5};$$
$$y'''=(y'')'=(2\ln 3)^3\cdot 3^{2x+5};\quad \ldots;\quad y^{(n)}=(2\ln 3)^n\cdot 3^{2x+5}.$$

Задание 18. Найти производную указанного порядка:

$$y=(x^3+2)e^{4x+3},\quad y^{IV}=?$$

Решение.

$$y'=3x^2e^{4x+3}+(x^3+2)\cdot 4e^{4x+3}=(4x^3+3x^2+8)e^{4x+3};$$
$$y''=(12x^2+6x)e^{4x+3}+(4x^3+3x^2+8)\cdot 4e^{4x+3}=$$
$$=(16x^3+24x^2+6x+32)e^{4x+3};$$
$$y'''=(48x^2+48x+6)e^{4x+3}+(16x^3+24x^2+6x+32)\cdot 4e^{4x+3}=$$
$$=(64x^3+144x^2+72x+134)e^{4x+3};$$
$$y^{IV}=(192x^2+288x+72)e^{4x+3}+(64x^3+144x^2+72x+134)\cdot 4e^{4x+3}=$$
$$=(256x^3+768x^2+576x+608)e^{4x+3}=$$
$$=32(8x^3+24x^2+18x+19)e^{4x+3}.$$

Задание 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=\ln t,\\ y=\operatorname{arctg} t.\end{cases}$$

Решение.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{t}}=\frac{t}{1+t^2};\quad y''_{xx}=(y'_x)'_x=$$
$$=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)'}{\dfrac{1}{t}}=t\frac{1+t^2-2t\cdot t}{(1+t^2)^2}=\frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Задание 20. Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению:

$$y=-\sqrt{x^4-x^2},\quad xyy'-y^2=x^4.$$

Решение.

$$y' = -\frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2}} = \frac{2x(1 - 2x^2)}{2x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$xyy' - y^2 = x^4; \quad x(-\sqrt{x^4 - x^2})\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - (x^4 - x^2) =$$

$$= -\frac{x \cdot x\sqrt{x^2 - 1}(1 - 2x^2)}{\sqrt{x^2 - 1}} - x^4 + x^2 = -x^2 + 2x^4 - x^4 + x^2 = x^4.$$

ГРАФИКИ

Справочный материал

Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** кривой $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} = \pm\infty.$$

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** кривой $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Точка $x = x_1$ называется **критической**, если $f'(x_1) = 0$ или $f'(x_1) = \infty$.

Если при переходе через критическую точку $x = x_1$ первая производная меняет знак, то x_1 — **точка экстремума**.

Если при переходе через точку $x = x_2$ вторая производная меняет знак, то x_2 — **точка перегиба**. При этом кривая вогнута на $(a; x_2)$, если в каждой его точке $f''(x) > 0$, и кривая выпукла на $(x_2; a)$, если $f''(x) < 0$.

Общая схема построения графика сводится к трем основным этапам:

1) нахождение области определения функции (ООФ), нахождение асимптот, нахождение точек пересечения графика с осями координат;

2) уточнение характера графика с использованием первой производной;

3) уточнение характера графика по второй производной.

Примеры решения задач

Задание 1. Построить график функции $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ с помощью первой производной.

Решение. ООФ: $(-\infty; +\infty)$. Точки пересечения с осями координат: $(0; -5)$ и $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Найдем критические точки:

$$y' = 24x(2x+1); \quad y' = 0 \text{ при } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } x_2 = 0.$$

Составляем интервалы монотонности: в $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ $y' > 0$ — функция возрастает; в $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ $y' < 0$ — функция убывает; в $(0; +\infty)$ $y' > 0$ — функция возрастает. Следовательно, $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$ — точка максимума, $(0; -5)$ — точка минимума. По полученным результатам строим график функции (рис. 1).

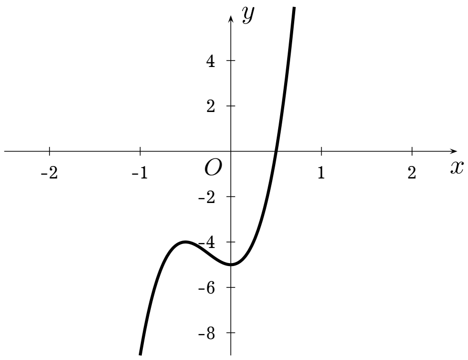

Рис. 1

Задание 2. Построить график функции $y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$ с помощью первой производной.

Решение. ООФ: $(-\infty; +\infty)$. Точки пересечения с осями координат: $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; $(-4; 0)$; $\left(-\frac{5}{8}; 0\right)$. Найдем критические точки:

$$y' = \frac{2(1 - \sqrt[3]{x+4})}{\sqrt[3]{x+4}}; \quad y' = 0 \text{ при } x_1 = -3, \quad y' = \infty \text{ при } x_2 = -4.$$

Составляем интервалы монотонности: в $(-\infty; -4)$ $y' < 0$ — функция убывает; в $(-4; -3)$ $y' > 0$ — функция возрастает; в $(-3; +\infty)$ $y' < 0$ — функция убывает. Следовательно, $(-4; 0)$ — точка минимума, $(-3; 1)$ — точка максимума. По полученным результатам строим график функции (рис. 2).

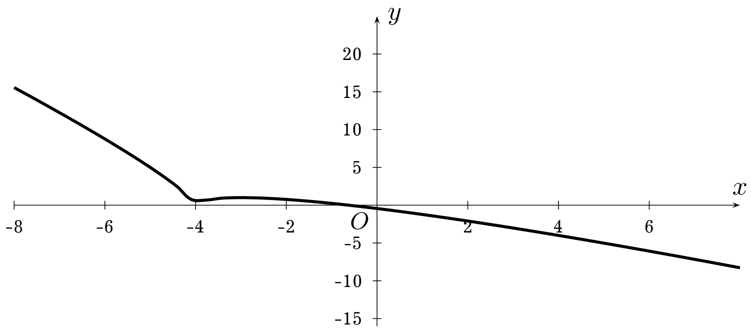

Рис. 2

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{10x+10}{x^2+2x+2}$ на $[-1; 2]$.

Решение. Найдем критические точки, лежащие внутри отрезка $[-1; 2]$:

$$y' = \frac{-10x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}; \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -2;$$

но $x_2 = -2$ не входит в $[-1; 2]$. Вычислим значения функции в критической точке $x_2 = 0$ и на концах отрезка: $y(-1) = 0$, $y(0) = 5$, $y(2) = 3$. Сравнивая все вычисленные значения, заключаем: $y(-1) = 0$ — наименьшее значение, $y(0) = 5$ — наибольшее значение.

Задание 4. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты $H = 2000$ м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м/с, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

Решение.

$$dm = -k\,dt, \quad \int\limits_{m_0}^{m} dm = -k\int\limits_0^t dt \quad \Rightarrow \quad m - m_0 = -kt.$$

$$m_0 gH = mgh + W, \quad h = H - \frac{gt^2}{2}.$$

$$W = gHkt + m_0\frac{g^2t^2}{2} - \frac{g^2kt^3}{2}, \quad W_t' = gHk + m_0 g^2 t - \frac{3}{2}g^2kt^2.$$

При $W'_t = 0$ получаем

$$t_0 = \frac{1}{3}\frac{m_0}{k} + \sqrt{\frac{1}{9}\frac{m_0^2}{k^2} + \frac{2}{3}\frac{H}{g}} = 10 + \sqrt{233{,}3}.$$

Тогда

$$W_{\text{наиб.}} = gHkt_0 + m_0\frac{g^2t_0^2}{2} - \frac{g^2kt_0^3}{2} = 2\cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Задание 5. Исследовать поведение функции $y = x^2 - 2e^{x-1}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ с помощью n-й производной.

Решение. Найдем производные функции в точке $x_0 = 1$:

$$y' = 2x - 2e^{x-1}, \quad y'(1) = 0;$$

$$y'' = 2 - 2e^{x-1}, \quad y''(1) = 0;$$

$$y''' = -2e^{x-1}, \quad y'''(1) = -2 \neq 0.$$

Составляем интервалы монотонности: в $(-\infty; 1)$ $\quad y' < 0$ — функция убывает, в $(1; +\infty)$ $\quad y' < 0$ — функция убывает. Следовательно, в точке $x_0 = 1$ экстремума нет.

В этих же интервалах исследуем поведение функции на выпуклость и вогнутость: в $(-\infty; 1)$ $\quad y'' > 0$ — кривая вогнута, в $(1; +\infty)$ $\quad y'' < 0$ — кривая выпукла. Следовательно, точка $(1; -1)$ — точка перегиба.

По полученным результатам строим схематический график функции в окрестности $x_0 = 1$ (рис. 3).

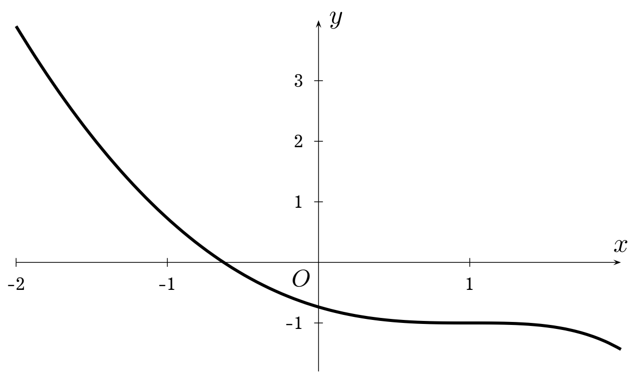

Рис. 3

Задание 6. Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Решение. ООФ: $(-\infty;-1/2) \cup (1/2;+\infty)$. Функция четная. При $x = \pm 1/2$ данная функция имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямые $x = \pm 1/2$ — вертикальные асимптоты. Далее ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9-10x^2}{x\sqrt{4x^2-1}} = \mp 5; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}} \mp 5x\right) = 0.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y = kx + b$, получим уравнения наклонных асимптот: $y = 5x$ при $x < 0$; $y = -5x$ при $x > 0$.

Точки пересечения с осями координат: $\left(-3/\sqrt{10};0\right)$ и $\left(3/\sqrt{10};0\right)$.

Найдем критические точки:

$$y' = \frac{-8x(5x^2+2)}{(4x^2-1)^{3/2}}, \quad y'' \neq 0 \quad \text{в ООФ}.$$

Следовательно, критических точек нет.

Составляем интервалы монотонности: в $(-\infty;-1/2)$ $\quad y' > 0$ — функция возрастает, в $(1/2;+\infty)$ $\quad y' < 0$ — функция убывает.

По полученным результатам строим график функции (рис. 4).

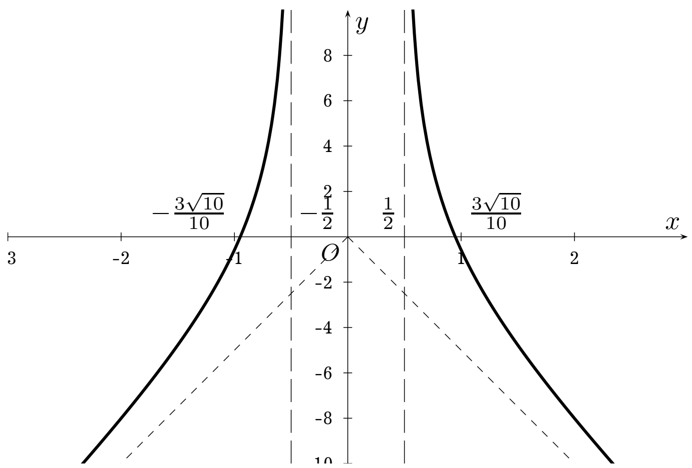

Рис. 4

Задание 7. Провести полное исследование заданной функции $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$ и построить график.

Решение. ОФФ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. При $x = 0$ данная функция имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота. Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = 1; \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = 0.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y = kx + b$, получим уравнение асимптоты: $y = x$.

Точка пересечения с осью Ox: $(\sqrt[3]{4}; 0)$.

Найдем критические точки:

$$y' = \frac{x^3 + 8}{x^3}; \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = -2.$$

Составляем интервалы монотонности: в $(-\infty; -2)$ $y' > 0$ — функция возрастает, в $(-2; 0)$ $y' < 0$ — функция убывает, в $(0; +\infty)$ $y' > 0$ — функция возрастает. Следовательно, $(-2; -3)$ — точка максимума.

Найдем точки перегиба:

$$y'' = -\frac{24}{x^4}; \quad y'' < 0 \quad \text{в ООФ}.$$

Следовательно, кривая выпукла в ООФ.

По полученным результатам строим график функции (рис. 5).

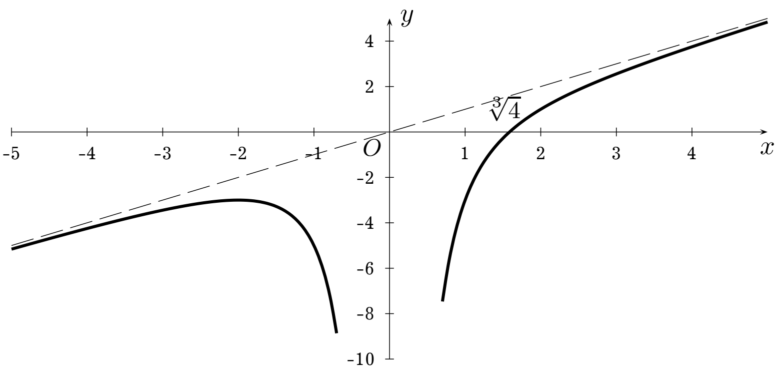

Рис. 5

Задание 8. Провести полное исследование функции $y = 2\ln\dfrac{x-1}{x} + 1$ и построить график.

Решение. ООФ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. При $x = 0$ и $x = 1$ данная функция имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямые $x = 0$ и $x = 1$ — вертикальные асимптоты. Далее ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln\dfrac{x-1}{x} + 1}{x} = 0,$$

что можно проверить по правилу Лопиталя;

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(2\ln\frac{x-1}{x} + 1\right) = 1.$$

Подставляя найденные значения в $y = kx + b$, получим уравнение асимптоты: $y = 1$.

Точка пересечения с осью Ox: $\left(\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}; 0\right)$.

Найдем критические точки:

$$y' = \frac{2}{x(x-1)}; \quad y' \neq 0, \quad y' \neq \infty \quad \text{в ООФ.}$$

Составляем интервалы монотонности: в $(-\infty; 0)$ $y' > 0$ — функция возрастает, в $(1; +\infty)$ $y' > 0$ — функция возрастает. Следовательно, точек экстремума нет.

Найдем точки перегиба:

$$y'' = \frac{-2(2x-1)}{x^2(x-1)^2}; \quad y'' \neq 0 \quad \text{в ООФ.}$$

Точек перегиба нет. Составляем интервалы выпуклости и вогнутости: в $(-\infty; 0)$ $y'' > 0$ — кривая вогнута; в $(1; +\infty)$ $y'' < 0$ — кривая выпукла.

По полученным результатам строим график функции (рис. 6).

Задание 9. Провести полное исследование функции $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ и построить график.

Решение. ООФ: $(-\infty; +\infty)$. Вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x\right) = -\frac{2}{3}.$$

Уравнение асимптоты: $y = x - \dfrac{2}{3}$.

Точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$ и $(1; 0)$.

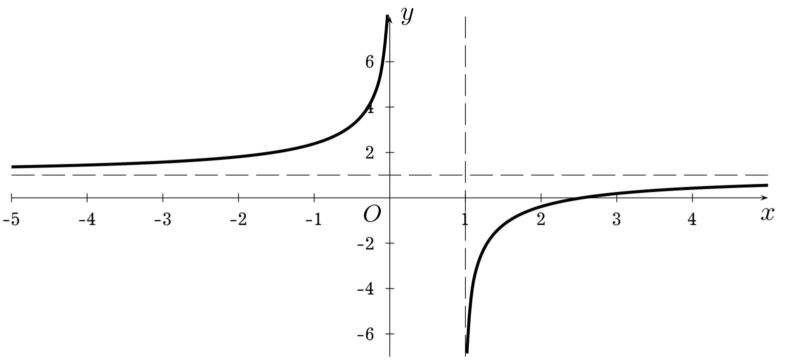

Рис. 6

Ищем критические точки:

$$y' = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}; \quad y' = 0 \text{ при } x_1 = \frac{1}{3};\ y' = \infty \text{ при } x_2 = 0 \text{ и } x_3 = 1.$$

Составляем интервалы монотонности: в $(-\infty; 0)$ $y' > 0$ — функция возрастает, в $(0; 1/3)$ $y' > 0$ — функция возрастает, в $(1/3; 1)$ $y' < 0$ — функция убывает, в $(1; +\infty)$ $y' > 0$ — функция возрастает. Следовательно, точка $(1/3; \sqrt[3]{4}/3)$ — точка максимума, точка $(1; 0)$ — точка минимума.

Найдем точки перегиба:

$$y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}; \quad y'' \neq 0 \text{ в ООФ}, \quad y'' = \infty \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 1.$$

Составляем интервалы выпуклости, вогнутости: в $(-\infty; 0)$ $y'' > 0$ — кривая вогнута, в $(0; 1)$ $y'' < 0$ — кривая выпукла, в $(1; +\infty)$ $y'' < 0$ — кривая выпукла. Следовательно, точки $(0; 0)$ и $(1; 0)$ — точки перегиба.

По полученным результатам строим график функции (рис. 7).

Задание 10. Провести полное исследование функции $y = \ln(\sqrt{2}\cos x)$ и построить график.

Решение. ООФ: $(-\pi/2; \pi/2)$. Функция периодическая: $T = 2\pi$. В точках $x = \pm\pi/2$ данная кривая имеет бесконечный разрыв, поэтому прямые $x = \pm\pi/2$ — вертикальные асимптоты. Наклонных асимптот нет.

Точки пересечения с осями координат: $(0; \ln\sqrt{2})$ и $(\pm\pi/4; 0)$.

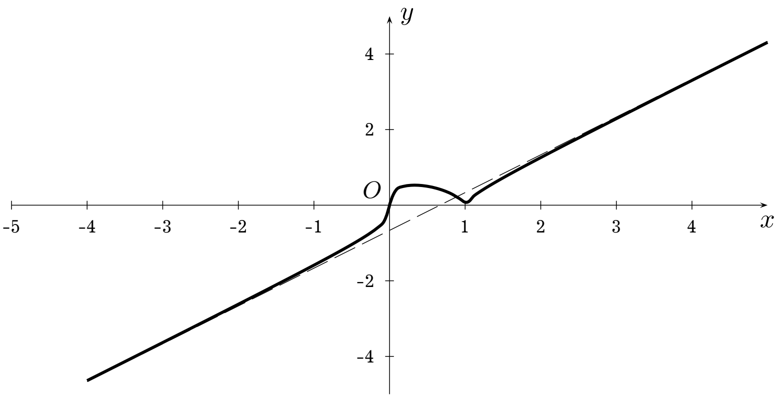

Рис. 7

Найдем критические точки:

$$y' = -\operatorname{tg} x; \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Составляем интервалы монотонности: в $(-\pi/2; 0)$ $y' > 0$ — функция возрастает, в $(0; +\pi/2)$ $y' < 0$ — функция убывает. Следовательно, точка $(0; \ln\sqrt{2})$ — точка максимума.

Найдем точки перегиба:

$$y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}, \quad y'' \neq 0 \quad \text{в ООФ},$$

следовательно, точек перегиба нет. В $(-\pi/2; \pi/2)$ $y'' < 0$ — кривая выпукла.

По полученным результатам строим график функции в $(-\pi/2; \pi/2)$ и периодически повторяем в ООФ (рис. 8).

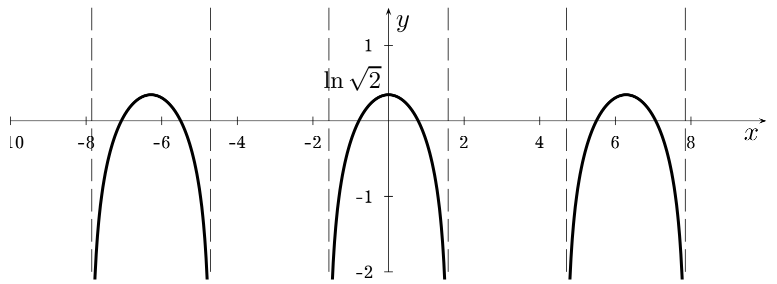

Рис. 8

ИНТЕГРАЛЫ

Справочный материал

Первообразной функции $f(x)$ в данном интервале называется функция $F(x)$, если в каждой точке этого интервала $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных называется **неопределенным интегралом** функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования соответствует формула интегрирования. Также результат интегрирования можно проверить обратным дифференцированием — должна получиться исходная подынтегральная функция.

Таблица основных интегралов:

1) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1;$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0;$

4) $\int e^x\,dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Свойства неопределенного интеграла:

1) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

2) интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов.

Методы интегрирования:

1) непосредственный, т.е. с помощью свойств и таблицы основных интегралов;

2) метод замены переменных:

а) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du,$

где $u = \varphi(x)$ — дифференцируемая функция;

б) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$

где $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция;

3) по частям, т.е. $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Примеры решения задач

Задание 1. Найти неопределенный интеграл: $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx.$

Решение. Полагаем

$$u = x, \quad dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{2\sin^2 x},$$

поэтому

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C.$$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-2}^{0} (x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\,dx.$$

Решение. Полагаем

$$u = x^2 + 2, \quad dv = e^{\frac{x}{2}}\,dx \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx, \quad v = 2e^{\frac{x}{2}},$$

поэтому

$$\int_{-2}^{0} (x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\,dx = (x^2+2)2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} - 4\int_{-2}^{0} xe^{\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{2}}\, dx, & v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| =$$

$$= (x^2+2)2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} - 8xe^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} + 16e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} = 20 - 44e^{-1}.$$

Задание 3. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx.$$

Решение.

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t}{t(t^2+1)} 2t\, dt =$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln(x+1) + C.$$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{2}^{9} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Решение.

$$\int\limits_{2}^{9} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x-1 = t^3 \\ dx = 3t^2\, dt \end{array} \right| = \int\limits_{1}^{2} \frac{t^3+1}{t}\, 3t^2\, dt = \frac{231}{10}.$$

Задание 5. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)}\, dx.$$

Решение.

$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)}\, dx = \int \left(2 - \frac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)} \right) dx.$$

$$\frac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$4x^2 + 24x + 8 = A(x+4)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+4).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем $A = -1$, $B = -1$, $C = 6$. Тогда

$$\int \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} - \frac{6}{x-2} \right) dx = 2x + \ln|x| +$$

$$+ \ln|x+4| - 6\ln|x-2| + C = 2x + \ln\left| \frac{x(x+4)}{(x-2)^6} \right| + C.$$

Задание 6. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}\,dx.$$

Решение.

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x+2)^3}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}\right)dx.$$

$$x^3+6x^2+13x+6 = A(x+2)^3+B(x-2)+C(x-2)(x+2)+D(x-2)(x+2)^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем $A=1$, $B=-3$, $C=2$, $D=-1$. Тогда

$$\int \left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{(x+2)^3}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{3}{2(x+2)^2} - \frac{2}{x+2} - \ln|x+2| + C.$$

Задание 7. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Решение.

$$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx.$$

$$2x^3+3x^2+3x+2 = (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

Сравнивая коэффициенты, найдем $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$. Тогда

$$\int \left(\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)(x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Задание 8. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{5+3\sin x}.$$

Решение.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t;\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x\,dx}{5+3\sin x}=\int\limits_0^1\frac{4t\,dt}{(5t^2+6t+5)(t^2+1)}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{At+B}{5t^2+6t+5}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\right)dt.$$

$$4t=(At+B)(t^2+1)+(Ct+D)(5t^2+6t+5).$$

Сравнивая коэффициенты, найдем $A=0$, $B=-\frac{10}{3}$, $C=0$, $D=\frac{2}{3}$. Тогда

$$\int\limits_0^1\left(\frac{-\frac{10}{3}}{5t^2+6t+5}+\frac{\frac{2}{3}}{t^2+1}\right)dt=-\frac{2}{3}\int\limits_0^1\frac{dt}{\left(t+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{25}}+\frac{2}{3}\int\limits_0^1\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{5t+3}{4}\bigg|_0^1+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}t\bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{5}{6}\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}.$$

Задание 9. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}}\frac{3\operatorname{tg}^2x-1}{\operatorname{tg}^2x+5}\,dx.$$

Решение.

$$\operatorname{tg}x=t;\quad x=\operatorname{arctg}t;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}}\frac{3\operatorname{tg}^2x-1}{\operatorname{tg}^2x+5}\,dx=\int\limits_0^{\sqrt{5}}\frac{3t^2-1}{(t^2+5)(t^2+1)}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{5}}\left(\frac{At+B}{t^2+5}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\right)dt.$$

$$3t^2-1=(At+B)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2+5).$$

Сравнивая коэффициенты, найдем $A = 0$, $B = 4$, $C = 0$, $D = -1$. Тогда

$$\int\limits_0^{\sqrt{5}} \left(\frac{4}{t^2+5} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \frac{4}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}}\bigg|_0^{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}}(\operatorname{arctg} 1 - 0) - (\operatorname{arctg}\sqrt{5} - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}\sqrt{5}.$$

Задание 10. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x \, dx.$$

Решение.

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x \, dx = \frac{1}{16}\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 6x \, dx = \frac{1}{16}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 12x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos 12x + \frac{1+\cos 24x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - \frac{\sin 12x}{6} + \frac{1}{2}x + \frac{\sin 24x}{48}\right)\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{64}\cdot\frac{3}{2}x\bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{64}.$$

Задание 11. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^2 \frac{4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2} \, dx.$$

Решение.

$$\int\limits_0^2 \frac{4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2} \, dx = \int\limits_0^2 \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}} - 1}{\left(1 + 4\sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}\right)(x+2)^2} \, dx =$$

$$= \left| \frac{2-x}{x+2} = t; \quad \frac{-(x+2)-(2-x)}{(x+2)^2}\,dx = dt; \quad \frac{dx}{(x+2)^2} = \frac{dt}{-4} \right| =$$

$$= \int\limits_1^0 \frac{(4\sqrt{t} - 1)\,dt}{(1+4\sqrt{t})(-4)} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{t} = u \\ dt = 2u\,du \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{4u-1}{1+4u} u \, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(u - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+4u}\right) du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} + \frac{1}{8}\ln|4u+1|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\ln 5}{16}.$$

Задание 12. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение.

$$\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t\,dt \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/6} 9\sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{9}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Задание 13. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = t^{15} \\ dx = 15t^{14}\,dt \end{array} \right| = 15\int \frac{\sqrt[5]{1+t^5}}{t^7}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1+t^5 = u^5t^5 \\ -5t^{-6}\,dt = 5u^4\,du \end{array} \right| = -15\int u^5\,du = -\frac{15}{6}u^6 = -\frac{5}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^6}.$$

Задание 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = 4-(y-1)^2$, $x = y^2-4y+3$.

Решение. Построим графики заданных функций (рис. 9). Площадь полученной фигуры равна

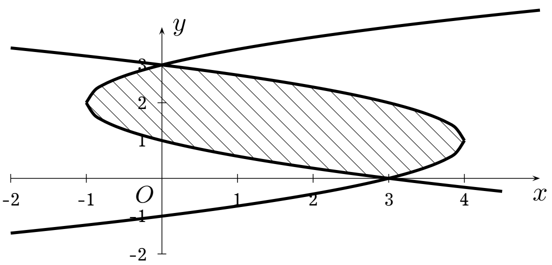

Рис. 9

$$S = \int\limits_0^3 (x_1(y) - x_2(y))\, dy = \int\limits_0^3 (4 - (y-1)^2 - y^2 + 4y - 3)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^3 (-2y^2 + 6y)\, dy = 9.$$

Задание 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями $x = 32\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, $x \geqslant 12\sqrt{3}$.

Решение. Построим фигуру (рис. 10). Найдем t_1 и t_2:

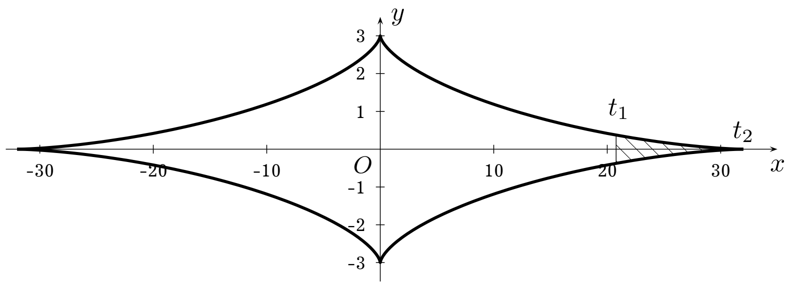

Рис. 10

$$32\cos^3 t = 12\sqrt{3}; \quad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad t_1 = \frac{\pi}{6}; \quad t_2 = 0.$$

$$S = 2\int\limits_{12\sqrt{3}}^{32} y\, dx = 2\int\limits_{\pi/6}^{0} 3\sin^3 t \cdot 32 \cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\, dt =$$

$$= 32 \cdot 18 \int\limits_0^{\pi/6} \sin^4 t \cos^2 t\, dt = 32 \cdot 18 \int\limits_0^{\pi/6} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= 72 \int\limits_0^{\pi/6} \sin^2 2t(1 - \cos 2t)\, dt = 72 \int\limits_0^{\pi/6} \left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)(1 - \cos 2t)\, dt = 6\pi - 9\sqrt{3}.$$

Задание 16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 6\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

Решение. Построим графики функций (рис. 11).

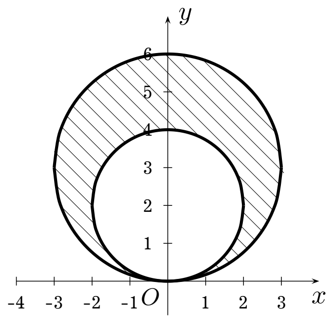

Рис. 11

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \left[(6\sin\varphi)^2 - (4\sin\varphi)^2\right] d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 20\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = 5\pi.$$

В декартовых координатах эти линии определяются уравнениями $x^2 + (y-3)^2 = 9$, $\quad x^2 + (y-2)^2 = 4$, поэтому площадь фигуры можно вычислить так:

$$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi.$$

Задание 17. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями в прямоугольной системе координат $y = \dfrac{1-e^x-e^{-x}}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Решение. Преобразуем заданную функцию:

$$y = \frac{1-e^x-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} - \operatorname{ch} x.$$

Путем преобразования графиков рисуем график данной функции (рис. 12).

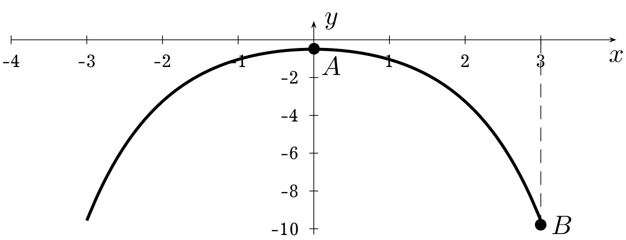

Рис. 12

$$L_{AB} = \int\limits_0^3 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int\limits_0^3 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int\limits_0^3 \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} 3.$$

Задание 18. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Решение.

$$L = \int\limits_0^\pi \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}\,dt = \int\limits_0^\pi \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt = \int\limits_0^\pi t^2\,dt = \frac{\pi^3}{3}.$$

Задание 19. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 6\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3$.

Решение. В декартовой системе координат эта кривая определяется уравнением $x + (y-3)^2 = 9$. Поэтому

$$L = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{(6\sin\varphi)^2 + (6\cos\varphi)^2}\,d\varphi = 6\int\limits_0^{\pi/3} d\varphi = 2\pi.$$

Задание 20. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, \quad z = 0, \quad z = 7.$$

Решение. Тело получается в результате сечения эллипсоида двумя плоскостями. В любом сечении, перпендикулярном оси z, получается фигура, ограниченная эллипсом, площадь которой $S(z) = \pi a(z) b(z)$. Тогда

$$V = \int\limits_0^7 S(z)\,dz = \pi\int\limits_0^7 a(z)b(z)\,dz = \pi\int\limits_0^7 \frac{4}{14}\sqrt{196-z^2}\cdot\frac{3}{14}\sqrt{196-z^2}\,dz =$$

$$= \pi\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{14}\cdot\int\limits_0^7 (196-z^2)\,dz = 77\pi.$$

Задание 21. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$; ось вращения Oy.

Решение. Если фигура вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения равен

$$V = \int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx = \pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y^2(x)\,dx.$$

Если вращение происходит вокруг оси Oy, то

$$V = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} x^2(y)\,dy.$$

В данной задаче из объема цилиндра высотой 1 и радиусом 2 надо вычесть объем полости, получаемой вращением части параболы (рис. 13):

$$V = \pi \cdot 2^2 - \left(\pi \int\limits_0^1 \left[(1+\sqrt{y})^2 - (1-\sqrt{y})^2 \right] dy \right) =$$

$$= 4\pi - \pi \int\limits_0^1 4\sqrt{y}\,dy = 4\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

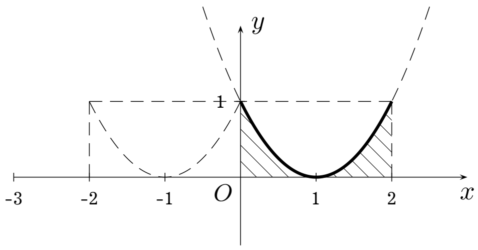

Рис. 13

Задание 22. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис. 14). Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2, $a = 7{,}2$ м, $b = 12{,}0$ м, $h = 5{,}0$ м.

Решение. Выбираем систему координат относительно плотины (рис. 14). Выберем на глубине x горизонтальную полоску шириной dx и площадь dS. Согласно закону Паскаля, сила P, с которой жидкость давит на элементарную площадку, равна

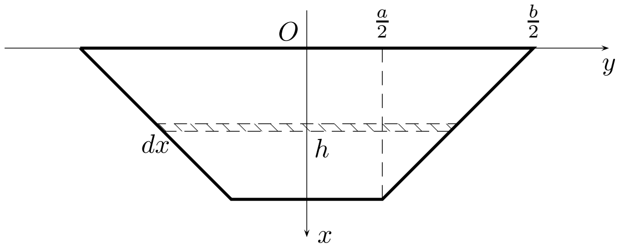

Рис. 14

$dP = \rho g x \, dS(x)$. Так как фигура симметрична относительно оси Ox, то

$$dS(x) = 2y(x)\,dx, \quad y(x) = \frac{a}{2} + \left(1 - \frac{x}{h}\right)\frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{b-a}{h}x\right).$$

Тогда

$$dP = \rho g x \left(b - \frac{b-a}{h}x\right) dx,$$

и сила давления жидкости на всю плотину равна

$$P = \int_0^h dP = \rho g \int_0^h x\left(b - \frac{b-a}{h}x\right) dx = \rho g \left(\frac{bh^2}{2} - \frac{b-a}{h}\frac{h^3}{3}\right) =$$

$$= \rho g h^2 \left(\frac{b}{6} + \frac{a}{3}\right) = 10^4 \cdot 25 \cdot \left(\frac{12}{6} + \frac{7{,}2}{3}\right) = 1{,}1 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Задание 23. Определить работу, Дж, совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_З = 6380$ км. Ускорение свободного падения у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2, $m = 3{,}0$ т, $H = 650$ км.

Решение. Согласно закону всемирного тяготения, сила F, действующая на тело массой m, равна $F = k\dfrac{mM}{r^2}$, где M — масса Земли, r — расстояние массы m от центра Земли, k — гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т.е. при $r = R_З$, имеем $F = mg$, то $mg = k\dfrac{mM}{R_З^2}$. Отсюда находим $kM = gR_З^2$, а потому $F = mg\dfrac{R_З^2}{r^2}$. Следовательно, искомая работа равна

$$A = \int\limits_{R_З}^{R_З+H} F\,dr = \int\limits_{R_З}^{R_З+H} mgR_З^2 \frac{dr}{r^2} = mgR_З^2 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_З}^{R_З+H} =$$

$$= mgR_З \frac{H}{R_З + H} = 3 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 6380 \cdot 10^3 \cdot \frac{650 \cdot 10^3}{6380 \cdot 10^3 + 650 \cdot 10^3} =$$

$$= 1{,}77 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

Задание 24. Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу, Дж, при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 15). Принять $H = 2{,}0$ м, $h = 1{,}0$ м, $R = 0{,}4$ м.

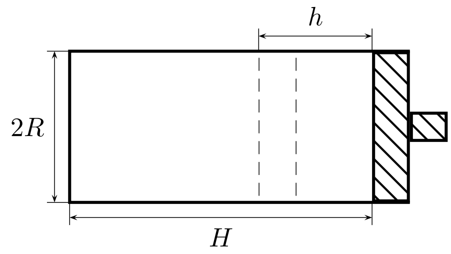

Рис. 15

Решение. Для изотермического процесса справедливо $pV = C = \text{const}$. Найдем $C = p_0V_0 = p_0\pi R^2 H$. Элементарная работа силы F давления газа при перемещении поршня на dh равна

$$dA = -F\,dh = -pS\,dh = -p\pi R^2\,dh = -p\,d(\pi R^2 h) = -p\,dV.$$

Тогда

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} dA = -\int\limits_{V_1}^{V_2} p\,dV = C \int\limits_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = C \ln V \Big|_{V_2}^{V_1} =$$

$$= C \ln \frac{V_1}{V_2} = C \ln \frac{H}{H - h} = p_0 \pi R^2 H \ln \frac{H}{H - h} =$$

$$= 103{,}3 \cdot 10^3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4^2 \cdot 2 \cdot \ln 2 = 7{,}19 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Рекомендуемая литература

1. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. — СПб.: Лань, 2005. — 240 с.

2. *Прокопьева Л. К.* Дифференцирование. Графики. Интегралы. Решение типовых расчетов : метод. указания / Л. К. Прокопьева, Г. М. Филиппова, Е. К. Краснова ; Чуваш. ун-т. — Чебоксары, 1987. — 28 с.

Оглавление

Учебное издание

БЫКОВА Алективна Николаевна
ВОЛОДИНА Евгения Валерьевна
ФРОЛОВ Сергей Иванович
ФИЛИППОВА Галина Михайловна

Дифференцирование. Графики. Интегралы

Методические указания к типовым расчетам

Отв. за выпуск Н. А. Романова
Компьютерный набор и верстка В. Г. Сытина

Подписано в печать 18.03.09. Формат 60×84/16. Бумага газетная.
Гарнитура Журнальная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,96. Тираж 500 экз. Заказ № 130.

Чувашский государственный университет
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15