Алгебра и геометрия

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

Алгебра и геометрия

Учебное пособие

Чебоксары 2018

УДК 512(075.8)+514(075.8)
ББК В15я73+В181я73
А61

Рецензенты:

А. К. Ярдухин — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического образования БУ ЧР ДПО «Чувашский республиканский институт образования»;

Т. И. Рыбакова — канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «ЧГПУ им. И. Я. Яковлева»

Авторы-составители:
Е. В. Володина, И. И. Ильина

А61 **Алгебра** и геометрия: учеб. пособие / авт.-сост. Е. В. Володина, И. И. Ильина. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2018. — 232 с.

ISBN 978-5-7677-2710-0

Изложены основные теоретические сведения по алгебре и геометрии, предусмотренные государственным образовательным стандартом высшего образования и программой курса для технических специальностей. Приведены задачи и примеры тестовых заданий федерального интернет-экзамена.

Для студентов младших курсов технических факультетов и преподавателей вузов.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук, доцент А. С. Сабиров

Утверждено Учебно-методическим советом университета

ISBN 978-5-7677-2710-0

УДК 512(075.8)+514(075.8)
ББК В15я73+В181я73

Предисловие

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и других видах исследований. Для многих отраслей знаний она стала не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством четкой формулировки возникающих проблем. Задачи по алгебре и геометрии являются базовыми и необходимыми при освоении более сложного математического материала, вызывают интерес к изучению математики, играют важную роль в дальнейшей подготовке инженера.

Данное пособие предназначено для студентов инженерно-технических направлений и специальностей. Оно состоит из десяти глав и содержит основные теоретические сведения по базовым разделам алгебры и геометрии: «Комплексные числа», «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Векторы», «Системы координат. Действия над векторами в координатах», «Прямая на плоскости», «Кривые второго порядка на плоскости», «Плоскость и прямая в пространстве», «Поверхности второго порядка», «Линейные операторы». В каждой главе изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, приводятся их подробные решения, большая часть которых снабжена иллюстрациями. Содержание задач в данном пособии соответствует программе вузов для инженерных технических направлений и специальностей. Существенная часть материала, изучаемого в курсе алгебры и геометрии, востребована при обучении по программе технических кафедр. Пособие может быть использовано студентами для самостоятельного изучения соответствующего материала, а также проверки остаточных знаний.

Одним из важных моментов при аккредитации вуза является проведение тестирования в рамках федерального интернет-экзамена. Следует правильно выбрать методику подготовки к интернет-тестированию по соответствующим разделам высшей математики, предполагающей восстановление в памяти основных математических понятий. Для этой цели необходима специальная математическая литература. Данное пособие содержит примеры задач интернет-тестирования по основным разделам алгебры и геометрии, что дает возможность студентам и преподавателям ознакомиться с требованиями и структурой тестовых материалов, формами тестовых заданий, выполняемыми действиями по выбору правильного ответа на конкретных примерах и другими важными особенностями тестов. Например, в последнее время при проведении итогового тестирования широко используют кейс-задания практической направленности. Кейс-задания включают три уровня сложности, решения которых взаимосвязаны. В пособии приведены примеры некоторых кейс-заданий по алгебре и геометрии. Применение метода кейсов позволяет включить в учебный процесс элементы профессиональной деятельности, обеспечивает переход учебных ситуаций к профессиональным, где требуется использовать знания и соответствующие компетенции, формируемые при обучении математике.

Глава 1
Комплексные числа

1.1. Система комплексных чисел

Арифметика изучает действия над положительными целыми числами (натуральными числами). Во множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ выполнимы, в общем случае, две арифметические (алгебраические) операции: *сложение* и *умножение*.

Алгебра продолжает изучение множества натуральных чисел и начинается, по существу, с введения отрицательных чисел. Это позволяет ввести на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ следующую операцию: нахождение *разности* двух чисел.

На протяжении курса элементарной алгебры несколько раз происходит такое обогащение запаса чисел. Более широкой системой чисел, чем $\mathbb{Z}$, является система рациональных чисел $\mathbb{Q}$, состоящая из всех целых чисел и всех дробных чисел, как положительных, так и отрицательных. Четвертая операция *деления* на ненулевое число определена во множестве $\mathbb{Q}$, а также во множестве действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$. В этих множествах основными операциями считаются сложение и умножение, а вычитание и деление определяются как обратные к основным. Кроме того, умножение позволяет ввести операцию возведения в натуральную степень, однако обратная операция извлечения корня определена не всегда. Например, $\sqrt{-n^2} \notin \mathbb{R}$. Это приводит к тому, что не всякое уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ разрешимо во множестве действительных чисел. Например, уравнение $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ при $b \neq 0$ по известной формуле решения квадратного уравнения имеет решения вида

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)} = a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm b\sqrt{-1}\,.$$

Простейшее из квадратных уравнений, не имеющих корней среди действительных чисел, есть уравнение $x^2 + 1 = 0$.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат xOy. Обозначим точки этой плоскости буквами z, w, p, ... и запишем точку z с абсциссой x и ординатой y через (x, y). Две точки (a, b) и (c, d) называются *равными* и пишут $(a, b) = (c, d)$, если $a = c$ и $b = d$.

Комплексными числами называются упорядоченные пары вида (a, b), где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, для которых определены действия сложения и умножения по следующим правилам:

— *суммой комплексных чисел* $z = (a, b)$ и $w = (c, d)$ называется комплексное число $(a + c, b + d)$ и обозначается $z + w$ или $(a, b) + (c, d)$;

— *произведением комплексных чисел* $z = (a, b)$ и $w = (c, d)$ называется комплексное число $(a \cdot c - b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c)$ и обозначается $z \cdot w$ или $(a, b) \cdot (c, d)$.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

1.2. Свойства действий над комплексными числами

Верны следующие свойства операций во множестве комплексных чисел (аналогичные свойствам действий над действительными числами):

для любых z, w и $v \in \mathbb{C}$:

1) $z + w = w + z$ (*коммутативность сложения*);

2) $z + (w + v) = (z + w) + v$ (*ассоциативность сложения*);

3) существует такое комплексное число $\mathbf{0} = (0, 0)$, что $z + \mathbf{0} = z$ (*существование нулевого комплексного числа*);

4) существует такое комплексное число $-z$, что $z + (-z) = \mathbf{0}$ (*существование противоположного комплексного числа*);

5) $z \cdot w = w \cdot z$ (*коммутативность умножения*);

6) $z \cdot (w \cdot v) = (z \cdot w) \cdot v$ (*ассоциативность умножения*);

7) существует такое комплексное число $\mathbf{1} = (1, 0)$, что $z \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot z = z$ (*существование единицы*);

8) для любого $z \neq \mathbf{0}$ существует такое комплексное число z^{-1}, что $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = \mathbf{1}$ (*существование обратного комплексного числа*);

9) $z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$ (*дистрибутивность слева умножения относительно сложения*);

10) $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.

Свойства (3–4) позволяют доказать разрешимость уравнения $p + z = q$, а (7–8) — уравнения $p \cdot z = q$ при $p \neq \neq \mathbf{0}$ относительно неизвестного комплексного числа z с известными комплексными числами p и q. Решением уравнения $p + z = q$ является комплексное число $z = = q + (-p)$, а уравнения $p \cdot z = q$ при $p \neq \mathbf{0}$ — $z = p^{-1} \cdot q$. Это дает возможность определить разность $z - w = z + (-w)$ и частное $z/w = z \cdot w^{-1}$.

1.3. Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Система комплексных чисел является расширением системы действительных чисел. Действительно, пусть точке, лежащей на оси абсцисс, т.е. точке вида $(a, 0)$, поставлено в соответствие действительное число a. Это соответствие является взаимно однозначным соответствием между рассматриваемым множеством комплексных чисел и множеством всех действительных чисел. Применение к этим числам формул сложения и умножения комплексных чисел дает равенства

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{и} \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Таким образом, множество комплексных чисел вида $(a, 0)$, рассматриваемое как часть системы комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам ничем не отличается от системы действительных чисел. Это позволяет не различать комплексное число $(a, 0)$ и действительное число a, т.е. полагать $(a, 0) = a$. Тогда нуль $(0, 0)$ и единица $(1, 0)$ системы комплексных чисел оказываются обычными действительными числами 0 и 1.

Среди комплексных чисел содержится такое число, квадрат которого равен действительному числу -1. Действительно,

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Обозначим его i, так что $i^2 = -1$. Кроме того,

$$b \cdot i = (b,0)(0, 1) = (0, b).$$

Пусть (a, b) — комплексное число. Тогда

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

Эта форма записи комплексного числа называется *алгебраической формой представления комплексного числа*. Комплексное число i называется *мнимой единицей*, а числа вида bi — *чисто мнимыми числами*.

В записи комплексного числа z в алгебраической форме $z = a + bi$ число a называется *действительной частью комплексного числа* z и обозначается $\operatorname{Re} z$, bi — его *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im} z$; число b называется *коэффициентом мнимой части комплексного числа* z.

Комплексное число $a - bi$, обозначаемое $\bar{z}$, называется *комплексным числом, сопряженным комплексному числу* z.

Действительное число $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$.

Верны свойства:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; б) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

в) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; г) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

д) $|\bar{z}| = |z|$; е) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$;

ж) $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z$; з) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{|w|^2}$;

и) $z\bar{z} = |z|^2$; к) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

1.4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, умножение, вычитание и деление двух комплексных чисел $z = a + bi$ и $w = c + di$, записанных в алгебраической форме, производятся следующим образом:

а) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

б) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;

в) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

г) $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$.

Замечания.

1. Умножение удобно осуществлять по правилу умножения двучленов и, учитывая, что $i^2 = -1$, затем привести подобные члены.

2. При делении вначале числитель и знаменатель умножаются на комплексное число, сопряженное к знаменателю, при этом знаменатель станет равным квадрату модуля знаменателя, затем в числителе полученные сомножители перемножаются.

Пример 1.1. Выполнить указанные действия:

1) $(2+3i)+(3-2i)$; 2) $(-4+5i)-(3+2i)$;

3) $(5-6i)(4+i)$; 4) $\dfrac{2i}{1-i}$.

Решение.

1) $(2+3i)+(3-2i) = (2+3)+(3-2)i = 5+i$;

2) $(-4+5i)-(3+2i) = (-4-3)+(5-2)i = -7+3i$;

3) $(5-6i)(4+i) = 5\cdot 4 - 6i^2 + (5-6\cdot 4)i = 26-19i$;

4) $\dfrac{2i}{1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{2} = -1+i$. □

1.5. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат xOy (рис. 1.1). Комплексному числу $z = x + yi$ поставим в соответствие точку M плоскости xOy с абсциссой x и ординатой y, т.е. точку $M(x, y)$. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами по этому способу, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс этой плоскости называется *действительной осью*, так как ее точки изображают действительные числа; соответственно ось ординат комплексной плоскости называется *мнимой осью*. Кроме того, комплексному числу $z = x + yi$ можно поставить в соответствие радиус-вектор точки M, т.е. вектор $\overline{OM}$.

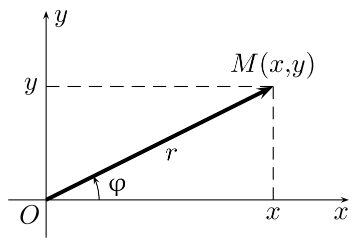


Рис. 1.1

Совместно с декартовой системой координат рассмотрим полярную систему координат, совместив ее полюс с началом координат, а полярную ось направив по оси Ox. Тогда комплексному числу $z \neq \mathbf{0}$ будут соответствовать полярные координаты r и φ точки M, где r совпадает с модулем комплексного числа z ($r = |z|$). Число φ называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Модуль комплексного числа $z = \mathbf{0}$ равен нулю; его аргумент не определен. В дальнейшем комплексное число $z = \mathbf{0}$ обозначается как 0, а $z = \mathbf{1}$ — как 1.

Непосредственно из рис. 1.1 видно, что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Кроме того,

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,$$

а также

$$\begin{cases} a = r \cos \varphi, \\ b = r \sin \varphi. \end{cases} \tag{1.1}$$

Аргумент комплексного числа z многозначен и определяется числом z лишь с точностью до значения, кратного числу 2π. Возможно представление аргумента комплексого числа через *главное значение* $\arg z$, которое определяется как значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Во многих задачах может оказаться более удобным *частное значение* аргумента $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

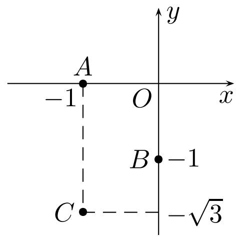


Рис. 1.2

Пример 1.2. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

1) -1; 2) $-i$; 3) $-1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Числу -1 ставится в соответствие точка $A(-1; 0)$, числу $-i$ — точка $B(0; -1)$, числу $-1 - i\sqrt{3}$ — точка $C(-1; -\sqrt{3}\,)$ (рис. 1.2).

1) $|-1| = 1$, $\varphi = \pi$; 2) $|-i| = 1$, $\varphi = \dfrac{3}{2}\pi$;

3) $|-1-i\sqrt{3}\,| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3}\,)^2} = 2,$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi. \qquad \square$$

ε-окрестностью точки z_0 называется множество точек z комплексной плоскости, таких, что $|z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Равенство $|z - z_0| = R$ задает задает окружность с центром в точке z_0 и радиусом R.

Пример 1.3. Какое множество на плоскости комплексного переменного определяется условием $\operatorname{Im} z^2 > 2$?

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию $2xy > 2$, т.е. $xy > 1$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем четвертях над и под гиперболой $xy = 1$ (рис. 1.3). $\square$

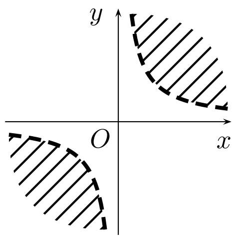


Рис. 1.3

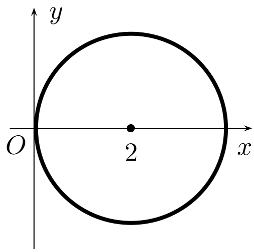


Рис. 1.4

Пример 1.4. Какая кривая определяется следующим уравнением: $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$?

Решение. Пусть $z = x + iy$. Имеем $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$, т.к.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

По условию

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Это — окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (рис. 1.4). $\square$

1.6. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Пользуясь формулами (1.1), всякое комплексное число $z = a + bi \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где r — модуль комплексного числа z; φ — аргумент комплексного числа z. Это представление называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Пример 1.5. Представить комплексное число $-2 + 2i$ в тригонометрической форме.

Решение. Пусть $z = -2 + 2i$. Тогда

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right). \qquad \square$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, получим *показательную форму комплексного числа*:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

1.7. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах

Пусть два комплексных числа z и w представлены в тригонометрической форме:

$$z = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad w = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$\begin{gathered} z \cdot w = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cdot i \sin \varphi_2 + \\ + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{gathered}$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их *модули перемножаются*, а *аргументы складываются*:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Пример 1.6. Найти произведение комплексных чисел $z = -2+2i$ и $w = -1-i\sqrt{3}$, представив их предварительно в тригонометрической форме.

Решение. Пусть $z = -2+2i$. Тогда (см. п. 1.6)

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Пусть $w = -1-i\sqrt{3}$. Тогда $|w| = 2$, $\varphi = 4\pi/3$ (см. п. 1.5). Следовательно,

$$w = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Отсюда

$$z\cdot w = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{12} + i\sin\frac{25\pi}{12}\right) =$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 4\sqrt{2}\,e^{i\pi/12}. \qquad \square$$

Пусть два комплексных числа z и w представлены в тригонометрической форме:

$$z = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad w = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_1\cdot i\sin\varphi_2 +$$
$$+ i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Следовательно, при делении комплексных чисел их *модули делятся*, а *аргументы вычитаются*:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Пример 1.7. Найти частное от деления комплексного числа $z = -2 + 2i$ на комплексное число $w = -1 - i\sqrt{3}$, представив каждое из них предварительно в показательной форме.

Решение. Пусть $z = -2 + 2i$. Тогда (см. п. 1.6)

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}.$$

Пусть $w = -1 - i\sqrt{3}$. Тогда $|w| = 2$, $\varphi = 4\pi/3$ (см. п. 1.5). Следовательно,

$$w = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2e^{4\pi i/3}.$$

Отсюда

$$\frac{z}{w} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}}{2e^{4\pi i/3}} = \sqrt{2}\,e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{7\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right). \qquad \square$$

1.8. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра

Применяя формулу умножения числа на самого себя в тригонометрической форме, можно прийти к *формуле Муавра*:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

которая верна при всех целых значениях n.

Рассмотрим возведение комплексного числа в отрицательную степень $-n$:

$$z^{-n} = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-n} = \frac{1}{(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n} =$$

$$= \frac{1}{r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{r^{-n}}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} =$$

$$= r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)).$$

Пример 1.8. Найти пятую степень комплексного числа $z = -2 + 2i$.

Решение. Пусть $z = -2 + 2i$. Тогда
$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$
Следовательно,
$$z^5 = (2\sqrt{2}\,)^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(5\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right).$$ □

Пример 1.9. Возвести в минус третью степень комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $z = -1 - i\sqrt{3}$. Тогда
$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$
Следовательно,
$$z^{-3} = 2^{-3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{8}(\cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi)) =$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 0 + i\sin 0) = \frac{1}{8}.$$ □

Формула Муавра
$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$
при $r = 1$ позволяет получить формулы для синуса и косинуса кратных углов. Например, соотношение
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi =$$
$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$$
приводит к формулам
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi,$$
$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

1.9. Извлечение корней из комплексного числа

Пусть требуется извлечь корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда
$$w = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

т.е.
$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$
Отсюда следует, что $r = \rho^n$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом,
$$w = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
где $k \in \mathbb{Z}$. Среди них n различных корней, которые можно получить, задавая n последовательных значений $k = 0$, 1, ..., $n - 1$.

Таким образом, корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n и только n различных значений w_0, w_1, ..., w_{n-1}, которые вычисляются по следующей формуле:
$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
где $k = 0$, 1, ..., $n - 1$.

Пример 1.10. Найти все значения $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$.

Решение. Представим комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме. Тогда $|z| = 2$, $\varphi = 5\pi/3$. Следовательно,
$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$
Тогда
$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} + i),$$
$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \pi\right) + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i).$$
□

Пример 1.11. Найти все значения $\sqrt[4]{-i}$.

Решение. Представим комплексное число $z = -i$ в тригонометрической форме. Тогда $|z| = 1$, $\varphi = 3\pi/2$. Следовательно,
$$z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Тогда

$$w_0 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} = \left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\frac{7\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\frac{11\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\frac{15\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right). \quad \square$$

1.10. Комплексные корни из единицы

Корнями n-й степени из единицы называются значения $\sqrt[n]{1}$. Формула вычисления корней из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, для числа $1 = \cos 0 + i\sin 0$ дает

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

где $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

На комплексной плоскости корни n-й степени из единицы расположены на окружности единичного круга и делят ее на n равных дуг. Одной из точек деления служит число 1, расположенное на действительной оси. Отсюда следует, что те из корней n-й степени из единицы, которые не являются действительными, попарно сопряжены.

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и -1.

Кубический корень из единицы имеет три значения:

$$1; \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Корень четвертой степени из единицы имеет четыре значения: 1, i, -1, $-i$.

Так как любое положительное действительное число a можно представить в виде $a \cdot 1$, то это представление можно использовать для нахождения корней из действительных чисел. Аналогично любое отрицательное действительное число a можно представить в виде $-a \cdot 1$.

Пример 1.12. Найти все значения $\sqrt[3]{5}$.

Решение.

$$w_0 = \sqrt[3]{5} \cdot 1 = \sqrt[3]{5},$$

$$w_1 = \sqrt[3]{5} \cdot \varepsilon_1 = \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[3]{5}}{2} + i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{5}}{2},$$

$$w_2 = \sqrt[3]{5} \cdot \varepsilon_2 = \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[3]{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{5}}{2}.$$

□

Пример 1.13. Найти все значения $\sqrt[3]{-5}$.

Решение.

$$w_0 = -\sqrt[3]{5} \cdot 1 = -\sqrt[3]{5},$$

$$w_1 = -\sqrt[3]{5} \cdot \varepsilon_1 = -\sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{5}}{2},$$

$$w_2 = -\sqrt[3]{5} \cdot \varepsilon_2 = -\sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2} + i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{5}}{2}.$$

□

Упражнения

1.1. Выполнить указанные действия:

а) $(1+i)(1-3i)$; б) $\dfrac{2}{-i} + i(1+i)$;

в) $\dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{i}{2-i}$; г) $(1+i)(\sqrt{5} - 2i)$;

д) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$; е) $\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{1-i}{1+i} \cdot \dfrac{2-2i}{1-2i}$.

1.2. Произвести действия над комплексными числами в алгебраической форме:

а) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$; б) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^2$;

в) $(1+i)(2+i)+\dfrac{5}{1+2i}$.

1.3. Вычислить степени i:

а) i^{36}; б) i^{46}; в) i^{125}; г) i^{239}.

1.4. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

а) $4+3i$; б) $-2+2\sqrt{3}\,i$;

в) $-7-i$; г) $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$;

д) $4-3i$; е) $\cos\alpha-i\sin\alpha\left(\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

1.5. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

а) 1; б) $-i$; в) $-1+i$;

г) $1+i\sqrt{3}$; д) -5; е) $\sqrt{3}-i$.

1.6. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

а) $(1+i\sqrt{3})(i+1)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;

б) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$; в) $(1+i)^{25}$;

г) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$; д) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{50}$.

1.7. Решить уравнения относительно вещественных переменных x и y ($x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$):

а) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$;

б) $2+5ix-3yi=14i+3x-5y$;

в) $\dfrac{6x-iy}{5+2i}=\dfrac{15}{8x+3yi}$ (при $x\neq 0$, $y\neq 0$).

1.8. Извлечь квадратные корни:

а) $\sqrt{8+6i}$; б) $\sqrt{3-4i}$; в) $\sqrt{-15+3i\sqrt{11}}$.

1.9. Решить уравнения над множеством комплексных чисел:

а) $z^2-(2+i)z+(-1+7i)=0$;

б) $z^2-(3-2i)z+(5-5i)=0$;

в) $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

1.10. Извлечь корни:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[3]{2+2i}$; в) $\sqrt[4]{-4}$;

г) $\sqrt[6]{1}$; д) $\sqrt[6]{-27}$.

1.11. Вычислить:

а) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; б) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; в) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

1.12. Найти все значения корней и построить их на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{27i}$; в) $\sqrt[5]{-2+2i}$; г) $\sqrt[6]{-8}$.

1.13. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих заданным неравенствам:

а) $\operatorname{Im} z < -1$; б) $-1 < \operatorname{Re} z < 5$;

в) $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{6}$; г) $2 < |z-1+2i| < 4$;

д) $|z-1| + |z-3| < 3$; е) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$;

ж) $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) < \dfrac{1}{2}$; з) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$.

1.14. Решить систему уравнений над множеством комплексных чисел ($x, y \in \mathbb{C}$):

а) $\begin{cases} (2+i)x + (1-i)y = 1, \\ ix + (2-i)y = i; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 1+3i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 7. \end{cases}$

1.15. Решить уравнения над множеством комплексных чисел:

а) $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$; б) $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$.

Примеры тестовых заданий

1.1. Найти мнимую часть комплексных чисел:

а) $z = (3+i)^2$; б) $z = (4+3i)(-7-i)$;

в) $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^4$.

1.2. Найти действительную часть комплексных чисел:

а) $z = \dfrac{2+i}{3-2i}$; б) $z = (4-6i)(5-2i)$;

в) $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^5$.

1.3. Комплексное число $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ можно представить в виде...

1) $-2e^{i\frac{\pi}{4}}$; 2) $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

3) $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; 4) $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.4. Если z — комплексное число, $\operatorname{Im} z = 10$, $\arg z = \arcsin(5/6)$, то модуль числа z равен...

1) 10; 2) 12; 3) -12; 4) 0.

1.5. Корнями комплексного числа $z = \sqrt{i}$ являются...

1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

1.6. Если $i^2 = -1$, то $(1+i)^3 =$...

1) $2+2i$; 2) $2i-2$; 3) $-2-2i$; 4) $2-2i$.

1.7. Для комплексного числа $(-1-i)^3$ найти ему сопряженное:

1) $2-2i$; 2) $2+2i$; 3) $-2+2i$; 4) $-2-2i$.

1.8. Пусть $z = 1+i$. Известно, что $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \pi/4$, тогда $(1+i)^4$ равно...

1) $-2\sqrt{2}$; 2) -4; 3) $2\sqrt{2}$; 4) 4.

1.9. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = \dfrac{2}{1+i}$; б) $z = -\sqrt{3} - i$.

1.10. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{12} - 2i$; б) $z = -\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

1.11. Расположить комплексные числа в порядке возрастания их модулей:

1) $2+2i$; 2) i; 3) $-2-i$; 4) $-1+i$.

1.12. Установить соответствие между комплексными числами z и их модулями ρ:

$\rho = 8$	1) $z = 5 - \sqrt{24}\,i$
$\rho = -8$	2) $z = -3\sqrt{2} + \sqrt{7}\,i$
$\rho = 5$	3) $z = -8$
$\rho = 7$	
$\rho = 3$	

1.13. Число i^{11} равно...

1) i; 2) -1; 3) $-i$; 4) 1.

1.14. Указать соответствие между областями и их геометрическими интерпретациями:

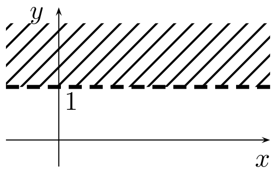
1) $-1 < \operatorname{Re} z < 1$

2) $\operatorname{Re} z > 1$

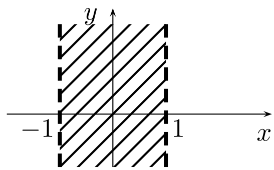
3) $\operatorname{Im} z > 1$

4) $\operatorname{Re} z < 1$

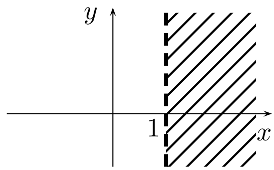
а)



б)



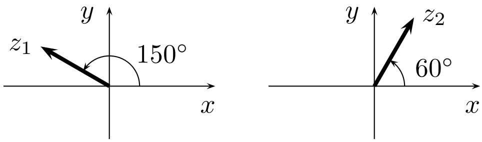
в)



1.15. Найти модуль числа z, если z — комплексное число, $\operatorname{Re} z = 14$, $\arg z = \arccos(7/8)$.

1) 16; 2) -16; 3) 0; 4) 12.

1.16. Даны два комплексных числа z_1 и z_2:



Тогда аргумент частного $\arg(z_1/z_2)$ в градусах равен...

1) 210°; 2) 90°; 3) 100°; 4) 80°.

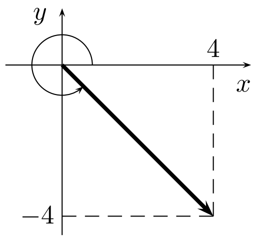
1.17. Дано комплексное число $z = 1 - i$. Установить соответствие между операциями над данным числом:

1) $z \cdot \bar{z}$; 2) $\dfrac{z}{|z|}$; 3) $2z + \bar{z}$; 4) $z - \bar{z}$

и результатами их выполнения:

а) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$; б) $3 - i$; в) $-2i$; г) 2; д) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

1.18. На рисунке приведено геометрическое изображение комплексного числа:



Его тригонометрическая форма записи имеет вид...

1) $4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$; 2) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.19. Решением уравнения $(1 + 3i)z - i + 2 = 0$ является комплексное число...

1) $\dfrac{1 + 7i}{8}$; 2) $\dfrac{-5 + 7i}{10}$; 3) $\dfrac{1 + 7i}{10}$; 4) $\dfrac{-1 - 7i}{8}$.

1.20. Если z — комплексное число и $z - 2 + \dfrac{64}{z} = 0$, то модуль числа z равен...

1) 10; 2) 0; 3) 8; 4) 4.

Глава 2
Матрицы и определители

2.1. Основные понятия

Матрицей (*числовой матрицей*) *размера* $m \times n$ (*размерности* m *на* n), *порожденной* $m \cdot n$ *числами*

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn},$$

расположенными в m *строках и* n *столбцах*, называется таблица, обозначаемая символом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij}, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*; набор чисел $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ *образует* i*-ю строку*; набор чисел $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ — j*-й столбец*; число a_{ij} *расположено на пересечении* i*-й строки и* j*-го столбца матрицы* (в i-й строке и j-ом столбце матрицы). Например, для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ее элементами являются $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 2$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 1$; число $a_{31} = 0$ расположено в третьей строке и первом столбце. В данной главе числа a_{ij} считаются принадлежащими полю действительных чисел $\mathbb{R}$.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, ..., или с указанием размера — $A_{m\times n}$, $B_{m,n}$, D_m^n, ..., или с указанием элементов матрицы — $A(a_{ij})$, (a_{ij}).

Матрицы $A(a_{ij})$ и $B(b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. В противном случае матрицы называются *неравными*. Равенство двух матриц A и B обозначается $A = B$; их неравенство — $A \neq B$. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

не равна матрице

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

так как элементы $a_{23} = 2$ и $b_{23} = 3$, а также a_{32} и b_{32} не совпадают.

Матрицей-строкой (вектор-строкой, вектором) называется матрица, состоящая из одной строки. *Матрицей-столбцом* (вектор-столбцом) называется матрица, состоящая из одного столбца. В том случае, когда не возникают разночтения, оба эти виды матриц называются просто *векторами* соответствующей размерности. Вектора находят широкое применение при решении систем линейных уравнений и в векторном исчислении.

Нулевой матрицей (нуль-матрицей) называется матрица, у которой все элементы равны нулю. Ее обозначают в виде некоторого нуля без указания размерности или с указанием размерности: O, θ, Θ, $O_{m,n}$ и т.д.

2.2. Квадратные матрицы

Матрица называется *квадратной порядка* n, если у нее число строк m равно числу столбцов n. Квадратная матрица может быть обозначена с указанием у нее числа строк или столбцов n: A_n.

В общем же случае матрица называется *прямоугольной*. Про прямоугольную матрицу размера $m \times n$ можно говорить, что дана (m, n)-матрица ($m \times n$-матрица) (читается: mn-матрица).

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *верхнетреугольной матрицей*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является верхнетреугольной, так как $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *строго верхнетреугольной матрицей*, если $a_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является строго верхнетреугольной, так как

$$a_{11} = a_{21} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0.$$

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *единичной верхнетреугольной матрицей*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ и $a_{ii} = 1$ для всех i. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является единичной верхнетреугольной, так как

$$a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1.$$

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *нижнетреугольной матрицей*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *строго нижнетреугольной матрицей*, если $a_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *единичной нижнетреугольной матрицей*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$ и $a_{ii} = 1$ для всех i.

Диагональными элементами квадратной матрицы называются элементы, у которых номер строки равен номеру столбца, т.е. элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}. Эти элементы образуют *главную диагональ* квадратной матрицы порядка

n; например, для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

главную диагональ образуют элементы -1, 6, 4.

Побочную диагональ квадратной матрицы порядка n образуют элементы a_{1n}, $a_{2\,n-1}$, ..., a_{n1}; например, для этой же матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

побочную диагональ образуют элементы 1, 6, 0.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны 0. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

является диагональной матрицей третьего порядка.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1; например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица четвертого порядка.

2.3. Операции над матрицами

2.3.1. Сложение матриц. *Суммой двух $m \times n$-матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется $m \times n$-матрица C, элементы которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (т.е. матрицы, участвующие в сложении, и результат имеют один и тот же размер $m \times n$ и при этом они складываются поэлементно, т.е. используется покомпонентное сложение). Результат сложения матрицы A с матрицей B обозначается $C = A + B$.

Пример 2.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Верны следующие *свойства сложения матриц*:
а) $A + O = A$;
б) $A + B = B + A$;
в) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Замечание. В этих и последующих свойствах считается, что размеры матриц таковы, что записанные равенства имеют смысл.

2.3.2. Противоположная матрица. *Противоположной матрицей* для $m \times n$-матрицы A называется матрица такого же размера $m \times n$ (обозначается $-A$), которая в сумме с матрицей A дает нулевую матрицу, т.е. $A + (-A) = O$.

Пример 2.2. Противоположной для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ является матрица $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

2.3.3. Вычитание матриц. *Разность двух $m \times n$-матриц A и B* определяется через сложение по формуле $A - B = A + (-B)$.

2.3.4. Умножение матрицы на число. *Произведением матрицы A размера $m \times n$ на число λ* называется матрица B того же размера $m \times n$, элементы которой равны

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Результат умножения матрицы A на число λ обозначается $B = \lambda A$.

Пример 2.3.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Верны следующие *свойства умножения матрицы на число*:

а) $\lambda A = A\lambda$; б) $1 \cdot A = A$;

в) $0 \cdot A = O_{m,n}$; г) $\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A = \alpha(\beta A)$;

д) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; е) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

ж) $(-1) \cdot A = -A$.

Из последнего следует, что противоположная матрица $-A = (-1)A$.

2.3.5. Умножение матриц. *Произведением* $m \times k$*-матрицы* A *на* $k \times n$*-матрицу* B называется матрица C размера $m \times n$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Результат умножения матрицы A на матрицу B обозначается $C = AB$.

Пример 2.4. Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Теорема 2.1. *При* $n \geqslant 2$ *(или* $m \geqslant 2$*) найдутся такие матрицы* A *и* B*, что* $AB \neq BA$.

Доказательство. Пусть $n = 2$ и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \\ (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, не для всяких матриц A и B выполняется свойство коммутативности $AB = BA$. □

Матрицы A и B называются *коммутирующими матрицами*, если $AB = BA$ (в этом случае матрицы A и B — квадратные матрицы одного порядка).

При умножении матриц соответствующего порядка единичная матрица E_n играет роль *правой единицы*, т.е. $AE_n = A$ для любой $m \times n$-матрицы A, а E_m — *левой единицы*, т.е. $E_m A = A$. Во множестве квадратных матриц порядка n единичная матрица E порядка n играет роль *единицы*, т.е. $AE = EA = A$.

Пример 2.5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Проверить, что $AE = EA = A$.

Решение.

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AE = EA = A$. □

Верны следующие *свойства умножения матриц*:

а) $A(BC) = (AB)C$; б) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;

в) $(A + B)C = AC + BC$; г) $A(B + C) = AB + AC$;

д) $AO_{n,p} = O_{m,n}$; е) $O_{p,m}A = O_{p,n}$.

Кроме того, *дополнительно для квадратных матриц* справедливы свойства:

а) $AO = OA = O$; б) $EA = AE = A$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда верно свойство:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

2.3.6. Транспонирование матрицы. Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей, транспонированной к матрице*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и обозначается A^T или A'. *Транспонирование матрицы* — это переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы меняются местами с сохранением порядка.

Пример 2.6. Найти матрицу, транспонированную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. □

Верны следующие *свойства транспонирования матрицы*:

а) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

б) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

в) $(AB)^T = B^T A^T$;

г) $(A^T)^T = A$;

д) если $A = (a_1\ a_2\ ...\ a_n)$ — матрица-строка, то

$$AA^T = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad A^T A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & ... & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & ... & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_na_1 & a_na_2 & ... & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Число

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}$$

называется *евклидовой нормой вектора* (вектор-строки)

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

и обозначается $||\boldsymbol{a}||$; число a_i, стоящее на i-м месте вектор-строки, называется *i-й компонентой* (координатой) вектора $\boldsymbol{a}$;

е) квадратная матрица $P = (a_{ij})$ порядка n называется *матрицей перестановок n-го порядка*, если каждая ее строка и каждый столбец содержит единственный элемент, равный 1, а остальные элементы равны нулю. Матрица перестановок n-го порядка обладает следующим свойством: $PP^T = P^T P = E_n$;

ж) если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, то $A^T = A$.

Теорема 2.2. *Единичная матрица порядка n является матрицей перестановок. Всякая матрица перестановок n-го порядка может быть получена из единичной матрицы порядка n с помощью конечного числа перестановок ее строк (столбцов).*

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *симметрической матрицей*, если $A^T = A$.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *кососимметрической матрицей*, если $A^T = -A$.

2.4. Определитель квадратных матриц второго и третьего порядков

Для каждой квадратной матрицы A вводится число $|A|$ (или $\det A$), называемое ее *определителем*.

Для матрицы первого порядка определитель $|A|$ считается равным ее элементу a_{11}.

Для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ее определитель считается равным $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и обозначается $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 2.7. Вычислить $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 1.$$

□

Для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

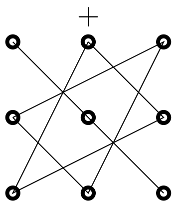
ее определитель считается равным

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами определителя*; слагаемые (произведения вида $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$) — *членами определителя.* Среди входящих в произведения элементов имеются представители от каждой строки и от каждого столбца. Слагаемые и знаки, с которыми эти слагаемые входят в формулу определителя третьего порядка, можно получить, пользуясь схемой, которая называется *правилом треугольника* (для знака «плюс» основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали, для знака «минус» — параллельны побочной диагонали (рис. 2.1)).



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

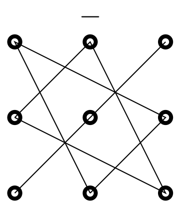


Рис. 2.1

Пример 2.8. Вычислить $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \cdot 2 - \\ - 5 \cdot (-2) \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot (-1) = 117. \qquad \square$$

2.5. Перестановки и инверсии

Для перехода к определителю n-го порядка необходимо рассмотреть, что собой представляют отдельные слагаемые, входящие в формулу, дающую определитель. Элементы в каждом слагаемом можно расположить в порядке возрастания первого индекса (номера строки, к которой он принадлежит), т.е. в этом случае номера строк элементов, входящих в слагаемые, идут в естественном порядке: для определителя второго порядка — 1 2, для определителя третьего порядка — 1 2 3. Удобно записывать это в виде упорядоченной тройки $(1, 2, 3)$. Всякое расположение этих трех чисел 1, 2 и 3 называется *перестановкой из трех чисел* 1, 2 и 3. Перестановка $(1, 2, 3)$, где числа 1, 2, 3 расположены в их нормальном (естественном) порядке, называется *основной перестановкой*. Что же касается номеров столбцов, к которым принадлежат эти элементы, то их расположения даются следующими шестью перестановками: $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$.

Пусть дано некоторое конечное множество

$$M = \{a_1, a_2, ..., a_n\},$$

состоящее из n элементов. Всякое расположение элементов a_1, a_2, ..., a_n в некотором определенном порядке называется *перестановкой из n элементов* (или из n символов), или *перестановками без повторений из n элементов*, а их число обозначают P_n.

Пусть дано некоторое конечное множество

$$M = \{a_1, a_2, ..., a_n\},$$

состоящее из n элементов. Этим элементам могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие числа 1, 2, ..., n. Так как в теории определителей интересуются элементами множества M как номерами строк или столбцов, а не индивидуальными свойствами элементов множества M, то принимается, что $M = \{1, 2, ..., n\}$. Всякое расположение чисел 1, 2, ..., n в некотором определенном порядке называется *перестановкой из n чисел*.

Первым элементом перестановки можно взять любое из чисел 1, 2, ..., n, а это можно сделать n способами. После этого останется $n-1$ чисел, из которых $n-1$ способами можно выбрать следующее число. Следовательно, два первых числа можно выбрать $n(n-1)$ способами. Три числа из n чисел можно будет выбрать $n(n-1)(n-2)$ способами. Таким образом, через n шагов получится, что

$$P_n = n(n-1) \cdot ... \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n.$$

Произведение в правой части обозначается

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \stackrel{def}{=} n!$$

и читается «эн-факториал».

Если в некоторой перестановке поменять местами какие-либо два символа (не обязательно стоящие рядом), а все остальные символы оставить на месте, то получится перестановка, отличная от исходной перестановки. Преобразование перестановки, меняющее местами два символа перестановки, называется *транспозицией*.

Все $n!$ перестановок из n символов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки. От любой перестановки из n символов можно перейти к любой другой перестановке из тех же символов при помощи конечного числа транспозиций.

Числа i и j в перестановке называются *образующими инверсию*, если $i > j$, но i стоит в перестановке раньше j. Подсчитывается общее число инверсий, которые образуются в перестановке всеми парами входящих в нее чисел. Перестановка называется *четной перестановкой*, если общее число инверсий в ней представляет четное число, и *нечетной перестановкой* в противоположном случае. Так, перестановка 1, 2, ..., n будет четной перестановкой при любом n, так как число инверсий в ней равно нулю. Перестановка $(4, 1, 5, 6, 3, 2)$ $(n = 6)$ содержит 8 инверсий и поэтому является четной перестановкой. Перестановка $(5, 3, 8, 2, 7, 4, 6, 1)$ $(n = 8)$ содержит 17 инверсий и поэтому является нечетной перестановкой.

Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

2.6. Определитель n-го порядка

Определителем (детерминантом) n-го порядка (обозначается $|A|$ или $\det A$), соответствующим квадратной матрице $A = (a_{ij})$ порядка n, называется алгебраическая сумма всех $n!$ членов вида $(-a)^{t(i)} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{ni_n}$, где $i = (i_1, i_2, ..., i_n)$ — перестановка чисел 1, 2, ..., n; $t(i)$ — число инверсии в перестановке i, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n!} (-1)^{t(i)} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{ni_n}.$$

Под это определение попадают определители всех порядков, в том числе второго и третьего порядков.

Определители матриц порядков более трех вычисляются рекуррентным способом, т.е. переходом от больших порядков к меньшим.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием элементов, стоящих в i-й строке и j-ом столбце.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Таким образом, алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ — нечетное число. Например,

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Пример 2.9. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

найти алгебраические дополнения A_{32} и A_{13}.

Решение. Минором M_{32} элемента $a_{32} = 2$ будет определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием третьей строки и второго столбца:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -30.$$

Алгебраическое дополнение $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = 30$.

Минором M_{13} элемента $a_{13} = 5$ будет определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием первой строки и третьего столбца:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18.$$

Алгебраическое дополнение A_{13} совпадает с минором M_{13}, т.к.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 18. \qquad \square$$

2.7. Свойства определителей

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число, то ее определитель умножится на это число.

3. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5. Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0 \text{ при } j \neq k.$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

10. $|E| = 1$.

11. Определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов.

12. Определитель матрицы перестановок P_n не равен нулю; $\det P_n = \pm 1$.

Теорема 2.3. *Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} =$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.$$

Эта формула называется *формулой разложения определителя по элементам первой строки.*

Пример 2.10. Раскладывая по элементам первой строки, вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. По формуле разложения определителя по элементам первой строки получим

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2 \cdot (-2) + 0 + 4 \cdot 6 = 28. \qquad \square$$

Замечания.

1. Вместо первой строки матрицы можно взять любую другую строку. Такая формула называется *формулой разложения определителя по элементам указанной строки.*

2. Эта же формула разложения верна для элементов любого столбца.

Если воспользоваться восьмым свойством определителей, то в определителе можно получить в каком-то столбце (строке) нули, за исключением, быть может, одного элемента. А тогда при разложении определителя по элементам этого столбца в разложении будет присутствовать только одно слагаемое, что значительно упростит дальнейшие вычисления.

Пример 2.11. Вычислить определитель данной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

получив максимальное число нулей во втором столбце.

Решение. Пусть третья строка прибавлена ко второй строке. Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 22. \qquad \square$$

При использовании других свойств можно попытаться привести определитель к диагональному виду или к определителю, у которого в каждой строке и каждом столбце не более одного отличного от нуля элемента.

Пример 2.12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, приведя его (если возможно) к диагональному виду.

Решение. Пусть первая строка, умноженная на -3, прибавлена к третьей строке. Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -12 \end{vmatrix}.$$

Далее, пусть вторая строка прибавлена к третьей строке. Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-11) = 22.$$

При вычислении данного определителя необходимости приведения к диагональному виду нет, хотя это можно сделать следующим образом. Например, в последнем определителе можно первый столбик умножить на -4 и прибавить к третьему столбцу, затем второй столбик разделить на 2 (или умножить на $1/2$) и прибавить к третьему столбцу. Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-11) = 22.$$

□

2.8. Обратная матрица

Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример 2.13. Так как

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то обратной матрицей для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ будет $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, а обратной матрицей для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ будет $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. □

Квадратная матрица называется *неособенной* (невырожденной) матрицей, если ее определитель не равен нулю, и называется *особенной* (вырожденной) матрицей, если ее определитель равен нулю.

Теорема 2.4. *Обратная матрица A^{-1} для квадратной матрицы A существует (и при этом она единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица A является неособенной, т.е. когда $|A| \neq 0$. Тогда*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A}, \quad \text{где } \hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Матрица $\hat{A}$ (другие обозначения A^* и $A^{\#}$) называется *присоединенной* (взаимной) матрицей к матрице A.

Верны следующие *свойства обратимых матриц*:

а) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; б) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;

в) $(A^{-1})^{-1} = A$; г) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

д) матрица перестановок P_n является невырожденной и $P_n^{-1} = P_n^T$.

Существует несколько алгоритмов вычисления обратной матрицы.

2.9. Вычисление обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений

1. Ищется определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и ее обратная A^{-1} существует.

2. Ищутся алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы A и строится из них матрица $\tilde{A} = (A_{ij})$.

3. Матрица $\tilde{A}$ транспонируется и получается матрица

$$\hat{A} = \left(\tilde{A}\right)^T = (A_{ji}).$$

4. Все элементы матрицы $\hat{A}$ делятся на число $|A|$. Полученная матрица и будет обратной для A.

Пример 2.14. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

найти обратную матрицу.

Решение. 1. Находится $|A| = 28 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

2. Строится матрица $\tilde{A}$ из алгебраических дополнений A_{ij}:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 8 & -12 & 4 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируется матрица $\tilde{A}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 8 \\ 3 & -12 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Элементы матрицы $\hat{A}$ делятся на $|A| = 28$. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} -2 & 8 & 8 \\ 3 & -12 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{14} & \dfrac{2}{7} & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{3}{28} & -\dfrac{3}{7} & \dfrac{1}{14} \\ \dfrac{3}{14} & \dfrac{1}{7} & \dfrac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

□

2.10. Элементарные преобразования матрицы

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

а) отбрасывание нулевой строки;

б) умножение всех элементов какой-либо строки на ненулевое число;

в) перестановка строк;

г) прибавление к каждому элементу какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число.

Матрица, полученная из данной матрицы элементарными преобразованиями строк, называется *матрицей, эк-*

вивалентной данной матрице. Эквивалентность матриц обозначается знаком $\sim$.

Точно также могут рассматриваться элементарные преобразования столбцов.

Удобно элементарные преобразования матрицы A представлять в виде ее произведения на специально подобранные матрицы.

Так, умножение всех элементов i-й строки матрицы A на число λ эквивалентно умножению матрицы A слева на диагональную матрицу порядка m с элементами 1, 1, ..., 1, λ, 1, ..., 1, где λ — i-я компонента набора $(1, 1, ..., 1, \lambda, 1, ..., 1)$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение же всех элементов j-го столбца матрицы A на число λ эквивалентно умножению матрицы A справа на диагональную матрицу порядка n с элементами 1, 1, ..., 1, λ, 1, ..., 1, где λ — j-я компонента набора $(1, 1, ..., 1, \lambda, 1, ..., 1)$. Проверяется также, как в предыдущем случае.

Перестановка двух строк (например, i-й и j-й) в матрице A эквивалентна умножению матрицы A слева на матрицу перестановок порядка m, получающейся из единичной матрицы перестановок порядка m перестановкой между собой i-й и j-й строк. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для перестановки i-го и j-го столбцов берется эта же матрица перестановок, только умножается она на исходную матрицу справа.

Прибавление к каждому элементу j-й строки соответствующих элементов i-й строки, умноженных на число λ, эквивалентно умножению матрицы A слева на матрицу порядка m, получающуюся из единичной матрицы заменой элемента $\delta_{ji} = 0$ на число λ. Действительно (рассматривается случай $i < j$),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{j1} + \lambda a_{i1} & a_{j2} + \lambda a_{i2} & \dots & a_{jn} + \lambda a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}.
$$

Наиболее важным элементарным преобразованием является именно последнее преобразование. Причем это преобразование можно расширить до преобразования всех строк за исключением i-й строки, а i-ю строку умножить на a_{ik}^{-1}, если $a_{ik} \neq 0$. В последующем преобразования с такой матрицей найдут применение при вычислении ранга матрицы и решении систем линейных уравнений.

2.11. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Для вычисления обратной матрицы можно применить элементарные преобразования матрицы в следующей форме. Приписывается к матрице A единичная матрица E того же порядка, что и A. Этот результат обозначается $(A|E) = B$. Тогда

$$A^{-1}B = A^{-1}(A|E) = (A^{-1}A|A^{-1}E) = (E|A^{-1})$$

и

$$BA^{-1} = (A|E)A^{-1} = (AA^{-1}|EA^{-1}) = (E|A^{-1}).$$

Таким образом, с помощью приписывания единичной матрицы и последующих элементарных преобразований получается, что

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Пример 2.15. С помощью элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & \dfrac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \dfrac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{14} & \dfrac{2}{7} & \dfrac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{3}{28} & -\dfrac{3}{7} & \dfrac{1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3}{14} & \dfrac{1}{7} & \dfrac{1}{7} \end{array}\right).$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{14} & \dfrac{2}{7} & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{3}{28} & -\dfrac{3}{7} & \dfrac{1}{14} \\ \dfrac{3}{14} & \dfrac{1}{7} & \dfrac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

□

2.12. Ранг матрицы

Минором порядка k матрицы A размера $m \times n$ называется определитель квадратной матрицы порядка k, получаемый из матрицы A вычеркиванием каких-либо ее строк и столбцов.

Пример 2.16. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить минор второго порядка, получающийся из исходной матрицы вычеркиванием третьей строки и третьего, и четвертого столбцов, и минор третьего порядка, получающийся вычеркиванием второго столбца.

Решение. Указанные миноры имеют следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Из свойств определителей следует, что ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях ее строк и столбцов. Поэтому ранг матрицы A равен рангу эквивалентной ей матрицы. С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к треугольной квадратной матрице или к диагональной с ненулевыми диагональными элементами. Ее определитель равен произведению диагональных элементов и не равен нулю, поэтому ее порядок, который равен числу строк, совпадает с рангом матрицы.

Пример 2.17. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Проведем с матрицей A элементарные преобразования строк:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такие же преобразования проделаем над элементами столбцов матрицы, чтобы получить диагональную матрицу:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2. □

Ранг $r(A)$ матрицы A обладает *свойствами*:

а) $r(A) \leqslant \min(m,n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;

в) $r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^T A)$;

г) $r(AB) \leqslant \min(r(A), r(B))$;

д) если $r(A)$ квадратной матрицы A порядка n равен n, то $r(AB) = r(B)$;

е) $r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)$.

2.13. Матричные уравнения

2.13.1. Матричное уравнение $AX = B$. Произведение матриц A и X определено, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X; кроме того, из равенства $AX = B$ вытекает, что число строк матрицы B равно числу строк матрицы A и число столбцов матрицы B равно числу столбцов матрицы X. Поэтому, если размерность матрицы X заранее не указана, то вначале определяется, имеет ли смысл уравнение $AX = B$ для заданных размерностей матриц A и B, а затем — размерность матрицы X через число столбцов матрицы A и число строк матрицы B.

Пример 2.18. Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как число строк матрицы A равно числу строк матрицы B, то уравнение $AX = B$ имеет смысл и матрица X будет иметь размерность 4×2. □

В общем случае решение матричного уравнения $AX = B$ сводится к решению n систем m линейных уравнений с k неизвестными. Наиболее просто уравнение $AX = B$ может быть решено, если A — невырожденная. В этом случае умножение слева на A^{-1} соотношения $AX = B$ дает

$$A^{-1}AX = EX = X = A^{-1}B.$$

Пример 2.19. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как число строк матрицы A равно числу строк матрицы B, то уравнение $AX = B$ имеет смысл и матрица X будет иметь размерность 3×2. Вычисления обратной матрицы проведены с помощью элементарных преобразований в табличном виде (табл. 2.1).

Таблица 2.1

№ п/п	A			E			$\tilde{a}_i$
1	-1	2	1	1			3
	-3	6	-1		1		3
		1	4			1	6
2	1	-2	-1	-1			-3
			-4	-3	1		-6
		1	4			1	6
3	1	-2		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{3}{2}$
			1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
		1		-3	1	1	
4	1			$-\frac{25}{4}$	$\frac{7}{4}$	2	$-\frac{3}{2}$
			1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$
		1		-3	1	1	
5	1			$-\frac{25}{4}$	$\frac{7}{4}$	2	$-\frac{3}{2}$
		1		-3	1	1	
			1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$

Так как обратная матрица существует, то

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} & \frac{7}{4} & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -25 & 7 & 8 \\ -1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -32 & 72 \\ -16 & 36 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

2.13.2. Матричное уравнение $XA = B$. Произведение матриц X и A определено, если число столбцов матрицы X равно числу строк матрицы A; кроме того, из равенства $XA = B$ вытекает, что число строк матрицы B равно числу строк матрицы X и число столбцов матрицы B равно числу столбцов матрицы A. Поэтому, если размерность матрицы X заранее не указана, то вначале определяется, имеет ли смысл уравнение $XA = B$ для заданных размерностей матриц A и B, а затем — размерность матрицы X через число строк матрицы B и число столбцов матрицы A.

Пример 2.20. Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B, то уравнение $XA = B$ имеет смысл и матрица X будет иметь размерность 2×2. □

В общем же случае решение матричного уравнения сведется к решению m систем k линейных уравнений с n неизвестными. Наиболее просто уравнение $XA = B$ может быть решено, если A — невырожденная матрица. В этом случае умножение справа на A^{-1} соотношения $XA = B$ дает

$$XAA^{-1} = XE = X = BA^{-1}.$$

Пример 2.21. Решить уравнение

$$X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B, то уравнение $XA = B$ имеет смысл и матрица X будет иметь размерность 3×2. Вычисление обратной матрицы проведено в предыдущем пункте; она существует:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -25 & 7 & 8 \\ -1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -25 & 7 & 8 \\ -1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -25 & 7 & 8 \\ -1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.13.3. Матричное уравнение $AXB = C$. Произведение матриц A и X определено, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, и произведение матриц X и B определено, если число столбцов матрицы X равно числу строк матрицы B. Кроме того, число строк матрицы C должно равняться числу строк матрицы A, а число столбцов матрицы C — числу столбцов матрицы B. Поэтому, если размерность матрицы X заранее не указана, то вначале определяется, имеет ли смысл уравнение $AXB = C$ для заданных размерностей матриц A, B и C, а затем — размерность матрицы X через число столбцов матрицы A и число строк матрицы B.

Пример 2.22. Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так как число строк матрицы C равно числу строк матрицы A и число столбцов матрицы C равно числу столбцов матрицы B, то уравнение $AXB = C$ имеет смысл и матрица X будет иметь размерность 4×2. □

В общем же случае решение матричного уравнения сводится к решению n систем m линейных уравнений с kl неизвестными. Наиболее просто уравнение $AXB = C$ может быть решено, если A и B невырожденные матрицы. В этом случае умножение слева на A^{-1}, а справа на B^{-1} соотношения $AXB = C$ дает

$$A^{-1}AXBB^{-1} = EXE = X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Пример 2.23. Решить уравнение

$$AXB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как число строк матрицы C равно числу строк матрицы A и число столбцов матрицы C равно числу столбцов матрицы B, то уравнение $AXB = C$ имеет смысл и матрица X

будет иметь размерность 2×3. Обратной матрицей для матрицы A является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обратная матрица для матрицы B задана в предыдущем пункте:

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -25 & 7 & 8 \\ -12 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{25}{4} & \frac{7}{4} & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -25 & 7 & 8 \\ -12 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -31 & 9 & 12 \\ -9 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{4} & \frac{9}{4} & 3 \\ -\frac{9}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Упражнения

2.1. Найти $C = 2A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) $3A - 2B - C$; б) $2A + 4B - 3C$.

2.3. Найти матрицы, транспонированные к данным матрицам:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ 7 & 8 & 18 & 9 \end{pmatrix}$.

2.4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) $3A + B^T$; б) $2A^T + 3B$.

2.5. Найти произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.6. Найти произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7. Вычислить: а) $AB - BA$; б) $AB + CD$; в) $2AB - CD$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.8. Найти $f(A) - 2\varphi(A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad \varphi(x) = 3x + 5.$$

2.9. Найти $f(A)$, если

а) $f(x) = x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^2 - 5x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.10. Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$.

2.11. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - x - 2$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.12. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

2.13. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -14 \\ 25 & 13 & 7 & -21 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.14. Вычислить определители, приводя их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 181 & 281 \\ 217 & 317 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -14 \\ 25 & 13 & 7 & -21 \end{vmatrix}$.

2.15. Вычислить определители, разложив их по элементам третьей строки:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.16. Вычислить определители, разложив их по элементам второго столбца:

а) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2.17. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

2.18. Найти матрицы, обратные для данных матриц, с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.19. Найти матрицы, обратные для данных матриц, с помощью алгебраических дополнений:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.20. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

2.21. Найти матрицы X и Y из уравнений $AX = B$, $YA = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.22. Решить матричные уравнения $AX = B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 34 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2.23. Найти ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

2.24. Найти методом приведения к трапецевидной форме ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Примеры тестовых заданий

2.1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix}$ равен…

1) 0; 2) 8; 3) -3; 4) -120.

2.2. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю при k, равном…

1) -3; 2) 2; 3) 0; 4) -2.

2.3. Определитель $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x \\ \cos 2x & \sin 2x \end{vmatrix}$ равен…

1) $2\sin 2x$; 2) 0; 3) 1; 4) $-\cos 4x$.

2.4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $D = 2A + B - C$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} -8 & 0 & -6 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

2.5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A - 2B$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} -14 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 6 & -5 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

2.6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A + 2B$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

2.7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид...

1) $\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -17 & 3 & 13 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -17 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

2.8. Произведение матриц с размерностями $[2 \times m]$ и $[2k \times 3]$ возможно при...

1) $m = 2$, $k = 1$; 2) $m = 3$, $k = 1$;

3) $m = 1$, $k = 2$; 4) $m = 2$, $k = 3$.

2.9. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ равен...

1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) 4.

2.10. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 7 & -5 & 9 \\ -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ равен 2 при λ, равном...

1) -18; 2) -6; 3) $29/108$; 4) 0.

2.11. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда обратная матрица A^{-1} равна...

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.12. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & \lambda & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **не имеет** обратной при λ, равном...

1) 0; 2) 1/2; 3) 2; 4) -2.

Глава 3
Системы линейных уравнений

3.1. Основные понятия и определения

Системой m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_{m0}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) — числа, называемые *коэффициентами при неизвестных*, a_{i0} ($i = 1, 2, ..., m$) — тоже числа, называемые *свободными членами уравнений*.

В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Система m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n может быть записана в матричной форме. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ ... \\ a_{m0} \end{pmatrix},$$

где A — матрица коэффициентов при неизвестных или матрица системы, X — матрица-столбец неизвестных, B — матрица-столбец свободных членов. Так как число столбцов матрицы $A_{m,n}$ равно числу строк матрицы $X_{m,1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

является матрицей-столбцом. Элементами полученной матрицы являются левые части системы. На основании определения равенства матриц систему можно записать в матричном виде:

$$AX = B.$$

Решением системы m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n называется такая совокупность n чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$, что при подстановке их в систему вместо соответствующего неизвестного каждое уравнение системы обращается в тождество.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. *Несовместной* называется система линейных уравнений, не имеющая решений.

Совместная система линейных уравнений называется *определенной системой*, если она имеет единственное решение. *Неопределенной* называется совместная система линейных уравнений, имеющая два и большее число решений.

Пример 3.1. Система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ является совместной и определенной системой линейных уравнений, так как имеет единственное решение $(1; 1)$; система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$ — несовместная система линейных уравнений, так как уравнения являются противоречивыми по отношению друг к другу, и поэтому эта система не имеет решений; а система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$ является совместной и неопределенной системой линейных уравнений, так как имеет более одного решения, а точнее — бесконечное число решений $(x_1; x_2) = (2c - 1; c)$, где c — любое действительное число. □

Система линейных уравнений $AX = B$ (m линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n) называется *эквивалентной* (равносильной) *системе линейных уравнений* $A_1X = B_1$ (l линейных уравнений с теми же n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n), если каждое решение первой системы линейных уравнений является решением и второй системы уравнений, и наоборот.

3.2. Решение систем линейных уравнений

3.2.1. Метод обратной матрицы. Если в системе m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$) и матрица $A = (a_{ij})$ является невырожденной, т.е. $|A| \neq 0$, то для нее существует обратная матрица A^{-1}. Умножение слева обеих части матричного равенства $AX = B$ на матрицу A^{-1} дает $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $(A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы будет матрица-столбец $X = A^{-1}B$.

Пример 3.2. С помощью обратной матрицы решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

то обратная матрица существует. Вычисление обратной матрицы для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

проведено с помощью элементарных преобразований строк:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } (x_1;x_2;x_3)=(1;1;1).$$

□

3.2.2. Правило Крамера. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n с матрицей системы A:

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix},$$

определитель которой $\Delta \neq 0$. Пусть через $A_k=(A_{1k}, A_{2k}, ..., A_{nk})$ обозначена матрица-строка алгебраических дополнений элементов его k-го столбца, через $\tilde{A}$ — матрица

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда произведение

$$\tilde{A}AX=$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1} & ... & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i2} & ... & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}A_{i2} \\ \hdotsfor{4} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}A_{in} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}A_{in} & ... & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}A_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i0}A_{i1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i0}A_{i2} \\ ... \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i0}A_{in} \end{pmatrix}.$$

По формулам разложения определителя по элементам столбцов и свойству о равенстве определителя нулю

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i2} & ... & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & ... & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}A_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & ... & 0 \\ 0 & \Delta & ... & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & ... & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \Delta \cdot x_1 \\ \Delta \cdot x_2 \\ \cdots\cdots \\ \Delta \cdot x_n \end{pmatrix} = \Delta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ ... \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

где Δ_i — есть разложение некоторого определителя по элементам i-го столбца. Причем определитель Δ_i отличается от исходного определителя тем, что в нем i-й столбец заменен столбцом свободных членов. Так как определитель системы $\Delta \neq 0$, то решение системы является единственным и может быть найдено по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_i — определитель, полученный из определителя системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 3.3. По формулам Крамера решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. □

Теорема 3.1. *Формулы Крамера эквивалентны формулам решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.*

Доказательство. Формулы Крамера в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ ... \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

дают

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i2} \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} A_{in} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix} = A^{-1}B. \qquad \square$$

Замечание. По формулам Крамера и с помощью обратной матрицы можно решать системы, если:

а) число уравнений равно числу неизвестных;

б) определитель системы отличен от нуля.

3.2.3. Метод Гаусса и его разновидности. Одним из наиболее распространенных методов решения произвольных систем линейных уравнений является *метод исключения неизвестных* (*метод Гаусса*), основанный на преобразованиях исходной системы в систему, эквивалентную ей, но приведенную к ступенчатому или трапецеидальному виду или, если это возможно, к треугольному или диагональному виду.

При выполнении этапов преобразований из уравнений системы последовательно исключаются неизвестные x_1, x_2, ..., x_r, поэтому такой метод называется *методом последовательных исключений неизвестных* (методом Гаусса).

Метод последовательных исключения неизвестных является точным методом решения систем линейных уравнений $AX = B$, так как в предположении отсутствия округлений он дает точное решение системы после конечного числа арифметических и логических операций.

Каждый шаг метода Гаусса состоит из двух преобразований:

а) умножения (или деления) обеих частей какого-нибудь уравнения на любой отличный от нуля множитель;

б) прибавления ко всем остальным уравнениям (вычитания из всех остальных уравнений) любого уравнения системы, умноженного предварительно на любое число.

Первое преобразование заключается в выборе *разрешающего* (ведущего) *элемента* $a_{pi} \neq 0$, с помощью которого p-е уравнение разрешается относительно x_i. Тем самым оказываются выбранными *разрешающая* (ведущая) p-я *строка* (разрешающее p-е уравнение, с помощью которого будет исключаться неизвестная), и *разрешающий* (ведущий) i-й *столбец* (неизвестная, которая будет исключаться).

Второе преобразование может заключаться в исключении неизвестной x_i из всех уравнений за исключением первых p. Тогда совокупность указанных преобразований называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Как преобразование первого типа, так и преобразование второго типа могут присутствовать в других разновидностях, что дает ту или иную реализацию метода Гаусса. В *методе полного исключения* (методе Жордана-Гаусса) i-я неизвестная на каждом шаге исключается из всех уравнений за исключением p-го.

Таким образом, решение системы линейных уравнений по методу Гаусса и его разновидностям сводится к переходу от исходной системы к эквивалентной ей с помощью указанных преобразований.

Пусть дана система m линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_{m0}, \end{cases}$$

с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n и пусть $a_{11} \neq 0$.

Далее рассмотрена реализация метода полного исключения. Для этого первое уравнение системы делится на a_{11}. Далее исходная система преобразуется с помощью исключения неизвестной x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого обе части первого уравнения умножаются на число a_{21} и вычитаются из соответствующих частей второго уравнения. Затем обе части первого уравнения, умноженные на число a_{31}, вычитаются из соответствующих частей третьего уравнения. Чтобы исключить x_1 из i-го уравнения, нужно первое уравнение умножить на число a_{i1} и вычесть из i-го уравнения.

В результате указанных преобразований получится линейная система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{10}^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{20}^{(1)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)} x_n = a_{m0}^{(1)}, \end{cases}$$

эквивалентная исходной системе уравнений (при этом число уравнений может уменьшиться).

Пусть далее для определенности коэффициент $a_{22}^{(1)} \neq$ $\neq 0$. Проводятся аналогичные, как и в первом случае, преобразования. Получится система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{13}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(2)} x_n = a_{10}^{(2)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{20}^{(2)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{m3}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)} x_n = a_{m0}^{(2)}, \end{cases}$$

также эквивалентная исходной системе, причем число уравнений снова может уменьшиться.

В предположении, что все диагональные элементы a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, ..., $a_{rr}^{(r-1)}$ не равны нулю, исходная система через r шагов преобразуется в систему

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1\,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(r)} x_n = a_{10}^{(r)}, \\ \quad x_2 \qquad + a_{2\,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(r)} x_n = a_{20}^{(r)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_r + a_{r\,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r)} x_n = a_{r0}^{(r)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = a_{r+1,0}^{(r)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = a_{l0}^{(r)}, \end{cases}$$

где $l \leqslant m$, эквивалентную исходной системе уравнений. Число r (в случае совместности системы линейных уравнений) называется *рангом системы линейных уравнений*.

Возможны следующие случаи.

1. Если через r шагов в столбце

$$\begin{pmatrix} a_{r+1,0}^{(r)} \\ \dots \\ a_{l0}^{(r)} \end{pmatrix}$$

хотя бы один из элементов $a_{i0}^{(r)} \neq 0$ $(i = r+1,\ r+2,\ \dots,\ l)$, то исходная система является несовместной, т.е. не имеет решений.

2. Если все $a_{i0}^{(r)} = 0$ $(i = r+1,\ r+2,\ \dots,\ l)$, то система является совместной, т.е. имеет решение.

При этом, если $r = n$, то исходная система имеет единственное решение, имеющее вид

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{10}^{(r)}, a_{20}^{(r)}, \dots, a_{n0}^{(r)}).$$

Если $r < n$, то можно выразить *базисные неизвестные* (число базисных неизвестных совпадает с рангом системы линейных уравнений) x_1, ..., x_{r-1}, x_r через x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, которые называются *свободными неизвестными*:

$$\begin{cases} x_1 = a_{10}^{(r)} + a_{1\,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{(r)} x_n, \\ x_2 = a_{20}^{(r)} + a_{2\,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r)} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = a_{r0}^{(r)} + a_{r\,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r)} x_n, \\ x_{r+1} = \qquad\qquad t_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t_{n-r}, \end{cases}$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, ..., $t_{n-r} \in \mathbb{R}$.

Тогда общее решение можно записать в виде

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (c_{10} + c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + c_{1\,n-r}t_{n-r},$$
$$c_{20} + c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + c_{2\,n-r}t_{n-r}, \dots,$$
$$c_{r0} + c_{r1}t_1 + c_{r2}t_2 + c_{r,n-r}t_{n-r}, t_1, t_2, \dots, t_{n-r}),$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, ..., $t_{n-r} \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2. *Ранг системы линейных уравнений равен рангу матрицы систем линейных уравнений.*

Замечания.

1. Исходная система не всегда может быть сразу же приведена к диагональному виду, тогда она может быть приведена к так называемому единичному базису, которая перестановкой уравнений и слагаемых и переобозначением неизвестных может быть приведена к диагональному виду. Система линейных уравнений называется *приведенной к единичному базису*, если столбцы коэффициентов при r неизвестных содержат число 1 только при базисных неизвестных. Такая форма представления исходной системы линейных уравнений наиболее удобна в приложениях.

2. В дальнейшем при исследовании систем линейных уравнений будет дано другое определение ранга системы линейных уравнений, эквивалентное приведенному выше определению.

3.2.4. Факторизационный метод решения систем линейных уравнений. Если систему (3.1) записать в матричном виде

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{m0} \end{pmatrix} = B,$$

то ее можно решить матричным методом, называемым в приложениях *факторизационным методом* решения систем линейных уравнений.

Далее предполагается, что первый диагональный элемент исходной матрицы A и матрицы, получающейся из нее с помощью преобразований, не равны 0.

Пусть дана матрица

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда произведение

$$D_1AX = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ ... \\ a_{m0} \end{pmatrix}$$

дает систему, которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & ... & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{10}}{a_{11}} \\ a_{20} \\ ... \\ a_{m0} \end{pmatrix}.$$

Далее берется матрица

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_{21} & 1 & ... & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{m1} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда произведение

$$C_1D_1AX =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_{21} & 1 & ... & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{m1} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & ... & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_{21} & 1 & ... & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{m1} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a_{10}}{a_{11}} \\ a_{20} \\ ... \\ a_{m0} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^1 & \ldots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \ldots & a_{2n}^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & a_{m2}^1 & \ldots & a_{mn}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10}^1 \\ a_{20}^1 \\ \ldots \\ a_{m0}^1 \end{pmatrix}.$$

Фактически исходная система $AX = B$ умножается на матрицу

$$T_1 = C_1 D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{m1} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, если $a_{22} \neq 0$, то к системе $m-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{22}^1 & a_{23}^1 & \ldots & a_{2n}^1 \\ a_{32}^1 & a_{33}^1 & \ldots & a_{3n}^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m2}^1 & a_{m3}^1 & \ldots & a_{mn}^1 \end{pmatrix}$$

можно применить аналогичные преобразования с матрицей

$$T_2 = C_2 D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{23}^1 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{m2}^1 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{22}^1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{22}^1} & 0 & \dots & 0 \\ -\dfrac{a_{32}^1}{a_{22}^1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_{m2}^1}{a_{22}^1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.
$$

Через r шагов, где r — ранг матрицы системы, предполагая, что диагональные элементы не равны нулю, можно прийти к системе

$$
\begin{pmatrix} 1 & a_{r,r+1}^r & \dots & a_{rn}^r \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{r0}^r \\ a_{r+1,0}^r \\ \dots \\ a_{l0}^r \end{pmatrix}.
$$

Если хотя бы один из элементов $a_{i0}^r \neq 0$ ($i = r+1$, $r+2$, ..., l), то исходная система является несовместной, т.е. не имеет решений.

Если все $a_{i0}^r = 0$ ($i = r+1$, $r+2$, ..., l), то система является совместной. Ее решение можно найти *обратным ходом* метода Гаусса. Базисные неизвестные x_r, x_{r-1}, ..., x_1 выразятся через свободные неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n.

3.2.5. Таблицы Гаусса. Расчеты по методу Жордана–Гаусса удобно располагать в *таблицах Гаусса*.

В исходной таблице располагают элементы расширенной матрицы, причем столбик свободных членов располагают в нулевом столбце (табл. 3.1). Дополнительный столбик является контрольным. Его элементы вычисляются по формуле

$$
\tilde{a}_i = a_{i0} + a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}
$$

для того, чтобы случайно допущенная в расчетах ошибка могла быть сразу же выявлена и устранена. Эти элементы на последующих шагах преобразовываются по тем же формулам, по которым вычисляются и остальные элементы очередных таблиц.

В исходной таблице выбирается разрешающий элемент $a_{qp} \neq 0$, $p = 1, 2, \dots, m$; $q = 1, 2, \dots, n$. Тем самым будут выбраны разрешающая q-я строка и разрешающий p-й столбец.

Таблица 3.1

№ п/п	x_i	a_{i0}	x_1	x_2	…	x_p	…	x_n	$\tilde{a}_i$
		a_{10}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1p}	…	a_{1n}	$\tilde{a}_1$
		a_{20}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2p}	…	a_{2n}	$\tilde{a}_2$
1		…	…	…	…	…	…	…	…
		a_{q0}	a_{q1}	a_{q2}	…	a_{qp}	…	a_{qn}	$\tilde{a}_q$
		…	…	…	…	…	…	…	…
		a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mp}	…	a_{mn}	$\tilde{a}_m$

Таблица 3.2

№ п/п	x_i	a_{i0}	x_1	x_2	…	x_p	…	x_n	$\tilde{a}_i$
		a_{10}	a_{11}	a_{12}	…		…	a_{1n}	$\tilde{a}_1$
		a_{20}	a_{21}	a_{22}	…		…	a_{2n}	$\tilde{a}_2$
2		…	…	…	…		…	…	…
	x_p	a_{q0}	a_{q1}	a_{q2}	…	1	…	a_{qn}	$\tilde{a}_q$
		…	…	…	…		…	…	…
		a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	…		…	a_{mn}	$\tilde{a}_m$

В очередной таблице (табл. 3.2) элементы разрешающей q-й строки равны частному от их деления на разрешающий элемент a_{qp}, а элементы других строк вычисляются по так называемому «правилу треугольника»:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a'_{qj} \cdot a_{ip}, \quad \tilde{a}'_i = \tilde{a}_i - \tilde{a}'_{qi} \cdot a_{ip},$$

$$i \neq q, \quad j = 0, 1, ..., n,$$

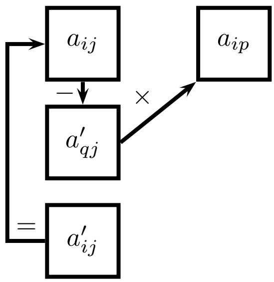


Рис. 3.1

которое можно запомнить по мнемоническому правилу (рис. 3.1). В табл. 3.2 дополнительные верхние индексы у коэффициентов a_{ij} и элементов a_{i0}, $\tilde{a}_i$ ($i = 1$, 2, ..., m; $j = 1$, 2, ..., n) не проставлены. Кроме того, элементы, равные нулю, в таблицу не занесены.

В настоящее время разработано достаточно много точных и приближенных методов решения систем линейных уравнений. Более подробно они изучаются в курсе вычислительной математики.

Пример 3.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. См. табл. 3.3.

Таблица 3.3

№ п/п	x_i	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\tilde{a}_i$
1			1	2	3	4	10
			7	4	20	27	58
		-2	5	1	16	19	39
		5	3	5	6	13	32
2	x_1		1	2	3	4	10
				-10	-1	-1	-12
		-2		-9	1	-1	-11
		5		-1	-3	1	2
3	x_1	-20	1	6	15		2
		5		-11	-4		-10
		3		-10	-2		-9
	x_4	5		-1	-3	1	2
4	x_1	$\frac{5}{2}$	1	-69			$-\frac{131}{2}$
		-1		9			8
	x_3	$-\frac{3}{2}$		5	1		$\frac{9}{2}$
	x_4	$\frac{1}{2}$		14		1	$\frac{31}{2}$
5	x_1	$-\frac{31}{6}$	1				$-\frac{25}{6}$
	x_2	$-\frac{1}{9}$		1			$\frac{8}{9}$
	x_3	$-\frac{17}{18}$			1		$\frac{1}{18}$
	x_4	$\frac{37}{18}$				1	$\frac{55}{18}$

Ответ: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\dfrac{31}{6}, -\dfrac{1}{9}, -\dfrac{17}{18}, \dfrac{37}{18}\right)$. $\square$

Пример 3.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. См. табл. 3.4.

Таблица 3.4

№ п/п	x_i	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\tilde{a}_i$
		-1	2	1	4	8	14
1		3	1	3	-6	2	3
		10	3	-2	-2	2	11
		4	2	-1	-4		1
		3	4			8	15
2		15	7		-18	2	6
		2	-1		6	2	9
	x_2	-4	-2	1	4		-1
		11			24	16	51
3		29			24	16	69
	x_1	-2	1		-6	-2	-9
	x_2	-8		1	-8	-4	-19
	x_4	$\frac{11}{16}$			$\frac{3}{2}$	16	$\frac{51}{16}$
4		18					18
	x_1	$-\frac{5}{8}$	1		-3		$-\frac{21}{8}$
	x_2	$-\frac{21}{4}$		1	-2		$-\frac{25}{4}$

Так как во второй строке отсутствует разрешающий элемент, то исходная система несовместна. $\square$

Пример 3.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. См. табл. 3.5.

Таблица 3.5

№ п/п	x_i	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\tilde{a}_i$
1			1	4	2		−3	4
			2	9	5	2	1	19
			1	3	1	−2	−9	−6
2	x_1		1	4	2		−3	4
				1	1	2	7	11
				−1	−1	−2	−6	−10
3	x_1		1		−2	−8	−31	−40
	x_2			1	1	2	7	11
							1	1
4	x_1		1		−2	−8		−9
	x_2			1	1	2		4
	x_5						1	1

Получаем

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 + 8t_2, \\ x_2 = -t_1 - 2t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \\ x_5 = 0, \end{cases}$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$. □

3.3. Исследование систем линейных уравнений

3.3.1. Теорема совместности. Исследовать систему линейных уравнений — это значит определить, совместна или несовместна система и, если система совместна, является ли она определенной системой или неопределенной. Вопрос исследования системы линейных уравнений сводятся к вопросу вычисления рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы, и сравнению этих рангов между собой и с числом неизвестных.

Расширенной матрицей системы называется матрица A_1, полученная присоединением к матрице системы A столбика из свободных членов.

Вначале исследуется вопрос о совместности системы. Для этого рассматривается матрица системы A и расширенная матрица системы A_1, и вычисляются ранги этих матриц. Ранг матрицы A_1 либо равен рангу матрицы A, либо на единицу больше последнего.

Теорема 3.3 (Кронекера–Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы.*

Ранг матрицы системы линейных уравнений в случае ее совместности называется *рангом системы*.

Следствие 3.1. *Система линейных уравнений несовместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы на единицу больше ранга матрицы системы.*

3.3.2. Теорема определенности.

Теорема 3.4 (определенности). *Совместная система линейных уравнений является определенной системой линейных уравнений тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных.*

Следствие 3.2. *Совместная система линейных уравнений является неопределенной системой линейных уравнений тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.*

Исследование системы линейных уравнений можно провести двумя способами:

— вычислением рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы, причем сразу с вычисления ранга расширенной матрицы системы, беря в качестве разрешающих элементов элементы матрицы системы до тех пор, пока это возможно;

— решив систему, например, методом Гаусса.

3.4. Решение однородных систем линейных уравнений

Однородной системой линейных уравнений называется система линейных уравнений, у которой все свободные члены равны нулю, т.е. система, имеющая вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

В противном случае система линейных уравнений называется *неоднородной системой линейных уравнений.*

Так как ранг расширенной матрицы однородной системы линейных уравнений равен рангу ее матрицы системы, то из теоремы Кронекера–Капели вытекает, что однородная система линейных уравнений всегда совместна. Она всегда имеет решение $(0, 0, ..., 0)$, называемое *нулевым.* Другие решения однородная система линейных уравнений имеет, если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.

Из общего решения неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{10}^{(r)} + a_{1,r+1}^{(r)} t_1 + ... + a_{1n}^{(r)} t_{n-r}, \\ x_2 = a_{20}^{(r)} + a_{2,r+1}^{(r)} t_1 + ... + a_{2n}^{(r)} t_{n-r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = a_{r0}^{(r)} + a_{r,r+1}^{(r)} t_1 + ... + a_{rn}^{(r)} t_{n-r}, \\ x_{r+1} = t_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = t_{n-r}, \end{cases}$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, ..., $t_{n-r} \in \mathbb{R}$, общее решение однородной системы линейных уравнений можно найти при $a_{i0}^{(r)} = 0$ $(i = 1, 2, ..., r)$ в виде

$$(x_1, x_2, ..., x_n) =$$
$$= (c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + c_{1,n-r}t_{n-r}, c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + c_{2,n-r}t_{n-r}, ...,$$

$$c_{r1}t_1 + c_{r2}t_2 + c_{r,n-r}t_{n-r}, t_1, t_2, ..., t_{n-r}),$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, ..., $t_{n-r} \in \mathbb{R}$, или в виде

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}t_1 + ... + c_{1,n-r}t_{n-r}, \\ x_2 = c_{21}t_1 + ... + c_{2,n-r}t_{n-r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = c_{r1}t_1 + ... + c_{r,n-r}t_{n-r}, \\ x_{r+1} = t_1, \\ \ \dots\dots\dots \\ x_n = t_{n-r}, \end{cases}$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, ..., $t_{n-r} \in \mathbb{R}$, а также в матричном (векторно-столбцовом) виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ ... \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ ... \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + ... + \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ ... \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} t_{n-r},$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$, ..., $t_{n-r} \in \mathbb{R}$.

Система векторов-столбцов однородной системы линейных уравнений, через которые могут быть выражены любые ее решения, называется *фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений.*

Приведенной системой линейных уравнений для системы линейных уравнений называется однородная система линейных уравнений, полученная из неоднородной системы линейных уравнений заменой свободных членов нулями.

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений можно записать в виде суммы общего решения приведенной системы линейных уравнений и частного решения неоднородной системы линейных уравнений, т.е. в это случае общее решение неоднородной системы линейных уравнений можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \dots + \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} t_{n-r} + \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_r^0 \\ x_{r+1}^0 \\ x_{r+2}^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

где $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ — некоторое частное решение неоднородной системы линейных уравнений.

Упражнения

3.1. С помощью обратной матрицы решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 11, \\ x_1 + 6x_2 = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 9x_4 = -1. \end{cases}$

3.2. Пользуясь формулами Крамера, решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 \phantom{{}+ x_2} - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}- 3x_3} - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \phantom{{}+ 4x_4} = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3. \end{cases}$

3.3. Решить методом Гаусса (методом исключения переменных) системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+ x_3} - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 \phantom{{}- x_2} - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

3.4. Решить методом Гаусса системы линейных уравнений и найти общее и два любых частных решения:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \quad\;\; x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad\; - 3x_4 = 1, \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 9, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 + x_5 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 - x_5 = -2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

3.5. Исследовать системы линейных уравнений на совместность:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

3.6. Найти общее решение и какую-либо фундаментальную систему решений однородных систем линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 0, \\ x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 + x_5 - x_6 = 0, \\ \qquad 5x_2 + x_3 - x_4 \qquad - x_6 = 0, \\ \qquad 3x_2 \qquad - x_4 - x_5 \qquad = 0. \end{cases}$

Примеры тестовых заданий

3.1. Система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} -8x - 2z = 0, \\ y + \lambda z = 0, \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений при λ, равном...

1) -1; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,25.

3.2. Решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = -1, \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

методом Крамера можно представить в виде...

1) $x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$;

3) $x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$;

4) $x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

3.3. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + \lambda y = 5, \\ -y - 3z = -5, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$$

Тогда систему линейных уравнений нельзя решить методом Крамера при λ, равном...

1) 4; 2) -2; 3) 2; 4) 0.

3.4. Система линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 4x + 5y + 6z = 2 \end{cases}$$

1) ...имеет бесконечное множество решений;
2) ...имеет два решения;
3) ...не имеет решений;
4) ...имеет единственное решение.

3.5. *Задание 1.* Обувная фабрика специализируется на выпуске двух видов обуви, при этом используется три вида сырья. Нормы расхода сырья на производство 1 ед.

продукции и стоимость сырья (в у.е.) указаны в таблице:

Сырье	Вид обуви		Стоимость сырья
	женская	мужская	
S_1	2	3	5
S_2	2	1	3
S_3	4	3	2

Если обозначить x_1 — объем используемого ресурса S_1, x_2 — объем S_2, x_3 — объем S_3, то количество y_1 производимой женской обуви, y_2 — мужской обуви можно определить из системы линейных уравнений вида...

1) $\begin{cases} x_1 = 5y_1 + 3y_2, \\ x_2 = 3y_1 + y_2, \\ x_3 = 2y_1 + 3y_2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 3y_2, \\ x_2 = 2y_1 + y_2, \\ x_3 = 4y_1 + 3y_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2, \\ x_2 = y_1 + 2y_2, \\ x_3 = 3y_1 + 4y_2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 5y_2, \\ x_2 = 2y_1 + 3y_2, \\ x_3 = 4y_1 + 2y_2. \end{cases}$

Задание 2. Для задачи из задания 1 установите соответствие между объемом производимой продукции (обуви) $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ и объемом используемых ресурсов (сырья) $X = (x_1, x_2, x_3)$:

1) $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ а) $X = (34, 14, 26)$

2) $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ б) $X = (24, 16, 36)$

3) $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ в) $X = (38, 16, 28)$

г) $X = (26, 14, 34)$

д) $X = (28, 16, 38)$

Задание 3. При производстве обуви предприятие использовало 2 тыс. ед. ресурса S_1, 1 тыс. ед. ресурса S_2 и 1 тыс. ед. ресурса S_3. Тогда стоимость (в тыс. у.е.) затрат ресурсов будет...

Глава 4
Векторы

4.1. Геометрическая фигура

Геометрической фигурой называется любое множество точек пространства (плоскости, прямой). Геометрическую фигуру называют *плоской фигурой*, если все ее точки принадлежат одной плоскости.

Пересечение двух и более геометрических фигур — это фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат каждой из данных фигур. В геометрии вместо слов «пересечение двух фигур пусто» обычно говорят, что фигуры не пересекаются.

Объединение двух или нескольких геометрических фигур есть фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат хотя бы одной из данных фигур.

4.2. Луч. Отрезок

Пусть L — некоторая прямая, а O — некоторая точка прямой L. Точка O разбивает множество точек прямой на два множества: множество точек, лежащих по одну сторону от точки O, и множество точек, лежащих по другую сторону от точки O (рис. 4.1). Эти множества называются *открытыми лучами*, исходящими из точки O (или с началом в точке O).

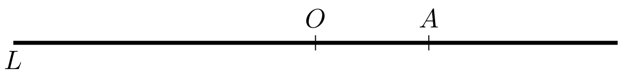


Рис. 4.1

Множество всех точек прямой L, лежащих по одну из сторон от точки O, включая точку O, называется *лучом* и обозначается OA (указывая начало луча O и другую произвольную точку луча A, отличную от начала луча). Луч OA называется *лучом, принадлежащим прямой* L.

Пусть O_1A и O_2B — два некоторых луча. Возможны следующие случаи их взаимного расположения.

1. Лучи O_1A и O_2B лежат на одной прямой.

Луч O_1A называется *одинаково направленным* с лучом O_2B, если либо луч O_1A содержится в луче O_2B, либо луч O_2B содержится в луче O_1A, т.е. пересечением лучей O_1A и O_2B является луч (рис. 4.2) (пишется: $O_1A \uparrow\uparrow O_2B$).

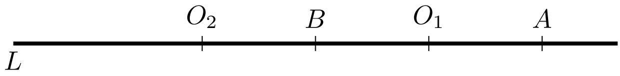


Рис. 4.2

Луч O_1A называется *противоположно направленным* с лучом O_2B, если ни один из них не содержится в другом, т.е. их пересечение не является лучом (рис. 4.3) (пишется: $O_1A \uparrow\downarrow O_2B$).

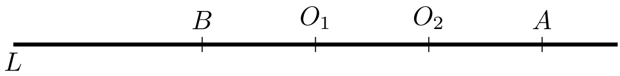


Рис. 4.3

2. Лучи O_1A и O_2B лежат на параллельных прямых.

Тогда эти две прямые определяют плоскость, в которой они лежат. Проведем через точки O_1 и O_2 прямую. Она разобьет плоскость, в которой лежат лучи O_1A и O_2B, на две полуплоскости с границей, представленной прямой, проходящей через точки O_1 и O_2. Если оба луча O_1A и O_2B лежат в одной из этих полуплоскостей, то луч O_1A называется *одинаково направленным* с лучом O_2B (рис. 4.4) (пишется: $O_1A \uparrow\uparrow O_2B$).

Если же лучи O_1A и O_2B лежат в различных полуплоскостях, то луч O_1A называется *противоположно направленным* с лучом O_2B (рис. 4.5) (пишется: $O_1A \uparrow\downarrow O_2B$).

3. Лучи O_1A и O_2B лежат на непараллельных прямых.

Для лучей, принадлежащих непараллельным прямым, понятие одинаковой направленности (или противоположной направленности) не вводится.

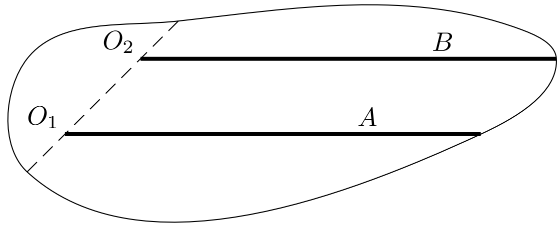


Рис. 4.4

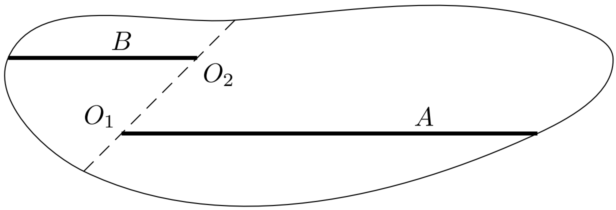


Рис. 4.5

Пусть A и B — две различные точки прямой L. Множество, состоящее из всех точек прямой L, лежащих между точками A и B, включая точки A и B, называется *отрезком*. Точки A и B называются *концами отрезка*, а все остальные точки — *внутренними точками отрезка*. Отрезок с концами A и B обозначается $[AB]$.

Длина отрезка $[AB]$ обозначается $|[AB]|$, или $|AB|$. Отрезок $[AB]$ называется равным отрезку $[CD]$ (равным по длине отрезку $[CD]$), если длина отрезка $[AB]$ равна длине отрезка $[CD]$.

4.3. Направление на прямой. Направленный отрезок

Теорема 4.1. *Отношение одинаковой направленности лучей является отношением эквивалентности, т.е.*

— любой луч одинаково направлен с самим собой (рефлексивность);

— если луч O_1A одинаково направлен с лучом O_2B, то и луч O_2B одинаково направлен с лучом O_1A (симметричность);

— если луч O_1A одинаково направлен с лучом O_2B и луч O_2B одинаково направлен с лучом O_3C, то луч O_1A одинаково направлен с лучом O_3C (транзитивность).

В соответствии с этой теоремой два луча, удовлетворяющие условию одинаковой направленности, называются *одинаково направленными лучами*.

Множество всех лучей плоскости, каждый из которых одинаково направлен с одним и тем же лучом, называется *направлением на плоскости*.

Множество всех лучей пространства, каждый из которых одинаково направлен с одним и тем же лучом, называется *направлением в пространстве*.

Таким образом, согласно теореме 4.1 каждый луч определяет некоторое направление, и каждое направление определяется некоторым лучом.

На прямой существуют только два направления. Одно из направлений принимается за *положительное направление*, другое — за *отрицательное направление*. На чертежах положительное направление обозначается стрелкой (рис. 4.6) и отмечается какой-либо буквой, например, x.

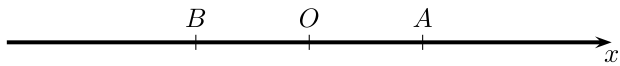


Рис. 4.6

Если за положительное направление на прямой (чаще всего ее называют *осью*, *числовой осью*, *осью Ox*) принято направление от точки O к точке A (рис. 4.6), то также положительным будет направление от точки B к точке O и от точки B к точке A, если точки A и B лежат на противоположно направленных лучах. Направление же от точки A к точке O (и от точки A к точке B и от точки O к точке B) в этом случае будет отрицательным.

Направленным отрезком на прямой называется отрезок, для которого указаны начало и конец. При записи направленного отрезка вначале записывают обозначение его начала, а затем обозначение его конца. На рис. 4.6 можно считать изображенными несколько пар различных направленных отрезков (BA, AB; BO, OB; OA, AO), в которых направленные отрезки различаются направлением, но имеют одну и ту же длину. Например, отрезок BA имеет то же направление, что и прямая (ось Ox), на которой он находится; а отрезок AB имеет направление, противоположное направлению оси Ox. Чтобы различать отрезки $[AB]$ и направленные отрезки AB, для направленных отрезков используют обозначение $\overline{AB}$.

Направленный отрезок $\overline{AB}$ на прямой называется *равным* направленному отрезку $\overline{CD}$ на прямой, если начало направленного отрезка $\overline{AB}$ совпадает с началом направленного отрезка $\overline{CD}$ и при этом их концы также совпадают. Таким образом, направленный отрезок однозначно определяется, если заданы две точки и указано, какая точка является началом направленного отрезка.

4.4. Скалярные и векторные величины

Многие величины, встречающиеся в математике, механике, физике и технике, задаются одним вещественным числом. Например, длину, массу, температуру, плотность можно охарактеризовать одним числом (безразмерным или соответствующей размерности, положительным или отрицательным). Такого рода величины называются *скалярными величинами* (скалярами). Они могут быть изображены в соответствующем масштабе на числовой оси.

Скалярная величина x, которая может быть любым числом из тех, которые составляют числовое множество E, называется *переменной величиной* (переменной). Например, неравенство $a \leqslant x \leqslant b$ определяет переменную величину x, значением которой является любое число из отрезка $[a, b]$. Каждое конкретное число из множества E называется *значением переменной* x.

Если величина x принимает лишь одно единственное числовое значение, т.е. если можно считать, что множество E состоит только из одного элемента, то такая величина x называется *постоянной величиной* (постоянной, константой).

Наряду со скалярами часто встречаются величины, которые характеризуются несколькими числами. Величины такого рода называются *векторными величинами* (векторами). Так, сила, скорость и ускорение точки характеризуются не только своей численной величиной, но и направлением. Таким же свойством обладают напряженности электрического и магнитного полей.

В геометрии и алгебре также очень часто рассматриваются множества, составленные из векторных величин.

4.5. Вектор

Направленным отрезком (*геометрическим вектором*) *в пространстве*, как и на плоскости, называется отрезок, у которого определено направление. Это можно сделать, зафиксировав две точки — концы отрезка — и указав, какая точка является началом отрезка (эта точка называется *точкой приложения*), а какая — концом.

Если задан отрезок $[AB]$, то, считая, что точки A и B принадлежат отрезку, можно задать два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$. Для направленного отрезка $\overline{AB}$ считается, что точка A является точкой приложения (начальной точкой), а для направленного отрезка $\overline{BA}$ считается, что начальной точкой является точка B. Направление понимается как направление от начала к концу.

Рассматриваются некоторые *допустимые преобразования направленных отрезков*, которые заключаются в их параллельном переносе в любую начальную точку приложения. При этом направление отрезка в смысле одинаковой направленности с некоторой полуосью сохраняется, а длина не изменяется. Такое допустимое преобразование разбивает множество всех направленных отрезков на *совокупность одинаково направленных отрезков*.

Теорема 4.2. *Отношение одинаковой направленности направленных отрезков является отношением эквивалентности.*

Вектором (*свободным вектором*) называется совокупность одинаково направленных равных по длине направленных отрезков. Каждый из одинаково направленных равных по длине направленных отрезков называется *представителем свободного вектора*. Векторы обозначаются символами $\boldsymbol{a}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{a}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{a}$.

Если направленный отрезок $\overline{AB}$ является одним из представителей свободного вектора $\boldsymbol{a}$, то и свободный вектор часто обозначается через $\overline{AB}$, хотя свободный вектор — это на самом деле класс одинаково направленных равных по длине направленных отрезков. Для свободных векторов возможно применение обозначения $\langle\overline{AB}\rangle$, отличного от обозначения $\overline{AB}$, если направленный отрезок $\overline{AB}$ является одним из представителей свободного вектора $\langle\overline{AB}\rangle$.

Пространство (множество) всех векторов обозначается символом V_3 и называется *векторным пространством* V_3.

В механике и физике кроме свободных векторов рассматриваются *скользящие* и *связанные векторы*. В данном же пособии изучаются свободные векторы.

Длиной вектора $\boldsymbol{a}$ (обозначается $|\boldsymbol{a}|$), называется длина любого направленного отрезка, являющегося одним из представителей этого свободного вектора. Следовательно, длиной вектора $\langle\overline{AB}\rangle$ является число $|\overline{AB}|$, равное длине отрезка $[AB]$.

Равенство двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (обозначается: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$) определяется через равенство длин и одинаковую направленность их представителей. Вектор $\langle\overline{AB}\rangle$ называется *равным* вектору $\langle\overline{CD}\rangle$, если $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ и $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Одинаковая направленность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, противоположная направленность — $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

Нулевым вектором (нуль-вектором) называется вектор, имеющий длину, равную нулю. Нуль-вектор обозначается символом $\mathbf{0}$. Направление нулевого вектора считается неопределенным. Вектор, у которого его начало и конец совпадают, будет нулевым вектором.

Если ненулевые векторы $\langle\overline{AB}\rangle$ и $\langle\overline{CD}\rangle$ равны, то можно построить четырехугольник $ABDC$, являющийся параллелограммом, как это сделано на рис. 4.7.

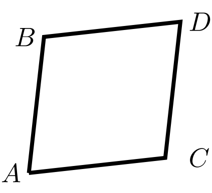


Рис. 4.7

Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на плоскости или в пространстве называются *коллинеарными векторами*, если при приведении их представителей к одной точке приложения эти представители расположатся на одной прямой. В этом случае часто говорят не о представителях векторов, а просто о самих векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, неколлинеарность — $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$.

В соответствии с определением коллинеарности $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда либо $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, либо $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$, или, через обозначение эквивалентности символом $\Leftrightarrow$ и дизъюнкции $\vee$, $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

Нулевой вектор считается как коллинеарным, так и неколлинеарным любому вектору $\boldsymbol{a}$.

Три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ пространства называются *компланарными векторами*, если при приведении их представителей к одной точке приложения эти представители расположатся в одной плоскости. Как и в случае коллинеарности, часто говорят не о представителях векторов, а о самих векторах. Компланарность векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ обозначается $Cp(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, некомпланарность — $\neg Cp(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$. Может рассматриваться компланарность и большего числа векторов, чем трех.

4.6. Сложение векторов

Сложение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется по правилу треугольника (рис. 4.8), а в случае их неколлинеарности — по правилу параллелограмма (рис. 4.9).

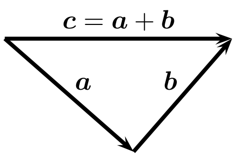


Рис. 4.8

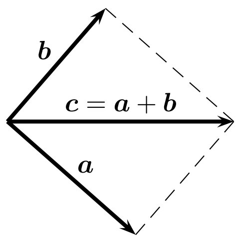


Рис. 4.9

Суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (обозначается $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$) называется вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\boldsymbol{a}$, а конец — с концом вектора $\boldsymbol{b}$, если начало вектора $\boldsymbol{b}$ путем параллельного переноса совмещено с концом вектора $\boldsymbol{a}$ (правило треугольника).

Возможно вырождение треугольника, если складываются коллинеарные векторы (рис. 4.10–4.12).

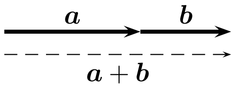


Рис. 4.10

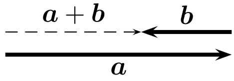


Рис. 4.11

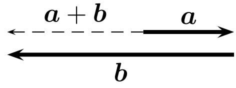


Рис. 4.12

Свойства сложения векторов:

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

3) для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$;

4) для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует такой вектор $-\boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$;

5) для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ существует такой вектор $\boldsymbol{c}$, что $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$.

Вектор $\mathbf{0}$ является *нуль-вектором*. Вектор $-\boldsymbol{a}$ называется *противоположным вектором* для вектора $\boldsymbol{a}$. Длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{a}$ равны, но направления противоположны.

Вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий соотношению $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$, называется *разностью векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. Геометрически разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ есть вектор, который имеет начало в конце вектора $\boldsymbol{b}$ и который направлен по диагонали параллелограмма, если этот параллелограмм построить на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, приведенных к общему началу (рис. 4.13).

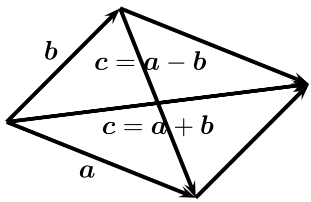


Рис. 4.13

Для суммы и разности длин двух векторов верны свойства:

1) $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

2) $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

4.7. Умножение вектора на число

Умножение вектора на действительное число определяется с помощью увеличения (или уменьшения) длины и изменения направления на противоположное направление при умножении на отрицательное число (рис. 4.14–4.15).

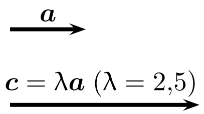


Рис. 4.14

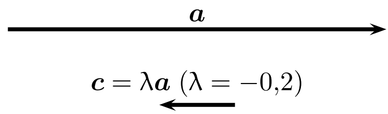


Рис. 4.15

Произведением числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ называется вектор, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если $\lambda > 0$ (рис. 4.14), и противоположно ему, если $\lambda < 0$ (рис. 4.15). Следовательно,

$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |\boldsymbol{c}| = \lambda|\boldsymbol{a}|, \\ \lambda > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \\ \lambda = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} |\boldsymbol{c}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|, \\ \lambda < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Свойства умножения вектора на число:

а) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;

б) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$;

в) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$;

г) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$;

д) $0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;

е) $\alpha \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$;

ж) $(-1) \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

Коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равносильна существованию числа λ такого, что $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ (рис. 4.14–4.15).

Компланарность неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равносильна существованию чисел λ и μ таких, что $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.

Умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на число $1/\lambda$ эквивалентно делению вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ, поэтому возможно деление вектора на ненулевое число: $\boldsymbol{a}/\lambda = \boldsymbol{c}$.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна 1.

Ортом ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ (обозначается $\boldsymbol{a}^0$) называется единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a}^0 = \mathbf{1} \wedge \boldsymbol{a}^0 \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}$.

Верно, что, если вектор $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{a}^0$.

4.8. Линейная комбинация и линейная зависимость системы векторов

Линейной комбинацией системы векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ ($n \geqslant 1$) с *коэффициентами* λ_1, λ_2, ..., λ_n называется сумма произведений данных векторов на соответствующие числа:

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_n\boldsymbol{a}_n.$$

Например, разность $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ есть линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с коэффициентами 2 и -3, вектор $4\boldsymbol{a}$ есть линейная комбинация вектора $\boldsymbol{a}$ с коэффициентом 4.

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ ($n \geqslant 2$) называются *линейно зависимыми векторами*, если существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, одновременно не равные нулю, что линейная комбинация данных векторов с соответствующими коэффициентами λ_1, λ_2, ..., λ_n равняется нулевому вектору; в противном случае векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ называются *линейно независимыми векторами*.

Нулевой вектор линейно зависим с любым другим вектором, так как справедливо равенство $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Теорема 4.3 (условия линейной независимости). *Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда их линейная комбинация равна нулевому вектору только при нулевых коэффициентах.*

Теорема 4.4 (условия линейной зависимости). *Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда какой-либо один из них является линейной комбинацией остальных.*

Пример 4.1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\boldsymbol{a}_1 = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}_3 = -2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$, если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно независимы.

Решение. Пусть линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ с коэффициентами λ_1, λ_2, λ_3 равна нулевому вектору, т.е.

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}) + \lambda_2(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \lambda_3(-2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}.$$

После приведения подобных членов получим

$$(3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3)\boldsymbol{a} + (-\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3)\boldsymbol{b} + (4\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3)\boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

Отсюда

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \quad -\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \quad 4\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0,$$

так как векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно независимы. Полученная однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

с определителем системы

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

имеет только нулевые решения. Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ линейно независимы. □

4.9. Коллинеарность векторов

Теорема 4.5 (признак коллинеарности). *Два вектора являются коллинеарными тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть даны два коллинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Если хотя бы один из них нулевой вектор, то они линейно зависимы.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы и $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. Тогда $\lambda\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы.

Пусть даны два линейно зависимых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Если хотя бы один из них нулевой вектор, то они являются коллинеарными.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два линейно зависимые ненулевые векторы. Тогда $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, причем хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Пусть $\mu \neq 0$. Отсюда $\boldsymbol{b} = -(\lambda/\mu) \cdot \boldsymbol{a}$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — коллинеарные векторы. □

4.10. Компланарность системы векторов

Теорема 4.6. *Если какие-нибудь два из трех векторов являются коллинеарными, то эти три вектора являются компланарными.*

Теорема 4.7. *Векторы* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ *компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Теорема 4.8. *Если один из трех векторов является линейной комбинацией двух других векторов, то эти вектора компланарны.*

Разложением вектора $\boldsymbol{a}$ по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется *представлением вектора* $\boldsymbol{a}$ *в виде линейной комбинации* $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$. Числа λ и μ называются *коэффициентами разложения вектора* $\boldsymbol{a}$ по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, векторы $\boldsymbol{a}_1 = \lambda\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}_2 = \mu\boldsymbol{c}$ — *компонентами* (составляющими) *разложения.*

Теорема 4.9. *Любой вектор плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам и это разложение однозначно.*

Разложением вектора $\boldsymbol{a}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ называется представление вектора $\boldsymbol{a}$ в виде линейной комбинации $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 + \gamma\boldsymbol{a}_3$. Числа α, β и γ называются *коэффициентами разложения* вектора $\boldsymbol{a}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$, векторы $\boldsymbol{b}_1 = \alpha\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \beta\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_3 = \gamma\boldsymbol{a}_3$ — *компонентами* (составляющими) *разложения.*

Теорема 4.10. *Любой вектор пространства можно разложить по трем некомпланарным векторам и это разложение однозначно.*

Теорема 4.11. *Сумма трех некомпланарных векторов определяется диагональю параллелепипеда, построенного на представителях данных векторов с общим началом, как на ребрах.*

4.11. Базис на плоскости и в пространстве

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Так как любой вектор плоскости можно разложить по паре неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и это разложение однозначно, то любой вектор $\boldsymbol{c}$ представим в виде $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.

Координатами вектора $\boldsymbol{c}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ называются коэффициенты λ и μ разложения вектора $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. Так как векторы базиса упорядочены, то координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ образуют упорядоченную пару (λ,μ). Коэффициент вектора $\boldsymbol{c}$ при первом базисном векторе называется *первой координатой вектора* $\boldsymbol{c}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, коэффициент вектора $\boldsymbol{c}$ при втором базисном векторе называется *второй координатой вектора* $\boldsymbol{c}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Так как любой вектор пространства можно разложить по тройке некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и это разложение однозначно, то любой вектор $\boldsymbol{d}$ представим в виде

$$\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}.$$

Координатами вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ называются коэффициенты λ, μ и ν разложения вектора $\boldsymbol{d}$ по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$. Так как векторы базиса упорядочены, то координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ образуют упорядоченную тройку (λ,μ,ν). При этом коэффициент вектора $\boldsymbol{d}$ при первом базисном векторе называется *первой координатой вектора* $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, коэффициент вектора $\boldsymbol{d}$ при втором базисном векторе называется *второй координатой вектора* $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, коэффициент вектора $\boldsymbol{d}$ при третьем базисном векторе называется *третьей координатой вектора* $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

Базис $\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{c}_1)$ называется *базисом, одинаково ориентированным с базисом* $\boldsymbol{\beta}_2 = (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}_2)$ (обозначается $\boldsymbol{\beta}_1 Co \boldsymbol{\beta}_2$ или $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1) Co (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2)$), если определитель, составленный из координат векторов первого базиса относительно второго базиса, положителен, т.е.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} > 0,$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \alpha_1\boldsymbol{a}_2 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \alpha_3\boldsymbol{c}_2, \\ \boldsymbol{b}_1 &= \beta_1\boldsymbol{a}_2 + \beta_2\boldsymbol{b}_2 + \beta_3\boldsymbol{c}_2, \\ \boldsymbol{c}_1 &= \gamma_1\boldsymbol{a}_2 + \gamma_2\boldsymbol{b}_2 + \gamma_3\boldsymbol{c}_2 \end{aligned}$$

— разложения векторов первого базиса $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ относительно второго базиса $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2)$. В противном случае базисы называются *противоположно ориентированными.*

Существуют две ориентации базисов на плоскости и в пространстве. Одна из ориентаций называется *положительным базисом*, другая — *отрицательным.*

Пример 4.2. Относительно положительного базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}_1 = -2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}_1 = -9\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 7\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}_2 = -3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}_2 = 5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$. Будут ли базисы $\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ и $\boldsymbol{\beta}_2 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2)$ положительными или отрицательными?

Решение. Вычисление определителей из координат векторов базисов $\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ и $\boldsymbol{\beta}_2 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2)$ относительно базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ дает

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -3 \\ -9 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 9 \\ -6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 131 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -23 < 0.$$

Ответ: базис $\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ является положительным базисом, а базис $\boldsymbol{\beta}_2 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2)$ — отрицательным. □

Ортонормированным базисом называется базис, в котором все векторы единичны и попарно ортогональны (перпендикулярны). Именно такие базисы рассматриваются далее, а координаты вектора в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ называются *координатами вектора.*

Репером в плоскости называются два неколлинеарных, приведенных к одному началу вектора. Далее в пособии рассматривается ортонормированный репер на плоскости $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$.

Репером в пространстве называются три некомпланарных, приведенных к одному началу вектора. В данном пособии рассматривается ортонормированный репер в пространстве $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Упражнения

4.1. Дана точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{p}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{q}$. Выразить через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ следующие векторы: $\overline{BO}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$.

4.2. В треугольнике ABC заданы векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{p}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{q}$, $\overline{CA} = \boldsymbol{r}$. Выразить через $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$, где K, L, M — середины сторон треугольника.

4.3. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ — медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \mathbf{0}$.

4.4. $\overline{AK}$ и $\overline{BM}$ — медианы треугольника ABC. Выразить через $\boldsymbol{p} = \overline{AK}$ и $\boldsymbol{q} = \overline{BM}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.

4.5. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$. Выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ и $\overline{MD}$, где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

4.6. В треугольнике ABC $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$ и $\overline{CN} = \beta\overline{CM}$. Полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{AC} = \boldsymbol{b}$, выразить $\overline{AN}$ и $\overline{BN}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

4.7. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, причем $\overline{AB} = \boldsymbol{p}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{q}$. Выразить через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$.

4.8. M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать, что $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

4.9. Разложить вектор $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$.

4.10. Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

4.11. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Вычислить их сумму, если известно, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\beta\boldsymbol{a}$ и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны.

4.12. Доказать, что для любых заданных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ компланарны.

4.13. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ компланарны.

Примеры тестовых заданий

4.1. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ двумерного векторного пространства задан вектор $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. Тогда в базисе $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты...

1) $(4;2)$; 2) $(2;-1)$; 3) $(2;1)$; 4) $(1;1)$.

4.2. Дано двумерное векторное пространство с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Если вектор $\boldsymbol{e}_1=\{1;-1\}$, то вектор $\boldsymbol{e}_2$ может иметь координаты...

1) $(0;0)$; 2) $(-1;1)$; 3) $(2;-2)$; 4) $(1;0)$.

Глава 5

Системы координат. Действия над векторами в координатах

5.1. Система координат на плоскости

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является *прямоугольная* (декартова) *система координат*.

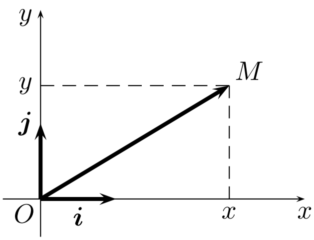


Рис. 5.1

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — *осями*, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют *осями координат*, точку их пересечения — *началом координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* (осью Ox), другую — *осью ординат* (осью Oy) (рис. 5.1).

На рисунках ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат — вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области — *четверти* (или квадранты).

Единичные векторы осей обозначают $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ ($|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = 1$, $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$); их называют *ортами*.

Систему координат обозначают Oxy (или $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$), а плоскость, в которой расположена система координат, называют *координатной плоскостью*.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy (рис. 5.1). Вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

Координатами точки M в системе координат Oxy ($O\boldsymbol{ij}$) называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$; число x называется *абсциссой точки* M, y — *ординатой точки* M. Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Другой практически важной системой координат является *полярная система координат*. Она задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью*, и единичным вектором $\boldsymbol{l}$ того же направления, что и луч Op (рис. 5.2).

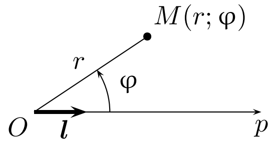


Рис. 5.2

Возьмем на плоскости точку M, не совпадающую с точкой O (рис. 5.2). Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки). Числа r и φ называются *полярными координатами точки* M, пишут $M(r; \varphi)$, при этом r называют *полярным радиусом*, φ — *полярным углом*.

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $[0; 2\pi)$, а полярный радиус — $[0; +\infty)$. В этом случае каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и наоборот.

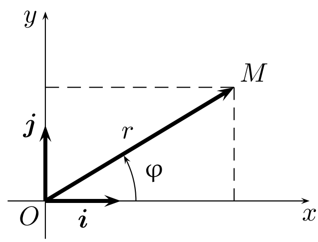


Рис. 5.3

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. Для этого совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось — с положительной полуосью Ox (рис. 5.3).

Пусть x и y — прямоугольные координаты точки M, а r и φ — ее полярные координаты. Из рис. 5.3 видно, что прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Полярные же координаты точки M выражаются через ее декартовы координаты формулами

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Определяя величину φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учесть, что $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

5.2. Система координат в пространстве

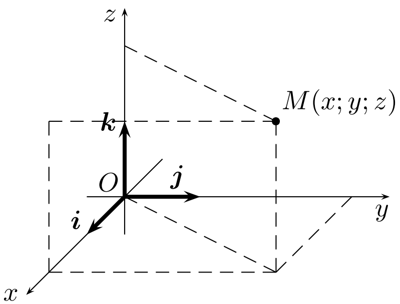


Рис. 5.4

Системой координат в пространстве (декартовой системой координат) называется тройка пересекающихся в одной точке прямых (*координатных осей*), для которых их общая точка называется *началом координат*. На каждой из прямых определяется *положительное направление* и *масштаб* (в общем случае свой для каждой из прямых). Направление, противоположное положительному направлению, называется *отрицательным*. Масштаб может быть указан некоторыми точками E_1, E_2, E_3.

Так как наиболее употребительны прямоугольные (правые) декартовы системы координат в пространстве с одинаковыми масштабами на всех осях, то на рис. 5.4 приводится такая система координат. Не исключено применение левых систем координат в пространстве.

Координаты точки в системе координат в пространстве находятся проектированием точки на координатную ось. Например, координата x находится проектированием точки на ось Ox параллельно плоскости yOz. Таким образом, в пространстве точка определяется тремя числами (координатами).

Ортонормированным базисом называется базис, в котором все векторы единичны и попарно ортогональны (перпендикулярны). Именно такие базисы рассматриваются далее, а координаты вектора в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ называются просто *координатами вектора*.

5.3. Действия над векторами в координатах

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая. *Проекцией точки* M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось (рис. 5.5).

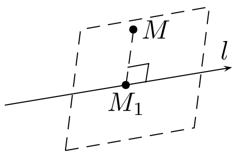


Рис. 5.5

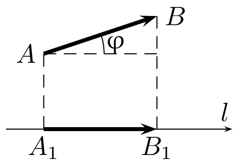


Рис. 5.6

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число, равное величине отрезка $\overline{A_1B_1}$ оси l, где точка A_1 является проекцией на ось l точки A, а B_1 — проекцией на эту ось точки B (рис. 5.6). Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается символом $\text{пр}_l\,\overline{AB}$. Если вектор обозначен символом $\boldsymbol{a}$, то его проекцию на ось l принято обозначать $\text{пр}_l\,\boldsymbol{a}$. Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось l выражается через его модуль и угол наклона к оси l формулой $\text{пр}_l\,\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$.

Проекции вектора на координатные оси называют также его *координатами*. Равенство $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ означает, что числа α_1, α_2, α_3 являются проекциями вектора на координатные оси.

Понятие координат вектора является основным в векторном исчислении. Оно позволяет сводить задание векторов и действий с ними к заданию систем действительных чисел и действий над этими системами чисел.

Задание базиса на плоскости или в пространстве позволяет отождествлять каждый вектор $\boldsymbol{a}$ с парой или тройкой чисел (α, β) или (α, β, γ) — его координатами в заданном базисе. При этом координаты суммы векторов $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2)$ на плоскости равны сумме координат слагаемых:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2),$$

а координаты произведения $\alpha\boldsymbol{a}$ равны произведениям координат вектора $\boldsymbol{a}$ на число α:

$$\alpha\boldsymbol{a} = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2).$$

Аналогичные формулы верны и для векторов $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ в пространстве:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3), \quad \alpha\boldsymbol{a} = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \alpha\alpha_3).$$

Пример 5.1. Для векторов $\boldsymbol{a} = (-1; 2; -3)$ и $\boldsymbol{b} = (0; 3; -3)$ найти $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a}$.

Решение.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-1 + 0; 2 + 3; -3 + (-3)) = (-1; 5; -6),$$
$$3\boldsymbol{\alpha} = (3 \cdot (-1); 3 \cdot 2; 3 \cdot (-3)) = (-3; 6; -9). \qquad \square$$

Формулы

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

соответственно для плоскости и пространства позволяют по координатам вектора определить его модуль.

Координаты вектора и соответствующих точек начала и конца вектора-представителя связаны правилом: если $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ — две точки плоскости, заданные своими координатами, то вектор $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$ имеет координаты $\boldsymbol{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, т.е. координаты вектора равны разности координат конца и начала. Аналогичная формула верна и для векторов в пространстве. Например, если $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Признаком коллинеарности двух векторов $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ является пропорциональность их координат: $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = \alpha_3/\beta_3$.

Каким бы не был вектор $\boldsymbol{a}$, он всегда может быть разложен по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, т.е. может быть представлен в виде $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} + \alpha_3\boldsymbol{k}$. Коэффициенты этого разложения являются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ (т.е. α_1, α_2, α_3 — проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на координатные оси).

Аналогичные рассуждения проводятся для векторов на плоскости.

5.4. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

Расстояние d между двумя данными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Если в пространстве даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние d между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Если точка $M(x, y)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, и дано отношение $\lambda = M_1M/MM_2$, в котором точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка M является серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$, то ее координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

В пространстве координаты x, y, z точки M, которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ имеем координаты середины данного отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

5.5. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (обозначается $\boldsymbol{ab}$, или $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\widehat{\boldsymbol{ab}}.$$

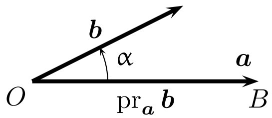


Рис. 5.7

Произведение $|\boldsymbol{b}|\cos\widehat{\boldsymbol{ab}}$ равно проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$, т.е. $|\boldsymbol{b}|\cos\alpha = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} = OB$ (рис. 5.7).

Теорема 5.1. *Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них на проекцию второго вектора на направление первого, т.е.*

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{b}|\,\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}.$$

Замечание. В скалярное произведение входит *ненаправленный угол* между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, который обозначается $\widehat{\boldsymbol{ab}}$. В скалярном произведении направление угла несущественно, так как

$$\cos\widehat{\boldsymbol{ab}} = \cos\widehat{\boldsymbol{ba}} = \cos(2\pi - |\widehat{\boldsymbol{ab}}|),$$

где $|\widehat{\boldsymbol{ab}}|$ — мера угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\boldsymbol{ab} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2. $\boldsymbol{ab} > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

3. $\boldsymbol{ab} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Скалярным квадратом вектора называется скалярное произведение вектора на себя (обозначается $\boldsymbol{a}^2$).

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, т.е. $\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2$.

Теорема 5.2. *Скалярный квадрат единичного вектора равен единице.*

5. Скалярное произведение коммутативно: $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

6. Скалярное произведение сочетательно по отношению к числовому множителю: $\lambda(\boldsymbol{ab}) = (\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})$.

7. Скалярное произведение дистрибутивно слева относительно сложения векторов: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$.

8. На основании определения скалярного произведения и свойства 4 скалярные произведения координатных ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ можно задать в виде таблицы:

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

9. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$: $\boldsymbol{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $\boldsymbol{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. Тогда скалярное произведение этих векторов равно

$$\boldsymbol{ab} = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

10. $\alpha^2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$.

5.6. Применение скалярного произведения

1. Длина вектора $\boldsymbol{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$, вычисляется по формуле

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\,.$$

2. Угол φ между двумя ненулевыми векторами $\boldsymbol{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $\boldsymbol{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, заданными своими координатами в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$, может быть найден из формулы

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}.$$

3. Пусть точка M проходит путь длины s по прямой от точки A до точки B. Предположим, что на точку действует постоянная по величине и направлению сила $\boldsymbol{F}$. Тогда работа силы F на отрезке AB будет равна

$$\boldsymbol{F}\cdot\overline{AB} = F\cdot s\cdot\cos\varphi,$$

где φ — угол между направлением движения точки и силой $\boldsymbol{F}$.

5.7. Направляющие косинусы векторов

Косинусы углов между вектором $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и базисными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ называются *направляющими косинусами* вектора $\boldsymbol{a}$ и вычисляются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Направляющие косинусы любого вектора $\boldsymbol{a}$ связаны равенством

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его орта $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$.

5.8. Ориентирование плоскостей и пространств

Ориентированной плоскостью и *ориентированным пространством* называется соответственно плоскость и пространство с выбранной ориентацией. Выбранная ориентация называется *положительной ориентацией*, противоположная ей ориентация — *отрицательной ориентацией*. Базисы, принадлежащие положительной ориентации, называются *положительными базисами*; базисы, принадлежащие отрицательной ориентации, называются *отрицательными базисами*. Положительная и отрицательная ориентации определяются заданием одного положительного или соответственно — отрицательного базиса.

Наглядно положительные и отрицательные базисы на плоскости представляются так. Пусть представители базисных векторов отложены от общего начала O. Тогда направление кратчайшего вращения от представителя первого базисного вектора к представителю второго базисного вектора, независимо от выбора точки O, будет либо совпадать, либо не совпадать с направлением вращения часовой стрелки. В первом случае базис принято считать отрицательным (левым) базисом, во втором — положительным (правым) базисом. Принято также пользоваться правыми (положительными) базисами на плоскости, что объясняется только общепринятой практикой использования правых систем координат и поэтому некоторой естественностью и удобством.

Положительные и отрицательные базисы пространства наглядно представляются следующим образом. Пусть $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ — представители соответствующих базисных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ — отложены от общего начала O. Тогда, если смотреть с конца вектора $\overline{OC}$ на плоскость, содержащую векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, направление кратчайшего вращения от вектора $\overline{OA}$ к вектору $\overline{OB}$, будет либо совпадать, либо не совпадать с направлением вращения часовой стрелки. В первом случае базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ принято считать левым (отрицательным) базисом, во втором случае — правым (положительным) базисом.

Угол между лучом O_1A и одинаково направленным с ним лучом O_2B называется *нулевым углом*. Угол между лучом O_1A и противоположно направленным с ним лучом O_2B называется *развернутым углом*. Это так называемые *несобственные направленные углы*, углы между другими лучами называются *собственными направленными углами*.

Пусть лучи O_1A и O_2B лежат на непараллельных прямых. Тогда эти прямые пересекаются в некоторой точке O. *Направленным углом* между лучом O_1A и лучом O_2B называется угол между лучом OA и лучом OB (рис. 5.8). Луч O_1A называется *начальной стороной угла*, луч O_2B называется *конечной стороной угла*. Таким образом, направленным углом можно считать упорядоченную пару лучей с общей вершиной.

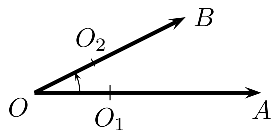


Рис. 5.8

Собственный направленный угол в ориентированной плоскости называется *положительно ориентированным* (положительным), если существует положительный базис, направления первого и второго векторов которого совпадают соответственно с направлениями начальной и конечной стороны данного угла. Собственный направленный угол в ориентированной плоскости называется *отрицательно ориентированным* (отрицательным), если существует отрицательный базис, направления первого и второго векторов которого совпадают соответственно с направлениями начальной и конечной стороны данного угла.

Наглядное представление положительных углов (в соответствии с принятым соглашением о правом базисе) следующее: для положительных углов направление кратчайшего вращения от начальной стороны угла к конечной стороне угла противоположно вращению часовой стрелки. Наглядное представление отрицательных углов (в соответствии с тем же принятым соглашением о правом базисе) следующее: для отрицательных углов направление кратчайшего вращения от начальной стороны угла к конечной стороне угла совпадает с направлением вращения часовой стрелки.

Мерой собственного направленного угла называется мера угла с теми же сторонами, если данный угол является положительным или ее дополнение до 2π, если угол является отрицательным. Мера нулевого и развернутого углов полагается соответственно равной 0 и π.

Углом (направленным углом) *между векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ называется угол, отсчитываемый от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$, образованный лучами, выходящими из какой-либо точки и имеющими направление векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Величина (мера) направленного угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $\widehat{\boldsymbol{ab}}$.

Таким образом, угол между векторами считается направленным углом и положительное направление от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ проводится против часовой стрелки по направлению кратчайшего вращения от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$.

5.9. Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, обозначаемым $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (или $[\boldsymbol{ab}]$), называется вектор, определяемый следующими тремя условиями:

1) длина (модуль) вектора $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ равен $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

2) вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{a}$, так и вектору $\boldsymbol{b}$;

3) упорядоченная тройка векторов $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, отложенных от одной точки, образует правый (положительный) базис (рис. 5.9).

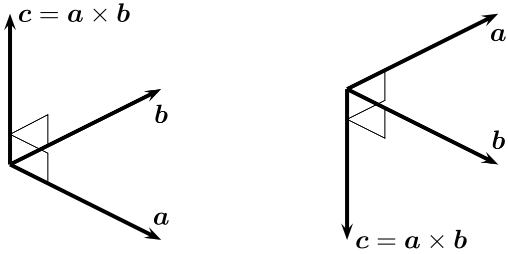


Рис. 5.9

Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ нулевой, то векторное произведение двух векторов считается равным нулевому вектору.

Свойства векторного произведения:

а) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$;

б) $(\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

г) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

На основании определения векторного произведения и свойства а) векторные произведения координатных ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ можно задать в виде таблицы:

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$

Векторное произведение двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $\boldsymbol{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, заданных своими координатами в ортонормированном базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$, может быть найдено из символической формулы

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}.$$

Разложение по элементам первой строки дает

$$a \times b = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} k.$$

Таким образом,

$$a \times b = \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right).$$

5.10. Применение векторного произведения

1. Из первого условия определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ как на сторонах параллелограмма, равна длине вектора векторного произведения, т.е.

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin \varphi.$$

2. Момент $\boldsymbol{m}_O(M)$ силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к точке M, относительно начала координат O может быть вычислен по формуле

$$\boldsymbol{m}_O(M) = \boldsymbol{r}_M \times \boldsymbol{F},$$

где $\boldsymbol{r}_M = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M.

5.11. Смешанное произведение векторов

В ориентированном пространстве *смешанным произведением трех векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется число, обозначаемое символом $\boldsymbol{abc}$, равное скалярному произведению векторного произведения $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ первых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и третьего вектора $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Смешанное произведение обладает следующими *основными свойствами*:

а) смешанное произведение трех векторов обращается в нуль тогда и только тогда, когда сомножители компланарны: $\boldsymbol{abc} = 0 \Leftrightarrow Cp(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ (*обращение в нуль смешанного произведения*);

б) если в смешанном произведении трех векторов хотя бы два сомножителя совпадают, то их смешанное произведение равно нулю, т.е. $\boldsymbol{aab} = \boldsymbol{aba} = \boldsymbol{baa} = \boldsymbol{aaa} = 0$;

в) смешанное произведение некомпланарных векторов положительно тогда и только тогда, когда его сомножители — первый, второй, третий — образуют положительный базис: $\boldsymbol{abc} > 0 \Leftrightarrow$ базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ – положительный (*геометрический смысл знака смешанного произведения*);

г) смешанное произведение некомпланарных векторов отрицательно тогда и только тогда, когда его сомножители — первый, второй, третий — образуют отрицательный базис: $\boldsymbol{abc} < 0 \Leftrightarrow$ базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ – отрицательный (*геометрический смысл знака смешанного произведения*);

д) при транспозиции двух сомножителей смешанное произведение некомпланарных векторов изменяет знак: $\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{bac} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{acb}$ (*антипереместительность*);

е) при циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не изменяется: $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab}$;

ж) смешанное произведение сочетательно относительно числового множителя по каждому из своих сомножителей: $\lambda(\boldsymbol{abc}) = (\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ (*сочетательность смешанного произведения*);

з) смешанное произведение распределительно относительно суммы векторов по каждому сомножителю:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc},\\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab}_1\boldsymbol{c} + \boldsymbol{ab}_2\boldsymbol{c},\\ \boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{abc}_1 + \boldsymbol{abc}_2\end{gathered}$$

(*распределительность смешанного произведения*).

Пример 5.2. Доказать тождество $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

Решение. $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. □

Теорема 5.3. *Смешанное произведение* $\boldsymbol{abc}$ *трех векторов* $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\boldsymbol{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *в положительном ортонормированном базисе* $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ *равно определителю третьего порядка, составленному из координат сомножителей, т.е.*

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

5.12. Применение смешанного произведения

5.12.1. Геометрический смысл абсолютной величины смешанного произведения.

1. Абсолютная величина смешанного произведения трех некомпланарных векторов равна объему $V_{\text{пар}}$ параллелепипеда, построенного на представителях сомножителей с общим началом как на ребрах:

$$|\boldsymbol{abc}| = V_{\text{пар}}.$$

2. Объем $V_{\text{пир}}$ пирамиды, построенной на трех некомпланарных векторах, исходящих из одной общей точки, равен $1/6$ абсолютной величины смешанного произведения этих векторов, т.е.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\boldsymbol{abc}|.$$

5.12.2. Нахождение коэффициентов разложения вектора по базису. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ задан в базисе $\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и требуется найти коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. Пусть $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 + \gamma\boldsymbol{a}_3$. Умножение справа обеих частей этого равенства скалярно на $\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_3$ дает

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_3) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 =$$

$$= \alpha\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_3) + \beta\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_3) + \gamma\boldsymbol{a}_3(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_3) =$$

$$= \alpha(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3) + \beta(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3) + \gamma(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3) =$$

$$= \alpha(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3) = \alpha\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_3).$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}.$$

Аналогично находятся другие коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. Следовательно,

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}, \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}, \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}\right)$$

в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$.

Замечания.

1. Векторы

$$\boldsymbol{a}_1^* = \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}, \quad \boldsymbol{a}_2^* = \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}, \quad \boldsymbol{a}_3^* = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}$$

перпендикулярны соответствующим парам векторов $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1)$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, поэтому они образуют базис. Базис $\boldsymbol{\beta}^* = (\boldsymbol{a}_1^*, \boldsymbol{a}_2^*, \boldsymbol{a}_3^*)$ называется *взаимным базисом* для базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$.

Формула $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1^*)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_2^*)\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_3^*)\boldsymbol{a}_3$ называется *формулой Гиббса*. Формула Гиббса может быть задана таблицей скалярного произведения векторов базисов $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ и $\boldsymbol{\beta}^* = (\boldsymbol{a}_1^*,\boldsymbol{a}_2^*,\boldsymbol{a}_3^*)$:

$*$	$\boldsymbol{a}_1^*$	$\boldsymbol{a}_2^*$	$\boldsymbol{a}_3^*$
$\boldsymbol{a}_1$	1	0	0
$\boldsymbol{a}_2$	0	1	0
$\boldsymbol{a}_3$	0	0	1

Из формул Гиббса следует, что коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ равны $\alpha = \boldsymbol{a}\boldsymbol{i}$, $\beta = \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}$, $\gamma = \boldsymbol{a}\boldsymbol{k}$ и разложение можно представить в виде $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$. Следовательно, исходный ортонормированный базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ и взаимный базис $\boldsymbol{\beta}^*$ совпадают, т.е. $\boldsymbol{\beta}^* = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. Из других произведений векторов чаще всего рассматриваются двойные векторные произведения

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

скалярное произведение двух векторных произведений

$$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix}$$

и скалярное произведение двух смешанных произведений

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3 \end{vmatrix}.$$

Упражнения

5.1. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Ox точкам:

а) $A(2; 3)$; б) $B(-3; 2)$; в) $C(-1; 1)$.

5.2. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Oy точкам:

а) $A(-1; 2)$; б) $B(3; -1)$; в) $C(-2; 2)$.

5.3. Найти координаты точек, симметричных относительно начала координат точкам:

а) $A(3;3)$; б) $B(2;-4)$; в) $C(-2;1)$.

5.4. В полярной системе координат даны две смежные вершины $A(3;-4\pi/9)$ и $B(5;3\pi/14)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

5.5. Даны две смежные вершины квадрата $A(3;-7)$ и $B(-1;4)$. Вычислить его площадь.

5.6. На оси абсцисс найти такую точку M, расстояние которой до точки $N(2;-3)$ равнялось бы 5.

5.7. Даны вершины треугольника $A(2;-5)$, $B(1;-2)$, $C(4;7)$. Найти точку пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

5.8. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.

5.9. Даны точки $A(1;-2;-3)$, $B(2;-3;0)$, $C(3;1;-9)$, $D(-1;1;-12)$. Вычислить расстояния между:

а) A и C; б) B и D; в) C и D.

5.10. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$ и $C(-3;2;1)$ равнобедренный.

5.11. Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(3;-1;6)$, $A_2(-1;7;-2)$ и $A_3(1;-3;2)$ прямоугольный.

5.12. На оси абсцисс найти точку, расстояние от которой до точки $A(-3;4;8)$ равно 12.

5.13. Даны вершины $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-6)$, $C(-5;0;2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

5.14. Даны две вершины $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4;-1;7)$. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

5.15. Отрезок прямой, ограниченной точками $A(-1;8;3)$ и $B(9;-7;-2)$, разделен точками C, D, E, F на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

5.16. Даны вершины треугольника $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ и $C(-4;7;5)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

5.17. Вычислить модуль вектора $\boldsymbol{a} = (6;3;-2)$.

5.18. Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(-1;2;1)$. Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

5.19. Вычислить направляющие косинусы заданного вектора $\boldsymbol{a} = (12;-15;-16)$.

5.20. Даны $|\boldsymbol{a}| = 13$, $|\boldsymbol{b}| = 19$ и $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 24$. Вычислить $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

5.21. Определить, при каких значениях α, β векторы $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \beta\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ коллинеарны.

5.22. Найти орт вектора $\boldsymbol{a} = (6;-2;-3)$.

5.23. Определить модули суммы и разности векторов $\boldsymbol{a} = (3;-5;8)$ и $\boldsymbol{b} = (-1;1;-4)$.

5.24. Даны три вектора $\boldsymbol{p} = (3;-2;1)$, $\boldsymbol{q} = (-1;1;-2)$, $\boldsymbol{r} = (2;1;-3)$. Найти разложение вектора $\boldsymbol{c} = (11;-6;5)$ по базису $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$.

5.25. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (4;-2;-4)$, $\boldsymbol{b} = (6;-3;2)$. Вычислить:

а) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; б) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$; в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$;

г) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$; д) $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; е) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}$;

ж) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$; з) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

и) направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$.

5.26. Определить, при каком значении m векторы $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - m\boldsymbol{k}$ взаимно перпендикулярны.

5.27. Вычислить $(5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

5.28. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, вычислить:

а) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; б) $\boldsymbol{b}^2$; в) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$;

г) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$; д) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2$.

5.29. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

5.30. Даны три вектора $\boldsymbol{a} = (5; -6; 1)$, $\boldsymbol{b} = (-4; 3; 0)$, $\boldsymbol{c} = (5; 8; 10)$. Найти:

а) $3\boldsymbol{a}^2 - 4\boldsymbol{ab} + 2\boldsymbol{c}^2$; б) $2\boldsymbol{a}^2 + 4\boldsymbol{b}^2 - 5\boldsymbol{c}^2$;

в) $3\boldsymbol{ab} - 4\boldsymbol{bc} - 5\boldsymbol{ac}$.

5.31. Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ и $C(3; -2; 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

5.32. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{a} = (2; 3; -1)$ и $\boldsymbol{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяет условию $\boldsymbol{x}(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -6$.

5.33. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F} = (3; -2; -5)$ при перемещении материальной точки из положения $A(2; -3; 5)$ в положение $B(3; -2; -1)$.

5.34. Даны точки $A(-2; 3; -4)$, $B(3; 2; 5)$, $C(1; -1; 2)$, $D(3; 2; -4)$. Вычислить $\mathrm{pr}_{\overline{CD}}\,\overline{AD}$.

5.35. Найти косинус угла φ между диагоналями AC и BD параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$, $C(-3; 3; -3)$.

5.36. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$ и $D(4; 7; -2)$ — квадрат.

5.37. Даны $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ и $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 2\pi/3$. Вычислить:

а) $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$; б) $|[\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}]|$.

5.38. Даны $|\boldsymbol{a}| = 10$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ и $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 12$. Вычислить $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$.

5.39. Даны $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 26$ и $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 72$. Вычислить $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

5.40. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, вычислить:

а) $|[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}]|$; б) $|[3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}]|$.

5.41. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (3; -1; -2)$ и $\boldsymbol{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторных произведений:

а) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$; б) $[(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}), \boldsymbol{b}]$; в) $[(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}),(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})]$.

5.42. Вычислить синус угла, образованного векторами $\boldsymbol{a} = (2; -2; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (2; 3; 6)$.

5.43. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторов:

а) $[\overline{AB}, \overline{BC}]$; б) $[\overline{BC} - 2\overline{CA}, \overline{CB}]$.

5.44. Даны точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

5.45. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ и $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

5.46. Сила $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ приложена к точке $A(4;-2;3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3;2;-1)$.

5.47. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (8;4;1)$ и $\boldsymbol{b} = (2;-2;1)$.

5.48. Найти смешанное произведение векторов:

а) $\boldsymbol{a} = (1;-1;1)$, $\boldsymbol{b} = (1;1;1)$, $\boldsymbol{c} = (2;3;4)$;

б) $\boldsymbol{a} = (1;-3;1)$, $\boldsymbol{b} = (2;1;-3)$, $\boldsymbol{c} = (1;2;1)$;

в) $\boldsymbol{a} = (1;-1;3)$, $\boldsymbol{b} = (-2;2;1)$, $\boldsymbol{c} = (3;-2;5)$.

5.49. Установить, компланарны ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, если:

а) $\boldsymbol{a} = (2;3;-1)$, $\boldsymbol{b} = (1;-1;3)$, $\boldsymbol{c} = (1;9;-11)$;

б) $\boldsymbol{a} = (3;-2;1)$, $\boldsymbol{b} = (2;1;2)$, $\boldsymbol{c} = (3;-1;-2)$;

в) $\boldsymbol{a} = (2;-1;2)$, $\boldsymbol{b} = (1;2;-3)$, $\boldsymbol{c} = (3;-4;7)$.

5.50. Показать, что точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ и $D(5;0;-6)$ лежат в одной плоскости.

5.51. Показать, что векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ компланарны. Разложить вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

5.52. Вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30°. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 6$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, $|\boldsymbol{c}| = 3$, вычислить $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.

5.53. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$ и $D(3;2;4)$.

5.54. Даны вершины тетраэдра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

5.55. Дана пирамида с вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$ и $C(1;2;4)$. Вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

Примеры тестовых заданий

5.1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Тогда линейная комбинация $5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ этих векторов равна...

1) $5\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$; 2) $5\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$;

3) $5\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$; 4) $5\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

5.2. Длина суммы векторов $\boldsymbol{a} = (3; -5; 8)$ и $\boldsymbol{b} = (-1; 1; -4)$ равна...

1) 36; 2) 2; 3) 6; 4) 10.

5.3. Дан вектор $\boldsymbol{a} = (1; -1; 5; -3)$. Тогда норма вектора $2\boldsymbol{a}$ в евклидовом пространстве со стандартным скалярным произведением равна...

1) 4; 2) 6; 3) 60; 4) 12.

5.4. Вектор $\boldsymbol{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Вычислить его координаты, если $|\boldsymbol{a}| = 2$. Укажите не менее двух ответов.

1) $(1; -1; \sqrt{2})$; 2) $(-1; 1; \sqrt{2})$;

3) $(1; -1; -\sqrt{2})$; 4) $(-1; 1; -\sqrt{2})$.

5.5. Векторы $\overline{AB} = (2; 6; -4)$ и $\overline{AC} = (4; 2; -2)$ определяют стороны треугольника ABC. Найти длину вектора $\overline{CD}$, совпадающего с медианой, проведенной из вершины C.

1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) 10; 4) 5.

5.6. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны. Их длины: $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 1$. Тогда скалярный квадрат $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$ равен...

1) 9; 2) 5; 3) 7; 4) 0.

5.7. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (4; -2; -4)$, $\boldsymbol{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

1) 2; 2) 22; 3) 24; 4) -22.

5.8. Векторы $\boldsymbol{a}(-2; \alpha; -1)$, $\boldsymbol{b}(4; 2; 3)$, $\boldsymbol{c}(2; -1; 2)$ компланарны, если параметр α равен...

1) -2; 2) 6; 3) -3; 4) 3.

5.9. На векторах $(2\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n})$ и $(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n})$ как на сторонах построен параллелограмм. Тогда площадь S параллелограмма равна...

1) $S = |\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}|$; 2) $S = 5\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$;

3) $S = 5|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}|$; 4) $S = |2\boldsymbol{m}^2 + 5\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}^2|$.

5.10. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 4$. Вычислить $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

1) 7; 2) -12; 3) 12; 4) 6.

5.11. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (0; -1; 1)$, $\boldsymbol{b} = (1; 1; 1)$.

1) 1; 2) 6; 3) 0; 4) 2.

5.12. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов и взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{c}| =$ $= 3$, вычислить $\boldsymbol{abc}$.

1) 24; 2) 18; 3) 96; 4) 48.

5.13. Вычислить объем треугольной призмы, построенной на векторах $\boldsymbol{a} = (7; 6; 1)$, $\boldsymbol{b} = (4; 0; 3)$, $\boldsymbol{c} = (3; 6; 4)$.

1) -72; 2) 72; 3) 62; 4) 82.

5.14. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{c}$, можно вычислить как...

1) $V = 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$; 2) $V = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$;

3) $V = 6|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$; 4) $V = 3|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$.

Глава 6
Прямая на плоскости

6.1. Уравнения прямой на плоскости

Пусть l — некоторая прямая на плоскости.

Всякий ненулевой вектор $\boldsymbol{p}$, параллельный данной прямой l, называется ее *направляющим вектором*.

Всякий ненулевой вектор $\boldsymbol{n}$, перпендикулярный данной прямой l, называется *вектором нормали* (*нормальным вектором*) прямой l.

Прямая l имеет бесчисленное множество направляющих векторов и нормальных векторов. Любые два направляющих вектора прямой l коллинеарны. Любые два нормальных вектора прямой l также коллинеарны.

На плоскости прямую l можно задать различными способами:

1) некоторой ее точкой (начальной точкой) M_0 и направляющим вектором $\boldsymbol{p}$;

2) начальной точкой M_0 и вектором нормали $\boldsymbol{n}$;

3) двумя ее различными точками M_1 и M_2.

В связи с этим рассматривают различные виды ее уравнений.

6.1.1. Векторно-параметрическое уравнение прямой. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат и в этой системе известны координаты начальной точки $M_0(x_0, y_0)$ и направляющего вектора $\boldsymbol{p}(p_1, p_2)$ прямой l (рис. 6.1).

Выберем на этой прямой произвольную точку $M(x,y)$. Тогда векторы $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{p}$ коллинеарны. Следовательно, для некоторого действительного числа t выполняется равенство

$$\overline{M_0M} = t\boldsymbol{p}, \tag{6.1}$$

где t — параметр, $t \in \mathbb{R}$. Обозначив через $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}$ радиус-векторы точек M_0 и M соответственно, получим

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{p} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{p}. \tag{6.2}$$

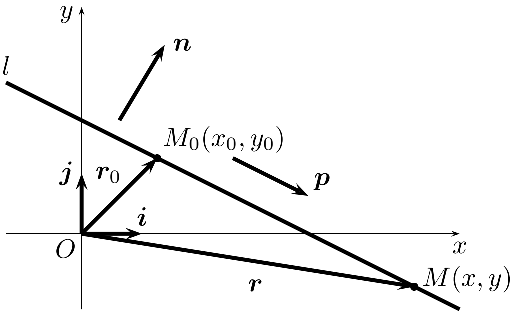


Рис. 6.1

Уравнения (6.1) и (6.2) называются *векторно-параметрическими уравнениями прямой.*

6.1.2. Параметрическое уравнение прямой. Так как вектор $\overline{M_0M}$ имеет координаты $(x - x_0, y - y_0)$, а направляющий вектор $\boldsymbol{p}(p_1, p_2)$, то из уравнения (6.1) следует, что

$$\begin{cases} x - x_0 = tp_1, \\ y - y_0 = tp_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + tp_1, \\ y = y_0 + tp_2. \end{cases} \tag{6.3}$$

Уравнения (6.3) называются *параметрическими уравнениями прямой.*

Параметр t в уравнениях (6.1), (6.2) и (6.3) имеет следующий геометрический смысл: величина t пропорциональна расстоянию от начальной точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x_0 + p_1 t, y_0 + p_2 t)$.

Физический смысл параметра t в уравнениях (6.3) — это время, затраченное на перемещение от точки M_0 до точки $M(x, y)$ при прямолинейном и равномерном движении со скоростью $v(p_1, p_2)$. При $t = 0$ точка $M(x, y)$ совпадает с начальной точкой M_0, при возрастании t движение происходит в направлении, определяемом направляющим вектором $\boldsymbol{p}$.

6.1.3. Канонические уравнения прямой. Из уравнений (6.3) следует, что

$$t = \frac{x - x_0}{p_1} \quad \text{и} \quad t = \frac{y - y_0}{p_2},$$

значит,

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}, \tag{6.4}$$

где $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$ (p_1 и p_2 одновременно не равны нулю), так как $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$. Уравнение (6.4) называется *каноническим уравнением прямой*.

Если один из знаменателей дробей в уравнении (6.4) равен нулю, то считается, что соответствующий числитель дроби равен нулю:

1) каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

— это уравнение $x = x_0$ прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $(x_0{,}0)$ (рис. 6.2). При $x_0 = 0$ из предыдущего уравнения получаем уравнение координатной оси Oy: $x = 0$;

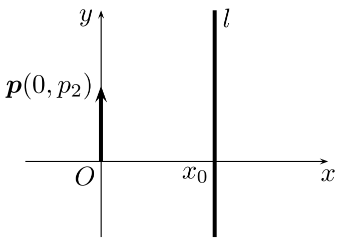


Рис. 6.2

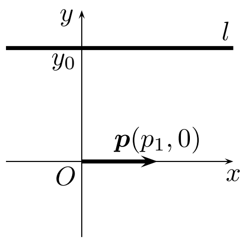


Рис. 6.3

2) каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{0}$$

— это уравнение $y = y_0$ прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $(0{,}y_0)$ (рис. 6.3). При $y_0 = 0$ из предыдущего уравнения получаем уравнение координатной оси Ox: $y = 0$.

Из уравнения (6.4) следует, что

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (6.4')$$

которое можно записать в виде

$$p_2(x - x_0) - p_1(y - y_0) = 0. \qquad (6.4'')$$

Уравнения $(6.4')$ и $(6.4'')$ также называются каноническими уравнениями прямой.

6.1.4. Уравнение прямой, заданной двумя точками. Пусть прямая l проходит через две различные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Возьмем в качестве начальной точки M_1, тогда вектор $\overline{M_1M_2}$ является направляющим вектором прямой l. Поэтому уравнение (6.4) примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{6.5}$$

где, по крайней мере, $x_2-x_1\neq 0$ или $y_2-y_1\neq 0$. Из уравнения (6.5) следует

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0. \tag{6.5$'$}$$

Уравнения (6.5) и (6.5$'$) называются *уравнениями прямой, проходящей через две точки*.

Пусть три точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ принадлежат прямой l, тогда говорят, что эти точки коллинеарны:

$$M_1,M_2,M_3\in l \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0$$

$$\left(\text{или} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0\right)$$

— *критерий коллинеарности трех точек.*

6.1.5. Уравнение прямой в отрезках. Пусть прямая l пересекает ось Ox в точке $M_1(a,0)$, а ось Oy — в точке $M_2(0,b)$; предположим, что эти две точки не совпадают с началом системы координат, т.е. что $a\neq 0$ и $b\neq 0$ (рис. 6.4).

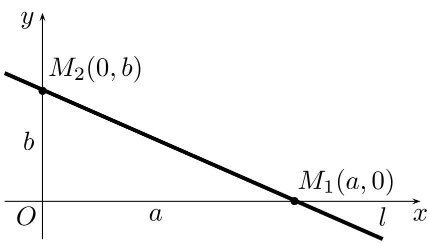


Рис. 6.4

Записывая уравнение прямой l в виде (6.5) по двум ее точкам M_1 и M_2, получим

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

откуда

$$-\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b} \quad \text{или} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{6.6}$$

Уравнение (6.6) называется *уравнением прямой в отрезках*. Говорят, что прямая, проходящая через точки $M_1(a,0)$ и $M_2(0,b)$, отсекает на координатных осях отрезки: a на оси абсцисс и b на оси ординат. Длины отрезков OM_1 и OM_2 равны $|a|$ и $|b|$ соответственно.

Прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнениями в отрезках.

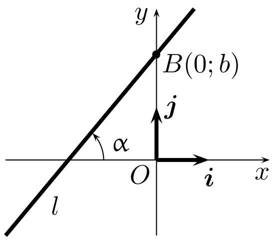


Рис. 6.5

6.1.6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть прямая l не параллельна оси Oy: $l \nparallel Oy$ (рис. 6.5).

Пусть $\boldsymbol{p}(p_1,p_2) \parallel l$. *Угловым коэффициентом прямой* l называется число, равное отношению второй координаты направляющего вектора $\boldsymbol{p}$ к первой:

$$k=\frac{p_2}{p_1}, \quad p_1 \neq 0. \tag{6.7}$$

Угол α, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox до прямой l, называется *углом наклона прямой l к оси абсцисс* (рис. 6.5), $0 \leqslant \alpha < \pi$.

Угловой коэффициент k прямой l равен тангенсу угла наклона α этой прямой к оси Ox: $k=\operatorname{tg}\alpha$ (в этом состоит геометрический смысл k).

Пусть $M_0(x_0,y_0) \in l$, k — угловой коэффициент прямой l. В качестве направляющего вектора прямой l возьмем вектор $\boldsymbol{p}_1=(1,k)$. Тогда, используя уравнение (6.4), имеем

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{k},$$

откуда

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{6.8}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ взять точку $B(0, b)$ пересечения прямой l с осью ординат Oy, то уравнение (6.8) примет вид

$$y = kx + b. \tag{6.8$'$}$$

Число b называется *начальной ординатой*, это ордината точки B.

При $b = 0$ имеем

$$y = kx. \tag{6.8$''$}$$

Это уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, проходящей через начало координат.

Если $l \parallel Ox$ или $l \equiv Ox$, то $k = 0$. Если $l \parallel Oy$, то говорят, что l не имеет углового коэффициента.

6.1.7. Общее уравнение прямой. Запишем уравнение (6.4$''$) в виде

$$p_2x - p_1y + (-p_2x_0 + p_1y_0) = 0.$$

Это уравнение является уравнением первой степени. Пусть $A = p_2$, $B = -p_1$, $C = -p_2x_0 + p_1y_0$, тогда имеем

$$Ax + By + C = 0. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) называется *общим уравнением прямой* l. Направляющий вектор $\boldsymbol{p}$ этой прямой имеет координаты $(-B{,}A)$ (в этом состоит геометрический смысл коэффициентов A и B).

Из формулы (6.7) имеем $k = -A/B$.

Теорема 6.1. *Каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени относительно переменных x и y. Верно и обратное: любое уравнение первой степени относительно переменных x и y, т.е. уравнение вида $Ax + By + C = 0$ (при условии $A^2 + B^2 \neq 0$) есть уравнение некоторой прямой.*

Расположение прямой относительно прямоугольной системы координат:

1) l проходит через начало координат $\Leftrightarrow C = 0$;
2) l параллельна оси $Ox \Leftrightarrow A = 0$;
3) l параллельна оси $Oy \Leftrightarrow B = 0$;
4) l совпадает с осью $Ox \Leftrightarrow A = C = 0$;
5) l совпадает с осью $Oy \Leftrightarrow B = C = 0$.

6.1.8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Пусть прямая l задана начальной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и вектором нормали $\boldsymbol{n}(n_1,n_2)$. В этом случае векторы $\boldsymbol{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, следовательно, $\boldsymbol{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, или в координатах

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0. \tag{6.10}$$

Уравнение (6.10) называется *уравнением прямой, заданной начальной точкой и нормальным вектором*.

Из уравнения (6.10) имеем

$$n_1x + n_2y + (-n_1x_0 - n_2y_0) = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (6.9), получаем, что вектор нормали $\boldsymbol{n}$ прямой l, заданной общим уравнением, имеет координаты (A,B).

6.2. Взаимное расположение прямых на плоскости

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений прямых l_1 и l_2 соответственно:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

Очевидно, что вопрос о существовании и количестве действительных решений системы (6.11) равносилен вопросу о существовании и количестве общих точек у прямых l_1 и l_2.

Пусть направляющим вектором прямой l_1 является $\boldsymbol{p}(-B_1, A_1)$, а прямой l_2 — $\boldsymbol{q}(-B_2, A_2)$. Для векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ возможны следующие случаи.

1. Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ не коллинеарны ($\boldsymbol{p} \nparallel \boldsymbol{q}$), тогда

$$\frac{-B_1}{-B_2} \neq \frac{A_1}{A_2} \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

В этом случае прямые l_1 и l_2 пересекаются, т.е. имеют единственную общую точку $M_0(x_0, y_0) = l_1 \cap l_2$. При этом система (6.11) имеет единственное решение (x_0, y_0) (верно и обратное).

2. Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны ($\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$). При этом прямые l_1 и l_2 либо параллельны ($l_1 \parallel l_2$), либо совпадают ($l_1 \equiv l_2$).

А именно, так как $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$, то справедлива пропорция

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Если, кроме того, $A_1/A_2 \neq C_1/C_2$, то система (6.11) несовместна, так как по крайней мере одно из уравнений системы противоречиво, а значит, прямые l_1 и l_2 не имеют общих точек. Следовательно, прямые l_1 и l_2 различны и параллельны (верно и обратное). Если же имеем пропорцию

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то в этом случае оба уравнения системы (6.11) являются равносильными, следовательно, прямые l_1 и l_2 совпадают. В этом случае у прямых l_1 и l_2 существует бесчисленное множество точек пересечения (верно и обратное).

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему о взаимном расположении прямых l_1 и l_2, заданных общими уравнениями (6.11).

Теорема 6.2. *1) Прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y в уравнениях (6.11) не пропорциональны:*

$$l_1 \cap l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2};$$

2) прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y в (6.11) пропорциональны, но свободные члены им не пропорциональны:

$$l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

3) прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда все коэффициенты в (6.11) пропорциональны:

$$l_1 \equiv l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

6.3. Угол между двумя прямыми на плоскости

Рассмотрим на плоскости две прямые l_1 и l_2, пересекающиеся в точке A (рис. 6.6).

Лучи этих прямых, исходящие из точки A, образуют четыре угла $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, причем $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$, т.к. пары углов $\angle 1$, $\angle 3$ и $\angle 2$, $\angle 4$ — вертикальные.

Углом между двумя прямыми называется величина того из углов, который не больше других углов. Отсюда следует, что угол между пересекающимися прямыми не больше $\pi/2$.

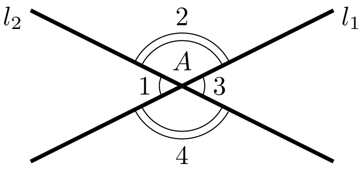


Рис. 6.6

Пусть направляющим вектором прямой l_1 является вектор $\boldsymbol{p}(-B_1, A_1)$, а направляющим вектором прямой l_2 является вектор $\boldsymbol{q}(-B_2, A_2)$; тогда задача об определении угла между прямыми l_1 и l_2 сводится к определению угла φ между направляющими векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Используя выражение скалярного произведения векторов, имеем

$$\cos(\widehat{l_1,l_2}) = \cos\varphi = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{q}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (6.12)$$

Таким образом, угол между прямыми l_1 и l_2 определяется с помощью формулы (6.12). Если $\cos\varphi > 0$, то угол φ — острый и φ является углом между l_1 и l_2; если же $\cos\varphi < 0$, то $(\widehat{l_1,l_2}) = \varphi_1 = \pi - \varphi$.

Из формулы (6.12) следует, что

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \ \ (\text{или } \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{q})$$

(*критерий перпендикулярности прямых*).

Пусть теперь две прямые l_1 и l_2 (не параллельные оси Oy) заданы уравнениями с угловым коэффициентом (рис. 6.7):

$$l_1:\ y = k_1x + b_1, \text{ где } k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1,\ \alpha_1 \neq \frac{\pi}{2}, \qquad (6.13)$$

$$l_2:\ y = k_2x + b_2, \text{ где } k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2,\ \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}. \qquad (6.14)$$

Направленным углом между прямыми l_1 и l_2 называется угол θ, на который надо повернуть первую прямую l_1 вокруг точки пересечения A против часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой l_2 $(0 \leqslant \theta < \pi)$. Если

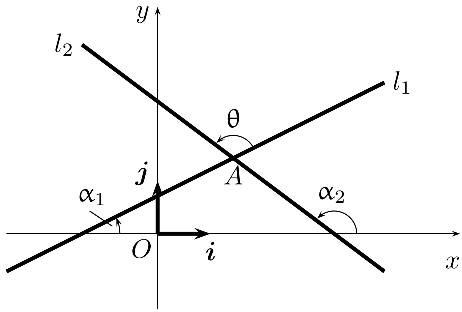


Рис. 6.7

выполняется $\theta \neq \pi/2$, то

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{6.15}$$

Формула (6.15) дает выражение тангенса направленного угла между двумя прямыми l_1 и l_2 через угловые коэффициенты этих прямых.

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, заданными уравнениями (6.13) и (6.14), не учитывая, какая прямая является первой, а какая — второй, то правая часть формулы (6.15) берется по модулю, т.е.

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \tag{6.15$'$}$$

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$, и, следовательно, из формулы (6.15$'$) $k_2 - k_1 = 0$. И обратно, если прямые l_1 и l_2 таковы, что $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т.е. прямые параллельны. Следовательно,

$$l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2$$

(*критерий параллельности прямых*).

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то угол $\theta = \pi/2$. Тогда $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$, откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}$$

или $k_2 = -1/k_1$ (справедливо и обратное утверждение). Таким образом,

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad \text{или} \quad k_1 \cdot k_2 = -1$$

(*критерий перпендикулярности прямых*).

Применим формулу (6.15) для нахождения направленного угла между пересекающимися прямыми l_1 и l_2, заданными общими уравнениями (6.11). Имеем $k_1 = -A_1/B_1$ и $k_2 = -A_2/B_2$. Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\dfrac{A_2}{B_2} + \dfrac{A_1}{B_1}}{1 + \dfrac{A_1 A_2}{B_1 B_2}} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

6.4. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую. Пусть M^* — точка, не принадлежащая прямой l. Обозначим расстояние от точки M^* до прямой l через $\rho(M^*, l)$.

Вычислим $\rho(M^*,l)$, если точка M^* имеет координаты (x^*,y^*) и прямая l задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0, \quad (M^* M_1) \perp l,$$

где $M_1(x_1,y_1)$ — проекция точки M^* на прямую l (рис. 6.8). Вектор $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали прямой l (т.е. $\boldsymbol{n} \perp l$), следовательно, $\boldsymbol{n}$ имеет координаты (A,B). Обозначим через $\boldsymbol{n}_0$ орт вектора $\boldsymbol{n}(A,B)$. Очевидно, что

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right).$$

Найдем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{n}_0$ и $\overline{M_1 M^*}$:

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \overline{M_1 M^*} = |\boldsymbol{n}_0| \cdot |\overline{M_1 M^*}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{n}_0, \overline{M_1 M^*}}).$$

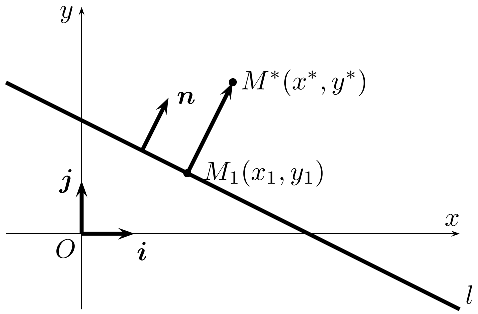


Рис. 6.8

Теперь найдем модуль от обеих частей предыдущего равенства:

$$|\boldsymbol{n}_0 \cdot \overline{M_1M^*}| = |\boldsymbol{n}_0| \cdot |\overline{M_1M^*}| \cdot |\pm 1| = |\overline{M_1M^*}| = \rho(M^*,l).$$

Поскольку здесь вектор $\overline{M_1M^*}$ имеет координаты $(x^* - x_1, y^* - y_1)$ и

$$\boldsymbol{n}_0 \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right),$$

то имеем

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \overline{M_1M^*} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}(x^* - x_1) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}(y^* - y_1) =$$

$$= \frac{Ax^* + By^* - (Ax_1 + By_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как $M_1 \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т.е. $Ax_1 + By_1 = -C$. Следовательно, окончательно получим

$$\rho(M^*,l) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (6.16)$$

По формуле (6.16) вычисляется расстояние от точки $M^*(x^*,y^*)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$.

6.5. Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между параллельными прямыми l_1 и l_2 называется длина их общего перпендикуляра. Используя формулу (6.16), вычислим расстояние $\rho(l_1,l_2)$ между параллельными прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями

$$l_1: \ Ax + By + C_1 = 0, \tag{6.17}$$

$$l_2: \ Ax + By + C_2 = 0, \tag{6.18}$$

где $C_1 \neq C_2$. Отметим, что прямые l_1 и l_2 действительно параллельны, так как они перпендикулярны одному и тому же вектору $\boldsymbol{n}(A,B)$, но не совпадают ($C_1 \neq C_2$).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ — произвольная точка прямой l_1. Тогда, очевидно, $\rho(\lambda_1,\lambda_2) = \rho(M_0, l_2)$, поэтому по формуле (6.16) имеем

$$\rho(l_1,l_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как $M_0 \in l_1$, то $Ax_0 + By_0 + C_1 = 0$. Таким образом, предыдущая формула принимает вид

$$\rho(l_1,l_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B_2}}. \tag{6.19}$$

По формуле (6.19) вычисляется расстояние между двумя параллельными прямыми, заданными уравнениями (6.17) и (6.18).

6.6. Уравнения биссектрис углов между прямыми

Уравнения биссектрис углов между пересекающимися прямыми, заданными уравнениями (6.17) и (6.18), имеют вид

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{6.20}$$

Упражнения

6.1. Напишите уравнение прямой: а) проходящей через точку $M(2;5)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$; б) имеющей угловой коэффициент $k = -2$ и проходящей через начало координат; в) образующей с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} 3$, и проходящей через точку $B\,(-2;2/5)$; г) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $30°$; д) отсекающей на оси Oy отрезок $b =$ $= 3$ и образующей с осью Ox угол $60°$; е) параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок $b = -1$.

6.2. Найдите углы, образуемые с осью Ox следующими прямыми:

а) $2x - 2y + 5 = 0$; б) $7x + 10 = 0$;

в) $15x + 5y - 14 = 0$.

6.3. Напишите уравнения следующих прямых: а) прямая проходит через точки $A(1; -1)$ и $B(3; 2)$; б) прямая отсекает на осях координат отрезки $a = 4$, $b = -2$; в) прямая проходит через точку $A(5; -3)$ параллельно вектору $\boldsymbol{p}(-1; 2)$; г) прямая проходит через точку $A(-7; 2)$ и перпендикулярна вектору $\boldsymbol{n}(3; -4)$; д) прямая проходит через точку $A(3; 5)$ и параллельна оси Ox; е) прямая проходит через точку $B(-1; 2)$ и параллельна оси Oy; ж) прямая проходит через точку $A(1; -5)$ и параллельна прямой $x - 3y + 1 = 0$.

6.4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 4)$ и параллельной прямой:

а) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$; в) $x = 2$;

г) $y = -1$; д) $x = 3 + t$, $y = 4 - 7t$.

6.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 4)$ и перпендикулярной прямой:

а) $x - 2y + 5 = 0$; б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$; в) $x = 2$;

г) $y = -1$; д) $x = 3 + t$, $y = 4 - 7t$.

6.6. Дана прямая $2x - 3y - 18 = 0$. Написать для нее: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) параметрические уравнения; в) каноническое уравнение; г) уравнение в отрезках.

6.7. Написать параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку $A(1; -2)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{s}(-3; 5)$;

б) $3y - 2 = 0$; в) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$.

6.8. Принадлежат ли одной прямой три данные точки:

а) $(1; 3)$, $(5; 7)$ и $(10; 12)$;

б) $(3; -8)$, $(1; -2)$ и $(10; 12)$.

6.9. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $4x + 3y - 36 = 0$.

6.10. Луч света направлен по прямой $x = 3 + t$, $y = 2 - t$. Дойдя до оси абсцисс, он от нее отразился. Найдите точку встречи луча с осью Ox и параметрические уравнения отраженного луча.

6.11. Напишите уравнения медиан треугольника ABC: $A(1;1)$, $B(2;0)$, $C(-1;4)$ и найдите координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

6.12. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма: $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$ и точка $M(3;-1)$ пересечения диагоналей. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

6.13. Даны уравнения средних линий треугольника $2x - y + 1 = 0$, $x + 3y = 0$ и $-x + y + 2 = 0$. Найдите уравнения сторон этого треугольника.

6.14. Написать уравнение прямой, симметричной данной прямой $2x - y + 1 = 0$ относительно начала координат.

6.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ так, что отрезок этой прямой, заключенной между прямыми $3x + y + 2 = 0$ и $4x + y - 1 = 0$, в точке A делится пополам.

6.16. Составить уравнения сторон BC и AC треугольника ABC по координатам его вершин $A(2;1)$, $B(-3;0)$ и точки $M(0;1)$ пересечения медиан.

6.17. Даны уравнения $x + 2y - 3 = 0$, $x + y - 2 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x + 6y - 15 = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.

6.18. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую.

6.19. Даны вершины треугольника $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(3;2)$. Составить уравнения высот треугольника.

6.20. Найдите: а) проекцию точки $M(3;4)$ на прямую $x + 3y - 6 = 0$; б) точку, симметричную точке $N(2;-4)$ относительно прямой $x + y - 5 = 0$.

6.21. Даны вершины треугольника $A(4;6)$, $B(-4;0)$ и $C(-1;-4)$. Составить уравнения: а) медианы, проведенной из вершины C; б) биссектрисы внутреннего угла B; в) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

6.22. Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB: $A(2;1)$ и $B(-1;3)$.

6.23. Найдите угол между прямыми $3x - y + 6 = 0$ и $x - y + 4 = 0$.

6.24. Даны три вершины параллелограмма $A(3;-5)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$. Напишите уравнения сторон параллелограмма $ABCD$ и его диагоналей.

6.25. Составить уравнение прямой: а) проходящей через точку $(3;1)$ и образующей угол 45° с прямой $3x = y + 2$; б) проходящей через точку $(-1;5)$ и образующей с прямой $3x + 5y + 1 = 0$ угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = 3/5$.

6.26. Точка $A(8;8)$ является вершиной квадрата, известно уравнение одной его диагонали $x + 2y - 9 = 0$. Написать уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

6.27. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $x - y - 3 = 0$, $x - 7y + 3 = 0$ и точка $(1;2)$ на его основании. Написать уравнение основания.

6.28. Даны уравнения сторон треугольника $4x - y + 5 = 0$ (AB), $2x + 3y - 1 = 0$ (BC), $x + y - 3 = 0$ (AC). Найти тангенсы внутренних углов треугольника.

6.29. Составить уравнение катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 3x + 5$ и вершину прямого угла $(4;-1)$.

6.30. Найти расстояние от точки A до прямой l:

а) $A(2;4)$, l: $3x + 4y + 3 = 0$;

б) $A(1;0)$, l: $3x - y + 7 = 0$.

6.31. Найти расстояние между параллельными прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $12x + 5y - 26 = 0$ и $12x + 5y - 52 = 0$;

б) $2x + 3y - 7 = 0$ и $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{6}$;

в) $x = 1 - 2t$, $y = 7 + t$ и $x = 5 + 8t$, $y = -2 - 4t$.

6.32. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. Найдите площадь квадрата.

6.33. На прямой $5x - y - 4 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(1;0)$ и $B(-2;1)$.

6.34. Составить уравнения сторон квадрата, если даны одна из его вершин $A(2;-4)$ и точка пересечения диагоналей $M(5;2)$.

6.35. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $3x + 4y - 5 = 0$ и $5x - 12y + 3 = 0$.

Примеры тестовых заданий

6.1. Даны точки $A(3;-1)$ и $B(2;1)$. Тогда координаты точки $C(x, y)$, симметричной точке A относительно точки B, равны...

1) $(2{,}5;0)$; 2) $(4;-3)$; 3) $(-1;2)$; 4) $(1;3)$.

6.2. Даны координаты вершин треугольника $A(0;-1)$, $B(-5;3)$ и $C(-3;1)$. Тогда длина медианы AM, опущенной из вершины A, равна...

1) $\sqrt{17}$; 2) 9; 3) $\sqrt{89}$; 4) 5.

6.3. Даны точки $A(-9;-5)$, $B(0;-2)$. Тогда координата y точки $C(3;y)$, делящей направленный отрезок AB в отношении $2:1$, равна...

1) $-1/3$; 2) $-7/3$; 3) -3; 4) 4.

6.4. Точка $A(-3;-\sqrt{3})$ задана в прямоугольной системе координат. Тогда ее полярные координаты ($0 \leqslant r$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$) равны...

1) $r = 2\sqrt{3}$, $\varphi = -5\pi/6$; 2) $r = 2\sqrt{3}$, $\varphi = \pi/6$;

3) $r = \sqrt{5}$, $\varphi = 4\pi/3$; 4) $r = \pi/6$, $\varphi = 2\sqrt{3}$.

6.5. Точка $A(2;5\pi/6)$ задана в полярной системе координат. Тогда в прямоугольной системе координат координаты точки имеют вид...

1) $(\sqrt{3};-1)$; 2) $(2;150)$; 3) $(1;-\sqrt{3})$; 4) $(-\sqrt{3};1)$.

6.6. Точка $M(-1;-\sqrt{3})$ задана в прямоугольной системе координат. Тогда ее полярные координаты (r, φ) ($r \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$), при условии, что полюс совпадает с началом координат прямоугольной системы, а полярная ось — с положительной полуосью абсцисс и обе системы координат правые, равны...

1) $r = 2$, $\varphi = -2\pi/3$; 2) $r = 2$, $\varphi = \pi/3$;

3) $r = 2$, $\varphi = -5\pi/6$; 4) $r = -2\pi/3$, $\varphi = 2$.

6.7. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(-4; -1)$ и перпендикулярной прямой l_1: $2x - y + 3 = 0$, имеет вид...

1) $2x - y + 7 = 0$; 2) $-4x - y + 3 = 0$;

3) $x + 2y - 2 = 0$; 4) $x + 2y + 6 = 0$.

6.8. Общее уравнение прямой, проходящей через данные точки $A(-2; 3)$ и $B(3; -3)$, имеет вид...

1) $6x + 5y - 27 = 0$; 2) $6x + 5y - 3 = 0$;

3) $-5x + 6y = 0$; 4) $-5x - y - 7 = 4$.

6.9. Острый угол между прямыми l_1: $2x - y + 4 = 0$ и l_2: $-3x - y + 3 = 0$ равен...

1) $\pi/4$; 2) $-2\pi/3$; 3) $3\pi/4$; 4) $-\pi/4$.

6.10. Уравнение прямой $2x + 5y - 10 = 0$ «в отрезках» имеет вид...

1) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{-5} = 1$; 2) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 1$;

3) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{2} = 1$; 4) $\dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{-2} = 1$.

Глава 7
Кривые второго порядка на плоскости

7.1. Основные понятия

Рассмотрим кривые, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \qquad (7.1)$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел a_{11}, a_{12} или a_{22} отлично от нуля. Такие кривые называются *кривыми* (*линиями*) *второго порядка*.

С помощью преобразований поворота осей координат и параллельного переноса начала координат общее уравнение кривой второго порядка (7.1) приводится к каноническому виду. Перечислим канонические виды кривых второго порядка:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс (рис. 7.1);

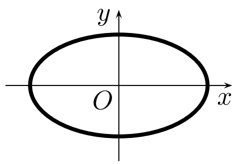


Рис. 7.1

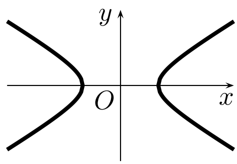


Рис. 7.2

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гипербола (рис. 7.2);

4) $y^2 = 2px$ — парабола (рис. 7.3);

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся прямых (рис. 7.4);

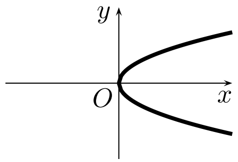


Рис. 7.3

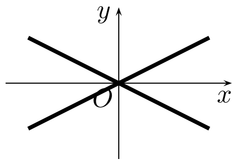


Рис. 7.4

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся прямых;

7) $y^2 - a^2 = 0$ — пара параллельных прямых (рис. 7.5);

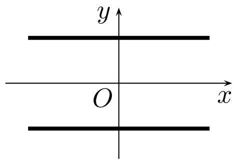


Рис. 7.5

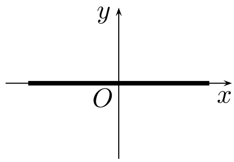


Рис. 7.6

8) $y^2 + a^2 = 0$ — пара мнимых параллельных прямых;
9) $y^2 = 0$ — пара совпавших прямых (рис. 7.6).

7.2. Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. *Окружностью* радиуса R с центром в точке M_0 называется множество точек M плоскости, удовлетворяющих условию $|\overline{M_0M}| = R$.

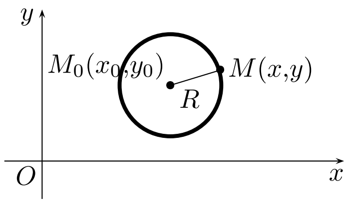


Рис. 7.7

Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты (x_0, y_0), а $M(x, y)$ — произвольная точка окружности (рис. 7.7). Тогда из условия $|\overline{M_0M}| = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

или

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{7.2}$$

Уравнению (7.2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на окружности.

Уравнение (7.2) называется *каноническим уравнением окружности*. В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

7.3. Эллипс

7.3.1. Каноническое уравнение эллипса. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, бо́льшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов — через $2a$ (рис. 7.8). По определению $2a > 2c$, т.е. $a > c$.

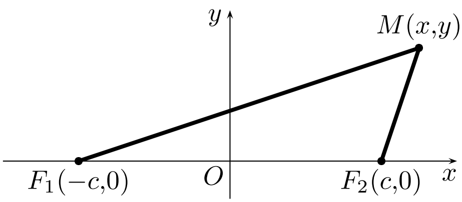


Рис. 7.8

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса, $|\overline{MF_1}| + |\overline{MF_2}| = 2a$, т.е.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \tag{7.3}$$

Это и есть *уравнение эллипса*.

Преобразуем уравнение (7.3) к более простому виду следующим образом:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=$$

$$=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Положим

$$a^2-c^2=b^2. \tag{7.4}$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7.5}$$

Можно доказать, что уравнение (7.5) равносильно исходному уравнению. Оно называется *каноническим уравнением эллипса.*

Эллипс — кривая второго порядка.

7.3.2. Исследование формы эллипса по его уравнению. Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

Уравнение (7.5) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка (x,y) принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$. Отсюда следует, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0,0)$, которую называют *центром эллипса.*

Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y=0$, находим две точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс (рис. 7.9). Положив в уравнении (7.5) $x=0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса.* Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно *большой* и *малой осями эллипса.* Числа a и b называются соответственно *большой* и *малой полуосями эллипса.*

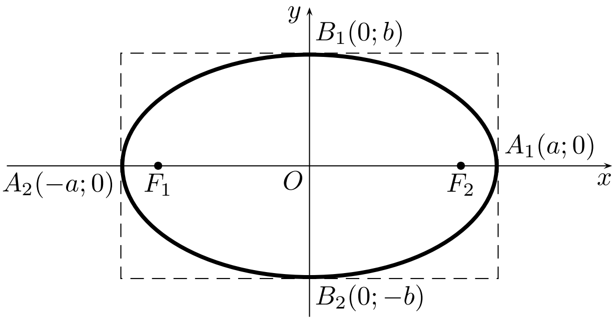


Рис. 7.9

Из уравнения (7.5) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т.е. имеют место неравенства $x^2/a^2 \leqslant 1$ и $y^2/b^2 \leqslant 1$ или $-a \leqslant x \leqslant a$ и $-b \leqslant y \leqslant b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

В уравнении (7.5) сумма неотрицательных слагаемых x^2/a^2 и y^2/b^2 равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т.е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается, и наоборот.

Отсюда следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 7.9 (овальная замкнутая кривая).

7.4. Гипербола

7.4.1. Каноническое уравнение гиперболы. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению $2a < 2c$, т.е. $a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2

(рис. 7.10). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

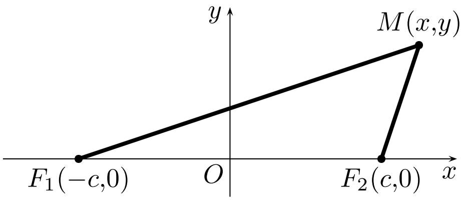


Рис. 7.10

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда согласно определению гиперболы

$$||\overline{MF_1}| - |\overline{MF_2}|| = 2a \quad \text{или} \quad |\overline{MF_1}| - |\overline{MF_2}| = \pm 2a,$$

т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После упрощений получим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.6}$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{7.7}$$

Гипербола есть кривая второго порядка.

7.4.2. Исследование формы гиперболы по ее уравнению. Установим форму гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением.

Уравнение (7.6) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют *центром гиперболы*.

Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y = 0$ в уравнении (7.6), находим две точки пересечения гиперболы с осью Ox: $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$. Положив $x = 0$ в (7.6), получаем $y^2 = -b^2$, чего быть не может. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

Точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ называются *вершинами гиперболы*, а отрезок A_1A_2 — *действительной осью*, отрезок $OA_1 = OA_2$ — *действительной полуосью* гиперболы. Отрезок B_1B_2 ($B_1B_2 = 2b$), соединяющий точки $B_1(0,b)$ и

$B_2(0,-b)$, называется *мнимой осью*, число b — *мнимой полуосью*. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется *основным прямоугольником гиперболы*.

Из уравнения (7.6) следует, что уменьшаемое x^2/a^2 не меньше единицы, т.е. что $x^2/a^2 \geqslant 1$ или $|x| \geqslant a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (*правая ветвь гиперболы*) и слева от прямой $x = -a$ (*левая ветвь гиперболы*).

Из уравнения (7.6) гиперболы видно, что когда $|x|$ возрастает, то и $|y|$ возрастает. Это следует из того, что разность $x^2/a^2 - y^2/b^2$ сохраняет постоянное значение, равное единице.

Из сказанного следует, что гипербола имеет форму, изображенную на рис. 7.11 (кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей).

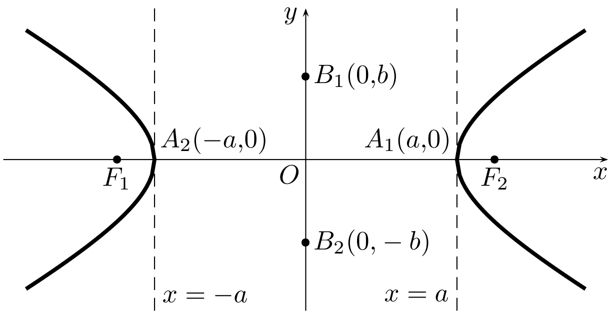


Рис. 7.11

7.4.3. Асимптоты гиперболы. Прямая L называется *асимптотой* неограниченной кривой K, если расстояние d от точки M кривой K до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой K от начала координат. На рис. 7.12 приведена иллюстрация понятия асимптоты: прямая L является асимптотой для кривой K.

Покажем, что гипербола (7.6) имеет две асимптоты

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x. \tag{7.8}$$

Так как прямые (7.8) и гипербола (7.6) симметричны относительно координатных осей, то достаточно рассмотреть

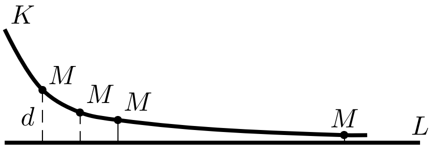


Рис. 7.12

только те точки указанных линий, которые расположены в первой четверти.

Возьмем на прямой $y = (b/a)x$ точку N, имеющей ту же абсциссу x, что и точка $M(x, y)$ на гиперболе $y = (b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$ (рис. 7.13), и найдем разность $y_N - y_M$ между ординатами прямой и ветви гиперболы:

$$y_N - y_M = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}\,) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2}\,)(x + \sqrt{x^2 - a^2}\,)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

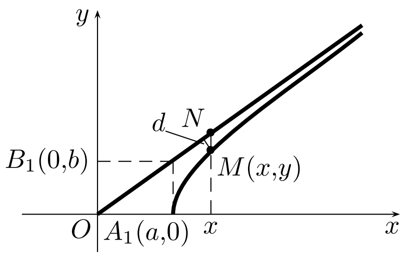


Рис. 7.13

Как видно, по мере возрастания x знаменатель дроби увеличивается; числитель — есть величина постоянная. Стало быть, длина отрезка MN стремится к нулю. Так как $y_N - y_M$ больше расстояния d от точки M до прямой, то d и подавно стремится к нулю. Таким образом, прямые $y = \pm(b/a)x$ являются асимптотами гиперболы (7.6).

При построении гиперболы (7.6) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы (рис. 7.14), провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, — асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.

7.4.4. Уравнение равносторонней гиперболы. Гипербола (7.6) называется *равносторонней*, если ее полу-

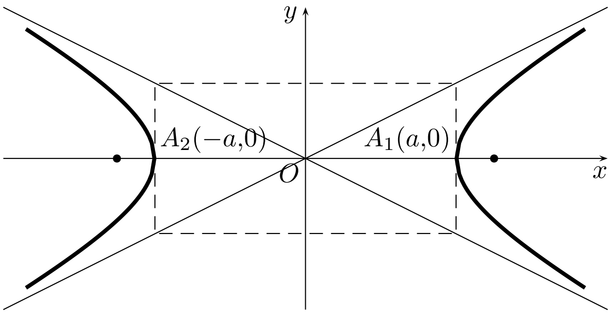


Рис. 7.14

оси равны ($a = b$). Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{7.9}$$

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = x$ и $y = -x$ и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

Уравнение равносторонней гиперболы, для которой оси Ox и Oy являются асимптотами, будет иметь вид $y = k/x$.

7.5. Парабола

7.5.1. Каноническое уравнение параболы. *Параболой* называется множество точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса F до директирисы называется *параметром параболы* и обозначается через p ($p > 0$).

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 7.15). В выбранной системе фокус F имеет координаты $(p/2, 0)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -p/2$ или $x + p/2 = 0$.

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка параболы. Соединим точку M с F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы $|\overline{MF}| = |\overline{MN}|$. По формуле расстояния между двумя точками

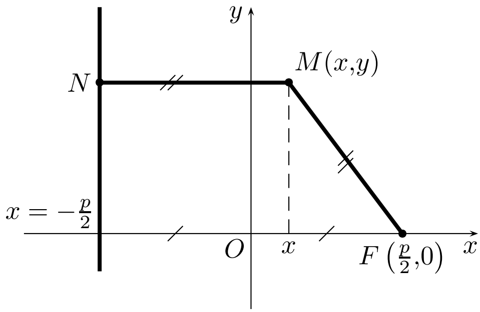


Рис. 7.15

находим

$$|\overline{MF}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad |\overline{MN}| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}\,.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}\,.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

$$y^2 = 2px. \tag{7.10}$$

Уравнение (7.10) называется *каноническим уравнением параболы*.

Парабола есть кривая второго порядка.

7.5.2. Исследование форм параболы по ее уравнению. В уравнении (7.10) переменная y входит в четной степени, значит, парабола симметрична относительно оси Ox; ось Ox является осью симметрии параболы.

Так как $p > 0$, то из (7.10) следует, что $x \geqslant 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает. Парабола $y^2 = 2px$ имеет вид (форму), изображенный на рис. 7.16. Точка $O(0;0)$ называется *вершиной параболы*, отрезок $FM = r$ называется *фокальным радиусом* точки M.

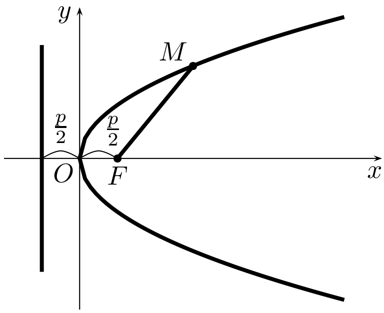


Рис. 7.16

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ ($p > 0$) также определяют параболы, они изображены на рис. 7.17.

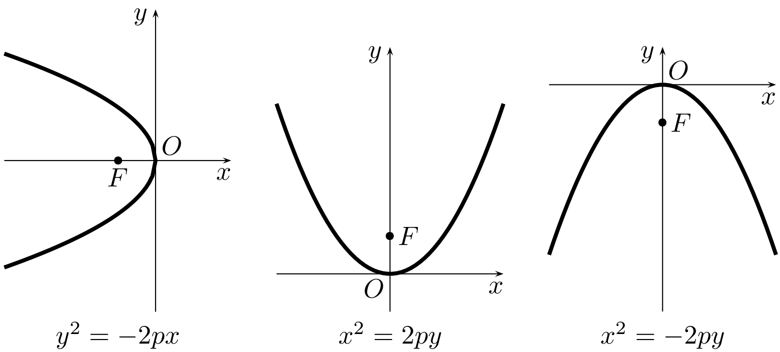


Рис. 7.17

7.6. Уравнение кривой второго порядка в полярных координатах

Если за ось полярной системы координат принять ось линии второго порядка, а за полюс — левый фокус в случае эллипса, правый фокус — в случае гиперболы и фокус — в случае параболы, то уравнение в полярных координатах для каждой из этих линий имеет один и тот же вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \tag{7.11}$$

где r, φ — полярные координаты произвольной точки кривой; p — длина полухорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к оси (для параболы p — параметр); ε — эксцентриситет кривой. (Это уравнение определяет одну из двух ветвей гиперболы.)

7.7. Параметрические уравнения эллипса, гиперболы, параболы

Параметрическое уравнение эллипса (7.5) имеет вид

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Параметрическое уравнение гиперболы (7.6) имеет вид

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,\varphi, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,\varphi, \end{cases}$$

где $\mathrm{ch}\,\varphi = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2$, $\mathrm{sh}\,\varphi = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})/2$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Параметрическое уравнение параболы (7.10) имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}\varphi^2, \\ y = \varphi, \end{cases} \qquad -\infty < \varphi < \infty.$$

Упражнения

7.1. Записать уравнение окружности в каждом из следующих случаев: а) окружность имеет центр $C(-1;2)$ и проходит через точку $A(2;6)$; б) точки $M(2;-3)$ и $N(-6;3)$ являются концами одного из диаметров окружности; в) окружность проходит через точки $A(2;3)$ и $B(5;2)$ и имеет центр на оси Ox; г) окружность проходит через точки $A(7;7)$ и $B(-2;4)$, а ее центр лежит на прямой $2x-y-2=0$; д) окружность проходит через три точки $A(2;1)$, $B(6;3)$ и $C(9;2)$.

7.2. Найти уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+ 6x+2y+6=0$, параллельных прямой $5x-12y+1=0$.

7.3. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, составить уравнения директрис эллипса:

а) $9x^2+25y^2=225$; б) $4x^2+y^2=1$.

Взяв на плоскости прямоугольную декартовую систему координат, построить эти эллипсы, а также их фокусы и директрисы.

7.4. Исследовать взаимное расположение эллипса и прямой в каждом из следующих случаев:

а) $x^2 + 2y^2 = 4, \quad x + y - 1 = 0;$

б) $4x^2 + 9y^2 = 72, \quad 2x + 3y - 12 = 0;$

в) $3x^2 + y^2 = 6, \quad 2x + y - 18 = 0.$

7.5. Определить положение точек $M_1(1; 1/6)$, $M_2(1/13; 1/13)$, $M_3(1/6; -1/24)$ относительно эллипса $25x^2 + 144y^2 = 1$.

7.6. Составить каноническое уравнение эллипса, если: а) длина большой оси равна 16, а расстояние между фокусами равно 10; б) сумма полуоси равна 8 и фокальное расстояние тоже равно 8; в) расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет равен $1/2$; г) расстояние между вершинами, лежащими на малой оси, равно 10, а эксцентриситет равен $12/13$; д) фокусами эллипса являются точки $(\pm 2; 0)$, а директрисами являются прямые $x = \pm 18$; е) расстояние между директрисами равно 32, а эксцентриситет равен $1/2$.

7.7. Вычислить эксцентриситет эллипса, если: а) расстояние между фокусами равно среднему арифметическому длин осей; б) расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей; в) расстояние между директрисами в 3 раза больше расстояния между фокусами; г) отрезок между фокусом и дальней вершиной большой оси виден из конца малой оси под прямым углом; д) стороны квадрата, вписанного в эллипс, проходят через фокусы эллипса.

7.8. Дан эллипс $x^2 + 2y^2 = 1$. Найти расстояния: а) от фокусов эллипса до касательной к нему в точке $A(1/3; 2/3)$; б) между касательными к эллипсу, параллельными прямой $x + y - 1 = 0$.

7.9. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2/30 + y^2/24 = 1$: а) проходящих через точку $(1; 0)$; б) перпендикулярных прямой $2x - y - 1 = 0$.

7.10. Составить уравнение прямой, проходящей через хорду эллипса $x^2/9 + y^2/4 = 1$, которая точкой $(1; 1)$ делится пополам.

7.11. Найти координаты точек эллипса $x^2/16 + y^2/4 = 1$, в которых фокальные радиусы перпендикулярны.

7.12. Найти полуоси, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис и асимптот гиперболы $x^2/16 - y^2/9 = 1$. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить эту гиперболу, а также ее фокусы, директрисы и асимптоты.

7.13. Дана гипербола $100x^2 - 36y^2 = 1$. Определить, лежит ли точка A на гиперболе, внутри одной из ее ветвей или между ветвями:

а) $A\left(\dfrac{1}{8}; -\dfrac{1}{8}\right)$; б) $A(1;1)$; в) $A(1;7)$; г) $A\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

7.14. На гиперболе $x^2/16 - y^2/9 = 1$ найти точку, для которой: а) фокальные радиусы взаимно перпендикулярны; б) расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.

7.15. Составить уравнение касательных к гиперболе $x^2/25 - y^2/16 = 1$, параллельных прямой $4x - 3y = 0$.

7.16. Вычислить угол между асимптотами гиперболы, если: а) ее эксцентриситет равен $\sqrt{2}$; б) расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.

7.17. Вычислить эксцентриситет гиперболы, если: а) ее полуоси равны (равносторонняя гипербола); б) угол между асимптотами, содержащий фокус, равен 120°; в) асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm 3x$; г) директрисы делят отрезок, соединяющий фокусы, на три равные между собой части.

7.18. Составить каноническое уравнение параболы, если: а) точка $(5; -5)$ принадлежит параболе; б) расстояние от фокуса до директрисы равно 12; в) длина хорды, проходящей через фокус под углом 45° к оси параболы, равна 18.

7.19. Вычислить длину фокальной хорды параболы $y^2 = x/5$, перпендикулярной оси параболы.

7.20. Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную: а) в точке с абсциссой $x = 3$; б) параллельно прямой $3x - y + 5 = 0$.

7.21. Найти координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы:

а) $y^2 = 6x$; б) $y^2 = -3x$.

7.22. На параболе $y^2 = 10x$ найти точку M такую, что: а) прямая, проходящая через точку M и фокус параболы, образует с осью Ox угол $60°$; б) расстояние от точки M до вершины параболы равно расстоянию от M до фокуса.

Примеры тестовых заданий

7.1. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A(4; -2)$, имеет вид...

1) $y^2 = -x$; 2) $y^2 = 4x$; 3) $x^2 = -8y$; 4) $y^2 = x$.

7.2. Соотношения

$$\begin{cases} x = 2\cos 3t, \\ y = 2\sin 3t \end{cases}$$

при $t \in [0; 2\pi/3]$ на плоскости Oxy задают...

1) параболу; 2) эллипс;

3) окружность; 4) гиперболу.

7.3. Соотношение

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 2\cos t \end{cases}$$

в прямоугольной декартовой системе координат задает...

1) окружность; 2) гиперболу;

3) параболу; 4) эллипс.

7.4. Асимптоты гиперболы $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ задаются уравнениями (укажите не менее двух вариантов ответа)...

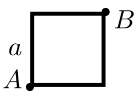
1) $y = \dfrac{2}{3}x$; 2) $y = -\dfrac{2}{3}x$; 3) $y = \dfrac{3}{2}x$; 4) $y = -\dfrac{3}{2}x$.

7.5. Уравнение касательной к кривой $(x-1)^2 + y^2 = 10$ в точке $(-2; 1)$ имеет вид...

1) $6x + y + 13 = 0$; 2) $-3x + y + 5 = 0$;

3) $2x + y + 3 = 0$; 4) $-3x + y - 7 = 0$.

7.6. *Задание 1.* Парк развлечений, имеющий форму квадрата со стороной a, освещают две осветительные установки A и B, расположенные в противоположных вершинах этого квадрата (см. рис.).



Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность на поверхности парка достигается в точках, отстоящих в 3 раза дальше от установки A, чем от установки B. Через все эти точки проложили пешеходную дорожку. Тогда все точки этой дорожки принадлежат некоторой...

1) прямой; 2) параболе;

3) гиперболе; 4) окружности.

Задание 2. В местах пересечения этой дорожки со сторонами квадрата расположены входы в парк. Пусть сторона квадрата $a = 54(\sqrt{7} + 1)$ м. Тогда расстояние от установки B до ближайшего такого входа равно...

Глава 8
Плоскость и прямая в пространстве

8.1. Плоскость в пространстве

8.1.1. Общее уравнение плоскости. Уравнение первой степени, связывающее координаты точки в пространстве, имеет следующий вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, $C \neq 0$ одновременно.

Каждый ненулевой вектор $\boldsymbol{N}$, перпендикулярный к плоскости P, называется *нормальным вектором плоскости*, $\boldsymbol{N} \perp P$, $\boldsymbol{N} \neq 0$.

Теорема 8.1. *В пространстве каждая плоскость определяется уравнением первой степени.*

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости P, вектор $\boldsymbol{N} \perp P$ — нормальный вектор плоскости (рис. 8.1). Выберем точку M — произвольную точку плоскости с

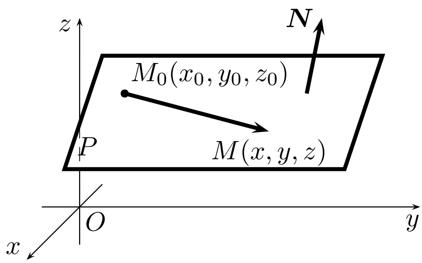


Рис. 8.1

координатами (x, y, z). Вектор $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и нормальный вектор $\boldsymbol{N}(A, B, C)$ взаимно перпендикулярны:

$$\boldsymbol{N} \perp \overline{M_0M} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{N}, \overline{M_0M}) = 0,$$

что верно для любой точки плоскости. Тогда уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 перпендикулярно данному вектору $\boldsymbol{N}$, следующее:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{8.1}$$

Преобразуем формулу (8.1), раскроем скобки:

$$Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Значит, *общее уравнение плоскости* имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{8.2}$$

□

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 8.2. *Любое уравнение первой степени определяет плоскость.*

8.1.2. Уравнение плоскости в отрезках. Пусть дано уравнение плоскости (8.2). Тогда

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \Rightarrow \quad Ax+By+Cz=-D \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\dfrac{-D}{A}}+\frac{y}{\dfrac{-D}{B}}+\frac{z}{\dfrac{-D}{C}}=1.$$

Если $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$, то получим *уравнение плоскости в отрезках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{8.3}$$

где a, b, c — величины отрезков, которые отсекает плоскость на координатных осях, считая от начала координат.

Пример 8.1. Составить уравнение плоскости, зная, что она отсекает на координатных осях отрезки величиной 2, -3, 4.

Решение. Так как $a=2$, $b=-3$, $c=4$, то уравнение плоскости в отрезках будет

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1;$$

общее уравнение плоскости

$$6x-4y+3z-12=0.$$

□

8.1.3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Пусть даны три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, принадлежащие плоскости P (рис. 8.2). Выберем на плоскости произвольную точку

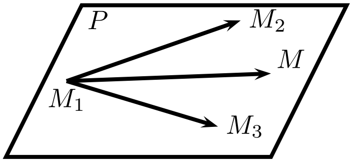


Рис. 8.2

$M(x, y, z)$ с текущими координатами. Составим вектора

$$\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Так как все точки лежат в одной плоскости, то три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ должны быть компланарными. По условию компланарности трех векторов

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0.$$

Тогда *уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки*, будет

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.4)$$

Пример 8.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(2; 2; 3)$, $M(1; 0; -2)$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 8(x - 1) + (y - 2) - 2(z + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 8x + y - 2z - 12 = 0.$$ □

8.1.4. Нормальное уравнение плоскости. Выберем произвольную декартову систему координат и некоторую произвольную плоскость P (рис. 8.3). Из начала координат проведем прямую, перпендикулярную к данной плоскости P (нормаль) и установим на ней направление от начала координат в сторону плоскости P. Обозначим через α, β, γ углы, которые образует нормальный вектор $\boldsymbol{N}$ с осями

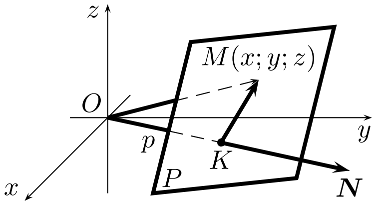


Рис. 8.3

координат. Если $|\boldsymbol{N}| = 1$, то $\boldsymbol{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пусть $|\overline{OK}| = p$. Выберем некоторую точку $M(x, y, z) \in P$, $\overline{OM} = \boldsymbol{r}(x, y, z)$. Спроецируем вектор $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ на вектор $\boldsymbol{N}$, получим $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{r} = p$. Тогда

$$\operatorname{pr}_{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{r} = p = |\boldsymbol{r}| \cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N}}) = |\boldsymbol{r}| \cdot \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N})}{|\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{N}|} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N}) = p$$

— нормальное уравнение плоскости в векторной форме, или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{8.5}$$

— *нормальное уравнение плоскости*, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — *направляющие косинусы нормали*, p — расстояние от начала координат до плоскости P.

8.1.5. Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду. Умножим общее уравнение плоскости на нормирующий множитель μ:

$$A\mu x + B\mu y + C\mu z + D\mu = 0$$

и сравним с нормальным уравнением (8.5). Тогда

$$\begin{cases} \mu A = \cos\alpha, \\ \mu B = \cos\beta, \\ \mu C = \cos\gamma, \\ \mu D = -p; \end{cases} \qquad \mu^2A^2 + \mu^2B^2 + \mu^2C^2 = 1,$$

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак нормирующего множителя μ противоположен знаку свободного коэффициента нормируемого уравнения плоскости.

8.2. Расстояние от точки до плоскости

Чтобы найти расстояние $\rho(M_0; P)$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной нормальным уравнением

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

необходимо в левую часть уравнения плоскости вместо текущих координат подставить координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и взять полученное выражение по модулю:

$$\rho(M_0; P) = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| \tag{8.6}$$

— *расстояние от точки до плоскости, заданной в нормальном виде.*

Если уравнение плоскости P дано в общем виде, то из правила приведения уравнения к нормальному виду следует, что

$$\rho(M_0; P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{8.7}$$

— *расстояние от точки до плоскости, заданной в общем виде.*

8.3. Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны две плоскости P_1 и P_2 со своими общими уравнениями

$$P_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$P_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть плоскости P_1 и P_2 параллельны (рис. 8.4). У плоскости P_1 нормальный вектор $\boldsymbol{N}_1(A_1, B_1, C_1)$, у плоскости P_2 — $\boldsymbol{N}_2(A_2, B_2, C_2)$. Нормальные вектора коллинеарны друг другу, тогда их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

— *условие параллельности двух плоскостей.*

2. Пусть плоскости P_1 и P_2 перпендикулярны (рис. 8.5). Для того чтобы две плоскости были взаимно перпендикулярны, необходимо, чтобы их нормальные векторы были

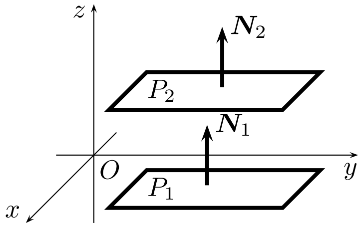


Рис. 8.4

перпендикулярны ($N_1 \perp N_2$), т.е.

$$(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (8.8)$$

— *условие перпендикулярности двух плоскостей.*

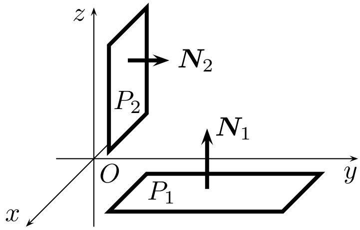


Рис. 8.5

3. Пусть плоскости P_1 и P_2 пересекаются под некоторым углом (рис. 8.6).

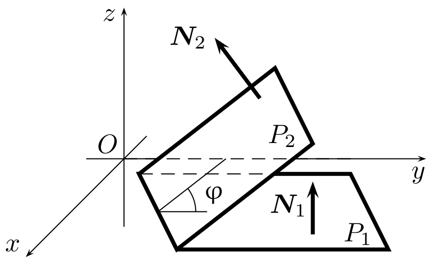


Рис. 8.6

Углом между плоскостями P_1 и P_2 называется угол между их нормальными векторами $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$.

Найдем угол φ между плоскостями P_1 и P_2:

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2}) = \frac{\boldsymbol{N}_1 \cdot \boldsymbol{N}_2}{|\boldsymbol{N}_1| \cdot |\boldsymbol{N}_2|} =$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

— *косинус угла между двумя плоскостями.*

8.4. Прямая в пространстве

8.4.1. Параметрическое и каноническое уравнения прямой в пространстве. Каждый ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется *направляющим вектором данной прямой* (обозначается $\boldsymbol{q}(l, m, n)$).

Замечание. Числа l, m, n одновременно в нуль обращаться не могут, т.к. вектор $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ — ненулевой, однако одно или два числа из l, m, n могут быть нулевыми.

Пример 8.3. Для координатной оси Ox направляющий вектор равен $\boldsymbol{q}(1; 0; 0)$. □

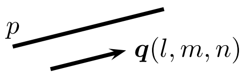


Рис. 8.7

Выведем уравнение прямой p, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in p$ и имеющей заданный направляющий вектор $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ (рис. 8.7).

Выберем точку $M(x, y, z) \in p$ с текущими координатами. Построим вектор $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Векторы $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны, тогда их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{8.9}$$

— *каноническое уравнение прямой в пространстве.*

Получим из уравнения (8.9) параметрическое уравнение прямой. Для этого обозначим через t каждое из равных отношений в (8.9):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{8.10}$$

— *параметрическое уравнение прямой в пространстве.*

Замечания.

1. В уравнениях (8.10) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр, а x, y, z — функции от параметра.

2. При изменении параметра t величины x, y, z меняются так, что $M(x; y; z) \in p$ движется по прямой.

3. Параметрические уравнения удобно применять в тех случаях, когда требуется найти точки пересечения прямой и плоскости, прямой и поверхности.

Пример 8.4. Даны прямая l и плоскость P уравнениями

$$l: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}; \quad P: \ 2x + y + z - 6 = 0.$$

Найти их точку пересечения.

Решение. Перейдем от канонического уравнения прямой к параметрическому

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 + t, \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

Подставим эти уравнения в исходное уравнение плоскости P:

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0.$$

Из полученного уравнения $t = -1$; это значение соответствует точке пересечения прямой l и плоскости P. Подставляя его в параметрические уравнения прямой, получим $O(1; 2; 2)$ — искомая точка. □

8.4.2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны две точки прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В качестве направляющего вектора прямой выберем

$$\boldsymbol{q} = \overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} l = x_2 - x_1, \\ m = y_2 - y_1, \\ n = z_2 - z_1. \end{cases}$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

— *уравнение прямой, проходящей через две точки.*

8.4.3. Общее уравнение прямой в пространстве. Всякая линия в пространстве рассматривается как пересечение двух поверхностей и определяется заданием двух уравнений. В частности, прямая в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей:

$$L : \begin{cases} P_1 : \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ P_2 : \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

— *общее уравнение прямой в пространстве.*

Покажем, как составить каноническое уравнение прямой, заданной в виде (8.11). Обозначим нормальные вектора плоскостей P_1 и P_2 соответственно через $\boldsymbol{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{N}_2(A_2, B_2, C_2)$. Для того чтобы составить каноническое уравнение данной прямой, необходимо:

1) найти какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$. Для этого следует задать числовое значение одной из неизвестных координат x_0, y_0 или z_0 и подставить его вместо соответствующей переменной в систему (8.11). После этого две другие координаты точки находятся путем совместного решения уравнений (8.11);

2) найти направляющий вектор $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ прямой L. Так как заданная прямая определена как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2, то она перпендикулярна к каждому из векторов $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$. Поэтому в качестве направляющего вектора $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ берется векторное произведение векторов $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$: $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2]$.

Пример 8.5. Найти каноническое уравнение прямой

$$L : \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x_0 = 1$, тогда

$$\begin{cases} 3 + 2y_0 + 4z_0 - 11 = 0, \\ 2 + y_0 - 3z_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 2, \\ z_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow M_0(1; 2; 1) \in L.$$

Так как $\boldsymbol{N}_1(3;2;4)$, $\boldsymbol{N}_2(2;1;-3)$, то

$$\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Искомое уравнение

$$L: \ \frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}. \qquad \square$$

8.5. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть даны две прямые

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2: \ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Углом между двумя прямыми называют любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через одну точку параллельно данным прямым.

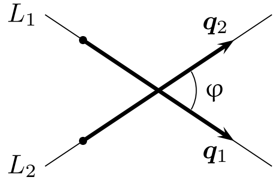


Рис. 8.8

1. Угол между двумя данными прямыми есть угол между направляющими векторами данных прямых (рис. 8.8): $\varphi = \angle(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \angle(L_1, L_2)$. Так как направляющие вектора равны $\boldsymbol{q}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\boldsymbol{q}_2(l_2, m_2, n_2)$, то

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2}) = \frac{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)}{|\boldsymbol{q}_1| \cdot |\boldsymbol{q}_2|} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

— *косинус угла между двумя прямыми.*

2. $L_1 \parallel L_2$. Для того чтобы прямые L_1 и L_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие векторы $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

— *условие параллельности двух пространственных прямых.*

3. $L_1 \perp L_2$. Для того чтобы прямые L_1 и L_2 были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие векторы $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ были взаимно перпендикулярны:

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{q}_1 \perp \boldsymbol{q}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = 0$$

или

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

— *условие перпендикулярности двух прямых в пространстве.*

Замечание. В пространстве две перпендикулярные прямые не обязательно являются пересекающимися.

8.6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве даны прямая и плоскость своими уравнениями

$$L: \ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad P: \ Ax + By + Cz + D = 0.$$

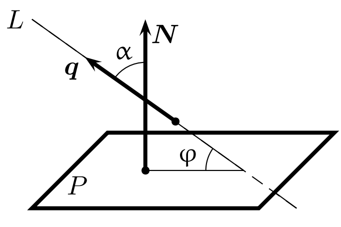


Рис. 8.9

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и плоскости.

1. $L \cap P$. Зная, что направляющий вектор прямой равен $\boldsymbol{q}(l, m, n)$, нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{N}(A, B, C)$, получим выражение для угла между прямой и плоскостью (рис. 8.9):

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi =$$

$$= \left| \frac{(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{N}| \cdot |\boldsymbol{q}|} \right| = \left| \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right|$$

или

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

— *синус угла между прямой и плоскостью.*

2. $L \parallel P$. Для того чтобы прямая L и плоскость P были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющий и нормальный векторы были взаимно перпендикулярны:

$$L \parallel P \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{N} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{q},\boldsymbol{N}) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad Al + Bm + Cn = 0$$

— *условие параллельности прямой и плоскости в пространстве*.

3. $L \perp P$. Для того чтобы прямая L и плоскость P были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющий и нормальный векторы были коллинеарны:

$$L \perp P \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{q} \parallel \boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

— *условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве*.

Упражнения

8.1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $\boldsymbol{N}(1;-2;3)$.

8.2. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

8.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;1)$ параллельно плоскости $-2x + y + z - 2 = 0$.

8.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\boldsymbol{a}_1(3;1;-1)$ и $a_2(1;-2;1)$.

8.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(3;-1;4)$.

8.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$.

8.7. Найти угол между плоскостями:

а) $x + y - 11 = 0$, $3x + 8 = 0$;

б) $y - \sqrt{3}\,x - 7 = 0$, $y = 0$;

в) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$, $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

8.8. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

8.9. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y - 3z - 5 = 0$.

8.10. Вычислить расстояние от точки $M_0(-1; 1; -2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$ и $M_3(4; -5; -2)$.

8.11. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.

8.12. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстоянии $\rho = 4$.

8.13. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; 0; -3)$ параллельно:

а) вектору $\boldsymbol{q} = (2; -3; -5)$;

б) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

в) оси Ox;

г) оси Oz;

д) прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

е) прямой $x = -2 + t$, $y = 2t$, $z = 1 - \frac{1}{2}t$.

8.14. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; -1; -3)$ параллельно:

а) вектору $\boldsymbol{a} = (2; -3; 4)$;

б) прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{0}$;

в) прямой $x = 3t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 5t + 2$.

8.15. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

а) $(1; -2; 1)$, $(3; 1; -1)$; б) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$.

8.16. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

а) $(3; -1; 2)$, $(2; 1; 1)$; б) $(1; 1; -2)$, $(3; -1; 0)$.

8.17. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

8.18. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;2;-2)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x-y-2=0, \\ y-2z-1=0. \end{cases}$$

8.19. Составить параметрическое уравнение общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x=3t-7$, $y=-2t+4$, $z=3t+4$ и $x=t+1$, $y=2t-8$, $z=-t-12$.

8.20. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(2;3;-1)$ на плоскости:

а) $4x+5y-2z+3=0$; б) $2x-3z+1=0$.

8.21. Доказать параллельность прямых:

а) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

б) $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

8.22. Доказать перпендикулярность прямых:

а) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

б) $x=2t+1$, $y=3t-2$, $z=-6t+1$ и $\begin{cases} 2x+y-4x+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

8.23. Найти острый угол между прямыми

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

8.24. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$$

8.25. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;

б) $x=-6+2t$, $y=7-t$, $z=8-3t$, $3x-4y+5z+16=0$.

8.26. Найти угол между прямыми и плоскостями:

а) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ и $2x + y + z - 4 = 0$;

б) $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ и $x + y + 2z - 4 = 0$.

8.27. Доказать, что прямая
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$$
параллельна плоскости $2x + y - z = 0$.

8.28. Доказать, что прямая
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$
лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

8.29. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой
$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

8.30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой
$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

8.31. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; 0)$ и прямую
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

8.32. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$$
параллельно плоскости $x + y - z + 15 = 0$.

8.33. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$$
перпендикулярно плоскости $2x + 3y - z = 4$.

8.34. Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые
$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}.$$

8.35. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;4)$ параллельно прямым
$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}.$$

8.36. Найти расстояние от точки $M_0(3;0;4)$ до прямой $y = 2x+1$, $z=2x$.

8.37. Найти расстояние от точки $(1;2;5)$ до каждой из следующих прямых:

а) $x=t$, $y=1-2t$, $z=3+t$;

б) $x+y-z+2=0$, $4x-3z+3=0$.

8.38. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

а) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ и $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$;

б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ и $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$;

в) $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y+2z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y+2z-1=0. \end{cases}$

8.39. Найти расстояние между двумя прямыми:

а) $x=3+t$, $y=1-t$, $z=2+2t$ и $x=-t$, $y=2+3t$, $z=3t$;

б) $x+2y-z+1=0$, $2x-3y+z-4=0$ и $x+y+z-9=0$, $2x-y-z=0$;

в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

8.40. Найти проекцию точки $P(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

8.41. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

8.42. Найти точку Q, симметричную точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

8.43. Найти точку Q, симметричную точке $P(4;1;6)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

8.44. Найти проекцию точки $P(2;-1;3)$ на прямую $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$.

8.45. Найти проекцию прямой

$$\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$.

8.46. Составить уравнение проекции прямой

$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $2x + 3y + z - 6 = 0$.

8.47. Составить уравнения проекций прямой

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

Примеры тестовых заданий

8.1. Синус угла между прямой

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

и плоскостью $x - 2y - 3z + 9 = 0$ равен...

1) $\dfrac{1}{196}$; 2) $\dfrac{1}{14}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{70}}$; 4) $-\dfrac{1}{14}$.

8.2. Уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(-2;3;-5)$, имеет вид...

1) $x + y + z + 4 = 0$; 2) $3x + 2y = 0$;

3) $z + 5 = 0$; 4) $3x - 2y = 0$.

8.3. Острый угол между плоскостями $x - 2y - 2z + 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$ равен...

1) $\dfrac{\pi}{3}$; 2) $\dfrac{\pi}{4}$; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\arccos\dfrac{11}{3\sqrt{38}}$.

8.4. Угол между прямой
$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{0}$$
и плоскостью $4x+y+z-2=0$ равен...

1) $\dfrac{\pi}{3}$; 2) $\dfrac{5\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\pi}{6}$; 4) $\dfrac{2\pi}{3}$.

8.5. Параметрические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M(1;-1;-3)$ перпендикулярно плоскости $2x-3y+4z-5=0$, имеют вид...

1) $\begin{cases} x=2+t, \\ y=-3-t, \\ z=4-3t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2t, \\ y=-3t, \\ z=4t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-1-3t, \\ z=-3+4t; \end{cases}$ 4) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$.

8.6. Прямая
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{-4}$$
и плоскость $2x-ky+z+3=0$ параллельны при k, равном...

1) $-\dfrac{3}{2}$; 2) $\dfrac{8}{3}$; 3) 0; 4) -1.

Глава 9
Поверхности второго порядка

9.1. Основные понятия

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \qquad (9.1)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13} отличен от нуля. Уравнение (9.1) мы будем называть *общим уравнением поверхности второго порядка*.

Преобразования поворота осей координат и параллельного переноса начала координат приводят общее уравнение поверхности (9.1) к каноническому виду. Перечислим канонические уравнения поверхностей второго порядка:

1) *нераспадающиеся поверхности второго порядка:*

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид (рис. 9.1);
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — мнимый эллипсоид;
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид (рис. 9.2);
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид (рис. 9.3);
- $\dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q} = z$ — эллиптический параболоид ($p > 0$, $q > 0$) (рис. 9.4);

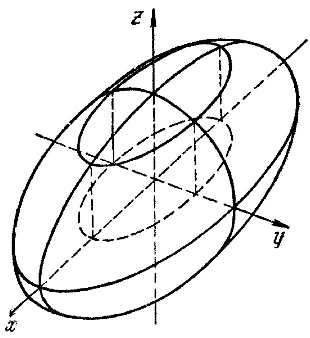


Рис. 9.1

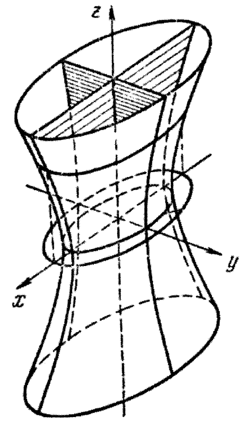


Рис. 9.2

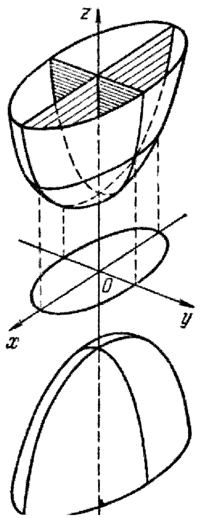


Рис. 9.3

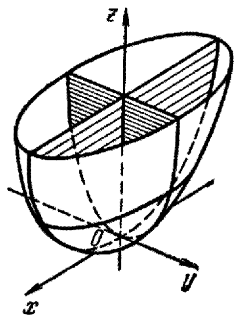


Рис. 9.4

- $\dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z$ — гиперболический параболоид ($p > 0$, $q > 0$) (рис. 9.5);
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — конус (рис. 9.6);

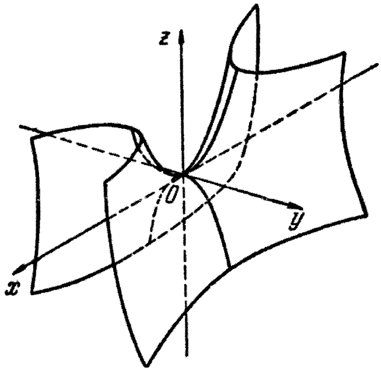


Рис. 9.5

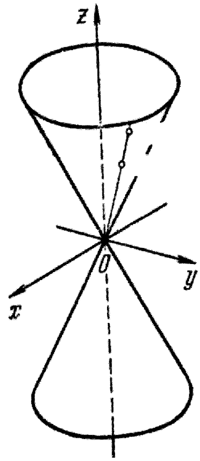


Рис. 9.6

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — мнимый конус;
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр (рис. 9.7);
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — мнимый эллиптический цилиндр;
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболический цилиндр (рис. 9.8);

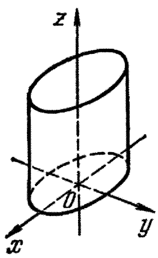


Рис. 9.7

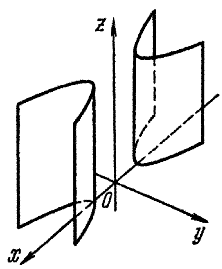


Рис. 9.8

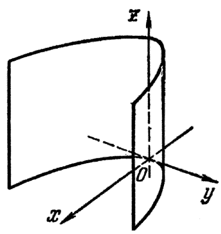


Рис. 9.9

- $y^2=2px$ — параболический цилиндр (рис. 9.9);

2) *распадающиеся поверхности второго порядка:*

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пары пересекающихся плоскостей;
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пары мнимых пересекающихся плоскостей;
- $x^2 = a^2$ — пары параллельных плоскостей;
- $x^2 = -a^2$ — пары мнимых параллельных плоскостей;
- $x^2 = 0$ — пары совпадающих плоскостей.

9.2. Примеры исследования поверхностей

9.2.1. Эллипсоид. Форма эллипсоида исследуется с помощью метода «параллельных сечений».

Сечение плоскостью Oxy:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Сечение плоскостями, параллельными Oxy:

$$z = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}. \end{cases}$$

Если $|h| \leqslant c$, то в сечении эллипсы, если $|h| > c$, то точек пересечения нет.

Сечение плоскостью Oyz:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечение плоскостями, параллельными Oyz:

$$x = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = h, \\ \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2}. \end{cases}$$

Если $|h| \leqslant a$, то в сечении эллипсы, если $|h| > a$, то точек пересечения нет.

Построим изображение эллипсоида по полученным сечениям (рис. 9.10).

Величины a, b, c называются *полуосями эллипсоида*. Если они различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Если две полуоси равны ($a = b$), то эллипсоид может быть получен вращением вокруг одной из его осей (оси z в данном случае). Если $a = b = c$, то эллипсоид становится *сферой*.

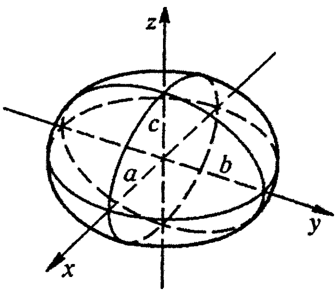


Рис. 9.10

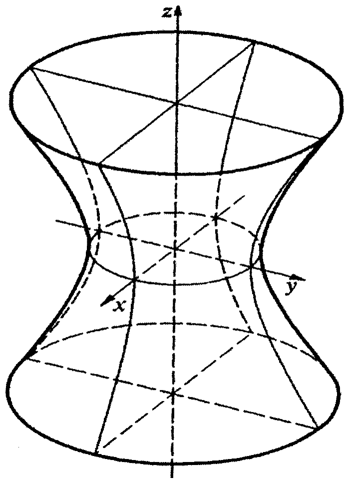


Рис. 9.11

9.2.2. ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД. Исследуем форму однополостного гиперболоида.

Сечение плоскостью Oxy:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Сечение плоскостями, параллельными Oxy:

$$z = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}. \end{cases}$$

В сечении эллипсы при любых значениях h, причем полуоси увеличиваются с увеличением h.

Сечение плоскостью Oyz:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечение плоскостями, параллельными Oyz:

$$x = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = h, \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2}. \end{cases}$$

Если $|h| \leqslant a$, то в сечении гиперболы с мнимой осью на оси z; если $|h| > a$, то в сечении гиперболы, сопряженные предыдущим, с мнимой осью на оси y.

Построим изображение однополостного гиперболоида по сечениям (рис. 9.11).

9.2.3. Гиперболический параболоид. Исследуем форму поверхности.

Сечение плоскостью Oxy:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

— пара пересекающихся прямых, проходящих через начало координат.

Сечение плоскостями, параллельными Oxy:

$$z = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = h \end{cases}$$

— в сечении гиперболы при любых значениях h.

Сечение плоскостью Oyz:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\dfrac{y^2}{b^2} = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y^2 = -b^2 z$$

— парабола, ветви которой направлены вниз относительно оси Oz.

Сечение плоскостями, параллельными Oyz:

$$x = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = h, \\ -\dfrac{y^2}{b^2} = z - \dfrac{h^2}{a^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = h, \\ y^2 = -b^2 z - \dfrac{b^2 h^2}{a^2} \end{cases}$$

— в сечении параболы, ветви которых направлены вниз относительно оси Oz, смещенные вниз на b^2h^2/a^2 единиц.

Сечение плоскостью Oxz:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 z$$

— парабола, ветви которой направлены вверх относительно оси Oz.

Сечение плоскостями, параллельными Oxz:

$$y = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = z + \dfrac{h^2}{b^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = h, \\ y^2 = a^2 z + \dfrac{a^2h^2}{b^2} \end{cases}$$

— в сечении параболы, ветви которых направлены вверх относительно оси Oz, смещенные вверх на a^2h^2/b^2 единиц.

Построим изображение гиперболического параболоида по сечениям (рис. 9.12).

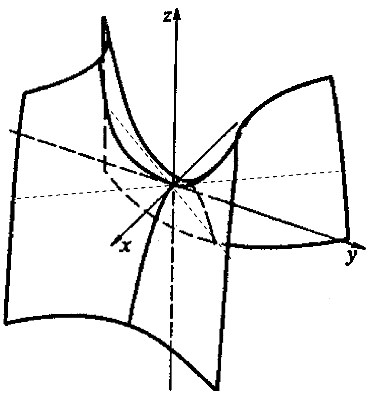


Рис. 9.12

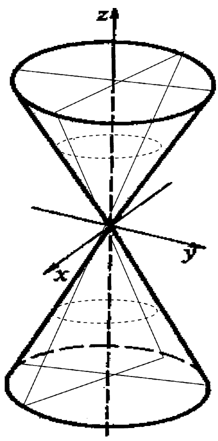


Рис. 9.13

9.2.4. Конус. Сечение плоскостью Oxy:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} = -\dfrac{y^2}{b^2}$$

— выполняется только для $x = y = 0$, поэтому сечением будет начало координат.

Сечение плоскостями, параллельными Oxy:

$$z = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases}$$

— в сечении эллипсы при любых значениях h, причем полуоси увеличиваются с увеличением h.

Сечение плоскостью Oyz:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

— пара пересекающихся прямых.

Сечение плоскостями, параллельными Oyz:

$$x = h \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = h, \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{h^2}{a^2} \end{cases}$$

— в сечении гиперболы с мнимой осью на оси Oy.

Аналогично определяются сечения для плоскостей $y = 0$ и $y = h$.

Построим изображение конуса по сечениям (рис. 9.13).

Упражнения

9.1. Составить уравнение сферы радиуса 4 с центром в точке $(-1; 2; 3)$.

9.2. Найти центр и радиус сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0.$$

9.3. Установить тип заданных поверхностей и построить их:

а) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} - \dfrac{z^2}{4} = 1$;

в) $x^2 + z^2 - y^2 = -1$; г) $x^2 - y^2 = z^2$;

д) $y = 3 + x^2 + z^2$; е) $x^2 = -4z$;

ж) $4x^2 + 9z^2 = 36$; з) $\dfrac{y^2}{5} - \dfrac{x^2}{4} = 6z$.

9.4. Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает заданный эллипсоид
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$
по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

9.5. Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$$
по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

9.6. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид
$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$$
по параболе; найти ее параметр и вершину.

9.7. Найти уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида $y^2+z^2=x$ плоскостью $x+2y-z=0$.

9.8. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями и найти центр каждой из них:

а) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=2z,\\ 3x-y+6z-14=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=2z,\\ x-2y+2=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1,\\ 9x-6y+2z-28=0.\end{cases}$

9.9. Установить, при каких значениях m плоскость $x+mz-1=0$ пересекает данный двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$: а) по эллипсу; б) по гиперболе.

9.10. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ и $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}$;

б) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$ и $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$;

в) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$;

г) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = z$ и $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$.

9.11. Построить заданные цилиндрические поверхности:

а) $y^2 + z^2 = 4$; б) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; в) $x^2 + y^2 = 6y$;

г) $x^2 = 4z$; д) $z = 3 - x^2$; е) $x^2 - xy = 0$;

ж) $x^2 - z^2 = 0$.

9.12. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = h; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 25, \\ y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

Построить соответствующие конусы.

9.13. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(3; -1; -2)$, а направляющая дана уравнениями $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$.

9.14. Составить уравнения проекций линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ на координатные плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

Примеры тестовых заданий

9.1. Каноническое уравнение поверхности $x^2 + y^2 - 10x - 8y - z + 39 = 0$ имеет вид...

1) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = z + 2$;

2) $x(x-10) + y(y-8) - z = 39$;

3) $(x+5)^2 + (y+4)^2 = z + 2$;

4) $(x-5)^2 + (y-4)^2 - (z+2)^2 = 0$.

9.2. Точка, принадлежащая поверхности

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{25} - \frac{(z-5)^2}{2} = 1,$$

имеет координаты...

1) $(-1; -2; 5)$; 2) $(1; 2; -5)$; 3) $(4; 25; 2)$; 4) $(1; -2; 5)$.

9.3. Центр сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 14y - 6z - 5 = 0$ имеет координаты...

1) $(-1; 7; 3)$; 2) $(-2; 14; 6)$; 3) $(1; -7; -3)$; 4) $(2; -14; -6)$.

9.4. Укажите название поверхности $x^2 = y$ второго порядка в пространстве:

1) эллипсоид;

2) гиперболический параболоид;

3) параболический цилиндр;

4) конус.

Глава 10
Линейные операторы

10.1. Линейные операторы векторного пространства

Обозначим через V_3 трехмерное векторное пространство над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$. Его элементами являются векторы.

В V_3 определены следующие операции:

1) сложение векторов. Для любых двух векторов $\boldsymbol{a} \in V_3$, $\boldsymbol{b} \in V_3$ вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V_3$;

2) умножение вектора на скаляр. Для любого вектора $\boldsymbol{a} \in V_3$ и для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор $\lambda\boldsymbol{a} \in V_3$.

Оператором векторного пространства V_3 называется отображение $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в себя, ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ векторного пространства V_3 по некоторому правилу один и только один вектор $\boldsymbol{y}$ этого же пространства. Вектор $\boldsymbol{y}$ называется образом вектора $\boldsymbol{x}$, а вектор $\boldsymbol{x}$ — прообразом вектора $\boldsymbol{y}$.

Оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в векторном пространстве V_3, называется *равным* оператору $\boldsymbol{B}$, действующему в том же векторном пространстве V_3 (пишут $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), если $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V_3$.

Оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 называется *аддитивным оператором* векторного пространства V_3, если для любых $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ из V_3

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_2).$$

Оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 называется *однородным оператором* векторного пространства V_3, если для любых $\boldsymbol{x}$ из V_3 и любых $t \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{A}(t\boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}).$$

Линейным оператором векторного пространства V_3 называется аддитивный и однородный оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3.

Теорема 10.1. *Оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 является линейным оператором векторного пространства V_3 тогда и только тогда, когда для любых $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ из V_3 и любых $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R}$*

$$\boldsymbol{A}(t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2) = t_1\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1) + t_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_2).$$

Общепринято обозначение действия линейных операторов векторного пространства без указания скобок (там, где это не вызывает многозначности) в виде $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Простейшие свойства линейных операторов:

1) $\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

2) $\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$;

3) если векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ линейно зависимы, то и их образы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3$ также линейно зависимы;

4) если векторы $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$ образуют линейно независимую систему в V_3 и $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор векторного пространства V_3, тогда в V_3 существует линейно независимая система, состоящая из трех векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, образы которых совпадают с $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$ соответственно;

5) существует один и только один линейный оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3, который отображает данный базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ в заданную систему векторов $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$, такую, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i$.

10.2. Примеры линейных операторов

10.2.1. Нулевой оператор $\boldsymbol{O}$. Пусть $\boldsymbol{O}$ — нулевой оператор, действующий в векторном пространстве V_3, т.е. оператор, ставящий в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ векторного пространства V_3 нулевой вектор $\mathbf{0}$. Тогда, так как для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in V_3$ $\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, то

$$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_2,$$

$$\boldsymbol{O}(t\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} = t \cdot \mathbf{0} = t \cdot \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}$$

и, следовательно, нулевой оператор $\boldsymbol{O}$ векторного пространства V_3 является линейным оператором.

10.2.2. Тождественный оператор $\boldsymbol{E}$. Пусть $\boldsymbol{E}$ — тождественный оператор векторного пространства V_3, т.е. преобразование, ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ векторного пространства V_3 тот же вектор $\boldsymbol{x}$. Тогда, так как для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ будет $\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, то

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_2,$$

$$\boldsymbol{E}(t\boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{x} = t \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$$

и, следовательно, тождественный оператор $\boldsymbol{E}$ векторного пространства V_3 является линейным оператором.

10.2.3. Оператор отражения $\boldsymbol{I_O}$ относительно начала координат. Пусть $\boldsymbol{I_O}$ — оператор отражения относительно начала координат, т.е. оператор, ставящий в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ векторного пространства V_3 противоположный вектор $-\boldsymbol{x}$. Тогда, так как для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ будет $\boldsymbol{I_O}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$, то

$$\boldsymbol{I_O}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = -(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = -\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{I_O}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{I_O}(\boldsymbol{x}_2),$$

$$\boldsymbol{I_O}(t\boldsymbol{x}) = -t\boldsymbol{x} = t(-\boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{I_O}(\boldsymbol{x})$$

и, следовательно, оператор отражения относительно начала координат $\boldsymbol{I_O}$ является линейным оператором.

10.2.4. Оператор отражения $\boldsymbol{O_l}$ в плоскости xOy относительно прямой, проходящей через начало координат. Пусть $\boldsymbol{O_l}$ — оператор отражения в плоскости xOy относительно прямой l, проходящей через начало координат, $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор, направленный вдоль заданной прямой l (направляющий вектор прямой l), $\boldsymbol{n}$ — ненулевой вектор, ортогональный вектору $\boldsymbol{a}$ (и прямой l). Тогда (рис. 10.1)

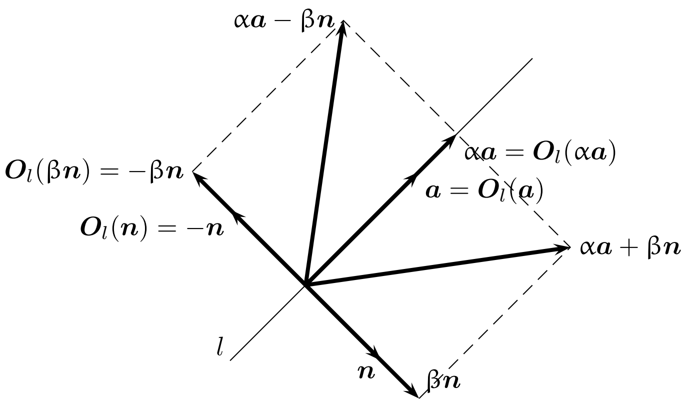


Рис. 10.1

$$\boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{O}_l(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{a}),$$

а также

$$\boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{n} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{O}_l(\beta\boldsymbol{n}) = -(\beta\boldsymbol{n}) = \beta(-\boldsymbol{n}) = \beta\boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{n}).$$

Следовательно,

$$\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{n} = \alpha\boldsymbol{a} + (-(\beta\boldsymbol{n})) =$$
$$= \boldsymbol{O}_l(\alpha\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{O}_l(\beta\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{O}_l(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{n}).$$

Таким образом, линейная комбинация $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{n}$ переводится оператором отражения относительно заданной прямой l в линейную комбинацию $\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{n}$. Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ образуют базис на плоскости, то любые векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ плоскости xOy представимы в виде $\boldsymbol{x}_1 = \alpha_1\boldsymbol{a} + \beta_1\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x}_2 = \alpha_2\boldsymbol{a} + \beta_2\boldsymbol{n}$. Тогда

$$\boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{O}_l(\alpha_1\boldsymbol{a} + \beta_1\boldsymbol{n} + \alpha_2\boldsymbol{a} + \beta_2\boldsymbol{n}) =$$
$$= \boldsymbol{O}_l((\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{a} + (\beta_1 + \beta_2)\boldsymbol{n}) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{a} - (\beta_1 + \beta_2)\boldsymbol{n} = \alpha_1\boldsymbol{a} - \beta_1\boldsymbol{n} + \alpha_2\boldsymbol{a} - \beta_2\boldsymbol{n} =$$
$$= \boldsymbol{O}_l(\alpha_1\boldsymbol{a} + \beta_1\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{O}_l(\alpha_2\boldsymbol{a} + \beta_2\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{x}_2),$$
$$\boldsymbol{O}_l(t\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{O}_l(t(\alpha_1\boldsymbol{a} + \beta_1\boldsymbol{n})) = \boldsymbol{O}_l(t\alpha_1\boldsymbol{a} + t\beta_1\boldsymbol{n}) =$$
$$= t\alpha_1\boldsymbol{a} - t\beta_1\boldsymbol{n} = t(\alpha_1\boldsymbol{a} - \beta_1\boldsymbol{n}) = t\boldsymbol{O}_l(\alpha_1\boldsymbol{a} + \beta_1\boldsymbol{n}) = t\boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{x}_1)$$

и, следовательно, оператор отражения $\boldsymbol{O}_l$ в плоскости относительно заданной прямой l является линейным оператором.

10.3. Матричная форма записи линейного оператора, действующего в векторном пространстве в фиксированном базисе

Пусть в векторном пространстве V_3 выбран некоторый базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и задан линейный оператор $\boldsymbol{A}$. Тогда для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ значение линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на векторе $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) =$$
$$= x_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3 = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3.$$

Следовательно, значение линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на произвольном векторе $\boldsymbol{x}$ полностью определяется его значениями $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3$ на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Кроме

того,
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^T = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})x^T = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{x}),$$
где $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{x})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3)$ и $\boldsymbol{x}$.

Пусть далее к каждому базисному вектору базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ применен оператор $\boldsymbol{A}$. Тогда, во-первых, каждый из векторов базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ перейдет в некоторый набор векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_3))$ и, во-вторых, каждый полученный вектор $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$ имеет некоторое разложение в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, т.е.
$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1' = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2' = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3' = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3, \end{cases} \tag{10.1}$$
где $\boldsymbol{e}_i'$ представляет собой образ базисного вектора $\boldsymbol{e}_i$ при действии оператора $\boldsymbol{A}$. Соотношения (10.1) в матричном виде имеют вид
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^T = A^T\boldsymbol{\beta}^T, \tag{10.2}$$
где
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$
Матрица A называется *матрицей линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Из соотношений (10.1)
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3)x_1 +$$
$$+ (a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3)x_2 + (a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3)x_3 =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\boldsymbol{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\boldsymbol{e}_2 +$$
$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\beta}A\boldsymbol{x}^T = (A\boldsymbol{x}^T)^T\boldsymbol{\beta}^T. \tag{10.3}$$
Сравнение координат $\boldsymbol{y}$ в этом равенстве слева и справа дает
$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \tag{10.4}$$
С помощью матрицы A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$

соотношения (10.4) принимают вид

$$\boldsymbol{y}^T = A\boldsymbol{x}^T.$$

Полученные соотношения (10.4) называются *формулами преобразования векторов* (координат векторов) при действии линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1{,}\boldsymbol{e}_2{,}\boldsymbol{e}_3)$.

Таким образом, каждому линейному оператору векторного пространства V_3 в фиксированном базисе соответствует квадратная матрица третьего порядка — матрица линейного оператора векторного пространства V_3 в этом базисе. Верно и обратное утверждение о том, что каждой матрице A третьего порядка соответствует, причем единственный, линейный оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе.

Следовательно, можно говорить о том, что линейный оператор задан матрицей. В этой матрице каждый столбец соответствует образу линейного оператора соответствующего базисного вектора, представленного в виде столбца.

Согласно формулам преобразования координат векторов (10.4) координаты векторов базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1{,}\boldsymbol{e}_2{,}\boldsymbol{e}_3)$ преобразуются в соответствующие вектора $\boldsymbol{Ae}_1$, $\boldsymbol{Ae}_2$, $\boldsymbol{Ae}_3$ по формулам

$$\boldsymbol{Ae}_1 = (A\boldsymbol{e}_1^T)^T\boldsymbol{\beta}^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^T \boldsymbol{\beta}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}^T = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3 = (a_{11}; a_{21}; a_{31}),$$

$$\boldsymbol{Ae}_2 = (A\boldsymbol{e}_2^T)^T\boldsymbol{\beta}^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^T \boldsymbol{\beta}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}^T = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3 = (a_{12}; a_{22}; a_{32}),$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3 = (A\boldsymbol{e}_3^T)^T \boldsymbol{\beta}^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T \boldsymbol{\beta}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}^T = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3 = (a_{13}; a_{23}; a_{33})$$

в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, что соответствует формулам (10.1).

Каждый линейный оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе взаимно однозначно представляется матрицей третьего порядка — матрицей A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе, которая может быть определена из соотношений (10.1) через преобразования базисных векторов данного базиса или из соотношений (10.4) через преобразование координат некоторого вектора $\boldsymbol{x}$ в фиксированном базисе в координаты его образа $\boldsymbol{y}$ при отображении $\boldsymbol{A}$ в этом же базисе. Матрица, полученная из соотношений (10.1), должна быть транспонирована.

Пример 10.1. Найти матрицу нулевого оператора $\boldsymbol{O}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Решение. Так как для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ справедливо $\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{O}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{O}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{O}\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}$ и, следовательно,

$$\begin{cases} \boldsymbol{O}\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{e}_2 = \mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3, \end{cases}$$

т.е.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

□

Пример 10.2. Найти матрицу тождественного оператора $\boldsymbol{E}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Решение. Так как для каждого вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ справедливо $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, то

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3, \\ y_2 = 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3, \\ y_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3, \end{cases}$$

т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T = E. \qquad \square$$

Пример 10.3. Найти матрицу оператора отражения $\boldsymbol{O}_l$ в плоскости xOy относительно прямой, проходящей через начало координат, в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{a}$ — ненулевой направляющий вектор прямой, $\boldsymbol{n}$ — ненулевой, ортогональный вектору $\boldsymbol{a}$, вектор.

Решение. Так как для каждого вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{n}$ справедливо $\boldsymbol{O}_l(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}_l(x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{n}) = x_1\boldsymbol{a} - x_2\boldsymbol{n}$, то

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 0 \cdot x_2, \\ y_2 = 0 \cdot x_1 - x_2, \end{cases}$$

т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^T. \qquad \square$$

Пример 10.4. Найти матрицу линейного оператора, переводящего стандартный базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ векторного пространства V_3 в набор векторов $\boldsymbol{a}_1 = (3; -1; 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; -1; 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-2; 3; -5)$ относительно стандартного базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Решение. Так как $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^T = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)^T$, то

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} \end{cases}$$

и, следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Пример 10.5. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $\boldsymbol{a}_1 = (-1; 2; -3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0; 3; -3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2; -4; 5)$ в соответствующие векторы $\boldsymbol{b}_1 = (3; -1; -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2; -1; 3)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-2; 3; -5)$ относительно некоторого базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, если все векторы заданы в этом же базисе.

Решение. Задача однозначно разрешима, если система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ линейно независима. Условия задачи в матричном виде имеют вид

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3)$. Тогда, согласно (10.3),

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_i = (A\boldsymbol{a}_i^T)^T \boldsymbol{\beta}^T = (\boldsymbol{a}_i A^T)\boldsymbol{\beta}^T = \boldsymbol{a}_i(A^T \boldsymbol{\beta}^T).$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^T = (\boldsymbol{a}_1(A^T\boldsymbol{\beta}^T), \boldsymbol{a}_2(A^T\boldsymbol{\beta}^T), \boldsymbol{a}_3(A^T\boldsymbol{\beta}^T))^T =$$

$$= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)^T (A^T\boldsymbol{\beta}^T) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)^T \boldsymbol{\beta}^T.$$

Таким образом,

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)^T A^T = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)^T.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо решить три системы уравнений с одной и той же матрицей, но с разными (тремя) столбцами свободных членов:

$$\left\{ \begin{array}{rcr|r|r} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 3 & -1 & -2, \\ +3x_2 - 3x_3 & = & 2 & -1 & 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 & = & -2 & 3 & -5. \end{array} \right.$$

Это можно сделать в одной и той же таблице Гаусса (табл. 10.1). Отсюда

$$A^T = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{3} & \dfrac{4}{3} & -5 \\ -\dfrac{10}{3} & -\dfrac{4}{3} & 10 \\ -4 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -10 & -12 \\ 4 & -4 & -3 \\ -15 & 30 & 27 \end{pmatrix}.$$

□

Таблица 10.1

№ п/п	x_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	x_1	x_2	x_3	$\tilde{a}_i$
1		3	-1	-2	-1	2	-3	-2
		2	-1	3		3	-3	4
		-2	3	-5	2	-4	5	-1
2	x_1	-3	1	2	1	-2	3	2
		2	-1	3		3	-3	4
		4	1	-9			-1	-5
3	x_1	9	4	-25	1	-2		-13
		-10	-4	30		3		19
	x_3	-4	-1	9			1	5
4	x_1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	-5	1			$-\frac{1}{3}$
	x_2	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	10		1		$\frac{19}{3}$
	x_3	-4	-1	9			1	5

Пример 10.6. По матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 в фиксированном базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ найти образы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (-1; 2; -3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0; 3; -3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1; -1; 0)$, в которые они переходят при действии этого линейного оператора, и записать формулы преобразования координат векторов, если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и их образы заданы в том же базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Решение. Условия задачи в матричном виде имеют вид

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A^T \boldsymbol{\beta}^T = B \boldsymbol{\beta}^T.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A^T = B.$$

Следовательно,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{b}_1 = (1;-7;8)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3;-6;9)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-2;-1;-1)$. Согласно формулам (10.4) преобразования координат векторов

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 - 2x_3, \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 \qquad\quad - 3x_3. \end{cases}$$ □

Замечание. В примерах 10.1–10.3 матрицы линейных операторов в указанных базисах являются диагональными, а, следовательно, матрицы соответствующих линейных операторов являются симметрическими, т.е. удовлетворяют соотношению $A^T = A$.

10.4. Действия с линейными операторами

10.4.1. Равенство операторов.

Теорема 10.2. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}$ *векторного пространства* V_3 *равен линейному оператору* $\boldsymbol{B}$ *этого же пространства тогда и только тогда, когда их матрицы в некотором базисе равны.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы, соответствующие линейным операторам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в некотором базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ пространства V_3 и $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Тогда при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$ получим $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j$. Следовательно, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1$, т.е.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = (A\boldsymbol{e}_1^T)^T\boldsymbol{\beta}^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^T \boldsymbol{\beta}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}^T \boldsymbol{\beta}^T = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) =$$

$$= \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1 = (B\boldsymbol{e}_1^T)^T\boldsymbol{\beta}^T = \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^T \boldsymbol{\beta}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}^T \boldsymbol{\beta}^T = b_{11}\boldsymbol{e}_1 + b_{21}\boldsymbol{e}_2 + b_{31}\boldsymbol{e}_3 = (b_{11}, b_{21}, b_{31})$$

в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Так как векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют базис, то, согласно единственности разложения по векторам базиса, $a_{i1} = b_{i1}$ $(i = 1, 2, 3)$. Аналогично, $a_{i2} = b_{i2}$, $a_{i3} = b_{i3}$ $(i = 1, 2, 3)$. Таким образом, $A = B$. □

Верно и обратное утверждение.

10.4.2. Сложение операторов. *Суммой оператора* $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 и оператора $\boldsymbol{B}$ этого же пространства называется оператор, обозначаемый символом $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, определяемый равенством

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V_3$.

Сложение операторов векторного пространства V_3 обладает следующими свойствами:

1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{O}$ — нулевой оператор векторного пространства V_3;
2) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$;
3) $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$.

Теорема 10.3. *Сумма линейных операторов векторного пространства V_3 является линейным оператором.*

Теорема 10.4. *Матрица суммы линейных операторов векторного пространства V_3 равна сумме матриц линейных операторов.*

10.4.3. Умножение оператора на число. *Произведением числа λ на оператор* $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 называется оператор, обозначаемый символом $\lambda\boldsymbol{A}$, определяемый равенством

$$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$

для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V_3$.

Произведение числа на оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 обладает следующими свойствами:

1) $\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\lambda$;
2) $1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;
3) $0 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$;
4) $\beta(\alpha\boldsymbol{A}) = (\beta\alpha)\boldsymbol{A} = \alpha(\beta\boldsymbol{A})$;

5) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$;

6) $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$.

Согласно свойству $\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda$ произведение числа на оператор равно произведению оператора на число.

Теорема 10.5. *Произведение линейного оператора векторного пространства V_3 на число является линейным оператором.*

Теорема 10.6. *Матрица произведения линейного оператора векторного пространства V_3 на число равна произведению этого числа на матрицу линейного оператора.*

10.4.4. Противоположный оператор и разность двух операторов. *Противоположным оператором* для оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 называется оператор, обозначаемый символом $-\boldsymbol{A}$, определяемый равенством $-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

Разность двух операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ векторного пространства V_3 определяется через сложение по формуле $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

Теорема 10.7. *Противоположный оператор для линейного оператора является линейным оператором и матрица противоположного линейного оператора $-\boldsymbol{A}$ для линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 равна противоположной матрице линейного оператора $\boldsymbol{A}$.*

Теорема 10.8. *Разность линейных операторов является линейным оператором и матрица разности линейных операторов векторного пространства V_3 равна разности матриц линейных операторов.*

10.4.5. Умножение операторов. *Произведением оператора* $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 на оператор $\boldsymbol{B}$ векторного пространства V_3 называется оператор, обозначаемый символом $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{BA}$), определяемый равенством

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{10.5}$$

для любого вектора $\boldsymbol{x}\in V_3$.

Умножение операторов векторного пространства V_3 обладает следующими свойствами:

1) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$;
2) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$;
3) $\alpha(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\alpha\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (\alpha\boldsymbol{B})$;
4) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$;
5) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Теорема 10.9. *Произведение линейных операторов векторного пространства V_3 является линейным оператором.*

Теорема 10.10. *Матрица произведения линейных операторов векторного пространства V_3 равна произведению матриц линейных операторов, взятых в обратном порядке.*

Таким образом, если линейным операторам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответствуют матрицы A и B соответственно, то оператору $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ соответствует матрица BA.

Умножение линейных операторов векторного пространства V_3 обладает дополнительным свойством, которое в общем случае для произвольных операторов векторного пространства V_3 не выполняется:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}.$$

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ являются произвольными операторами, а $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$. Тогда

$$((\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_0;$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{x} =$$
$$= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0 = 2\boldsymbol{x}_0,$$

т.е.

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}.$$

10.5. Преобразование базисов векторного пространства. Матрица преобразования базисов

Пусть в векторном пространстве V_3 выбраны два базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$. Тогда каждый из векторов $\boldsymbol{e}_i$ базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет некоторое разложение в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ и наоборот, каждый из векторов $\boldsymbol{f}_i$ базиса $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ имеет некоторое разложение в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Пусть каждый из векторов $\boldsymbol{f}_i$ базиса $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ представлен в виде разложения по векторам базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$:

$$\boldsymbol{f}_i = s_{1i}\boldsymbol{e}_1 + s_{2i}\boldsymbol{e}_2 + s_{3i}\boldsymbol{e}_3.$$

Следовательно, базис $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = s_{11}\boldsymbol{e}_1 + s_{21}\boldsymbol{e}_2 + s_{31}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{f}_2 = s_{12}\boldsymbol{e}_1 + s_{22}\boldsymbol{e}_2 + s_{32}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{f}_3 = s_{13}\boldsymbol{e}_1 + s_{23}\boldsymbol{e}_2 + s_{33}\boldsymbol{e}_3, \end{cases} \tag{10.6}$$

что может быть записано в матричном виде

$$\boldsymbol{f}^T = S^T \cdot \boldsymbol{\beta}^T \tag{10.7}$$

(в столбцовом виде) или

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\beta} \cdot S \tag{10.8}$$

(в строчном виде), где матрица

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ или *матрицей преобразования векторов базиса* (координат векторов базиса). В матрице S i-й столбец соответствует координатам i-го базисного вектора $\boldsymbol{e}_i$, представленного в виде столбца в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$. Базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ называется «старым» базисом, базис $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ — «новым» базисом.

Теорема 10.11. *Матрица перехода от одного базиса к другому базису является невырожденной.*

Согласно этой теореме существует обратная матрица для матрицы перехода от одного базиса к другому и она представляет собой матрицу обратного перехода, т.е. формулы (10.6)–(10.8) можно обратить. Поэтому названия «старый» и «новый» базис являются условными. Они удобны при решении задач и выводов формул преобразований координат векторов при переходе от одного базиса к другому.

На переход от одного базиса к другому базису можно смотреть как на применение некоторого линейного оператора S векторного пространства V_3 к векторам этого пространства, при котором базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ переходит в базис $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$. При этом матрица S оператора преобразования $\boldsymbol{S}$ базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ в базис $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ совпадает с матрицей перехода S от базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$, т.е.

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\beta})^T = S^T \boldsymbol{\beta}^T = \boldsymbol{f}^T.$$

При этом каждый вектор $\boldsymbol{x}$ преобразуется в вектор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}$ по формуле $\boldsymbol{y}^T = S\boldsymbol{x}^T$, где все векторы рассматривают в базисе $\boldsymbol{\beta}$.

10.6. Линейный оператор в разных базисах. Матрицы линейного оператора в разных базисах

Пусть линейный оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 имеет матрицу A в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и матрицу A' в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$. Тогда для каждого вектора $\boldsymbol{x}$

$$A\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{y}^T$$

в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, где $\boldsymbol{y}$ — образ вектора $\boldsymbol{x}$ при действии линейного оператора $\boldsymbol{A}$, а векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ заданы в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Но тогда и

$$(\boldsymbol{y}')^T = A'(\boldsymbol{x}')^T$$

в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$, где $\boldsymbol{y}'$ — образ вектора $\boldsymbol{x}'$ при действии линейного оператора $\boldsymbol{A}'$, а векторы $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{y}'$ те же векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, только заданные в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$. Пусть S — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ к базису $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Тогда по формулам (10.7)

$$\boldsymbol{x}^T = S(\boldsymbol{x}')^T, \quad \boldsymbol{y}^T = S(\boldsymbol{y}')^T.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{y}^T = S(\boldsymbol{y}')^T = SA'(\boldsymbol{x}')^T, \quad \boldsymbol{y}^T = A\boldsymbol{x}^T = AS(\boldsymbol{x}')^T.$$

Отсюда $SA' = AS$, т.е.

$$A' = S^{-1}AS. \tag{10.9}$$

Матрица A' называется *подобной матрице* A, если существует неособенная матрица S (матрица подобия), связанная с матрицей A соотношением (10.9).

Следовательно, если матрицы A и B являются матрицами линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в разных базисах $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ соответственно, то матрицы A и B подобны с некоторой матрицей подобия.

Теорема 10.12. *Две различные матрицы подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора векторного пространства в разных базисах.*

10.7. Линейные подпространства векторного пространства

Подпространством (линейным подпространством) *векторного пространства* V_3 называется множество L векторов векторного пространства V_3, которые удовлетворяют условиям:

1) если $\boldsymbol{x} \in L$ и $\boldsymbol{y} \in L$, то $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \in L$;

2) если $\boldsymbol{x} \in L$ и λ — любое действительное число, то $\lambda\boldsymbol{x} \in V_3$.

Простейшими примерами подпространств являются само векторное пространство V_3, а также подпространство, состоящие из одного нулевого вектора $\mathbf{0}$.

Базис и размерность подпространства определяются так же, как эти понятия определяются для векторного пространства.

Например, множество решений однородной системы линейных уравнений с тремя неизвестными (рассматриваемое как подмножество векторного пространства V_3) образует подпространство векторного пространства V_3 размерности $3 - r$, где r — ранг системы линейных уравнений.

Пример 10.7. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Общее решение системы можно найти методом Гаусса в таблицах Гаусса (табл. 10.2).

Таблица 10.2

№ п/п	x_i	x_1	x_2	x_3	$\tilde{a}_i$
1		-1	2	-3	-2
		2	-4	6	4
		1	-2	3	2
2	x_1	1	-2	3	2

Отсюда общее решение исходной системы можно записать в векторно-столбцовом виде, задавая свободным неизвестным произвольные значения t_1 и t_2 соответственно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 & -3t_2 \\ t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2.$$

Таким образом, размерность подпространства решений исходной системы линейных уравнений равна 2 и совпадает с числом свободных неизвестных. В качестве базиса подпространства решений этой системы можно взять векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2;1;0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3;0;1)$. □

10.8. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

В п. 10.3 (примеры 10.1–10.3) матрицы линейного оператора векторного пространства имеют достаточно простой вид. Это достигнуто за счет специального выбора базисов для образов и прообразов линейного оператора векторного пространства. Две матрицы, соответствующие одному и тому же линейному оператору векторного пространства, действующему в пространстве векторов в разных базисах, подобны. Среди этих матриц простейшие матрицы имеют диагональный вид. Поэтому ставится задача нахождения матрицы оператора простейшего вида.

Подобные матрицы всегда эквивалентны. Но если для установления эквивалентности матриц достаточно проверить равенство их рангов, то при исследовании множества подобных матриц приходится привлекать другие понятия. Основными понятиями здесь являются собственные векторы и собственные значения операторов (матриц) векторных пространств. Понятие собственных значений может быть определено для произвольных операторов векторных пространств. Далее рассматриваются линейные операторы векторных пространств.

Число λ называется *собственным значением* (собственным числом) линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3, если существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in V_3$, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{10.10}$$

Любой вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющий уравнению (10.10), называется *собственным вектором* линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3, соответствующим собственному значению λ. Совокупность всех собственных значений линейного оператора векторного пространства (с учетом их кратностей) называется *спектром* (дискретным спектром) линейного оператора векторного пространства.

Множество собственных векторов линейного оператора векторного пространства, соответствующих одному и тому же собственному значению λ, становится подпространством, если к нему добавить нулевой вектор. Это подпространство называется *собственным подпространством* линейного оператора векторного пространства, соответствующим собственному значению λ.

Теорема 10.13. *Для того чтобы ненулевой вектор* $\boldsymbol{x}$ *был собственным вектором линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ *векторного пространства* V_3*, соответствующим собственному значению* λ*, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял соотношению*

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3, соответствующим собственному значению λ тогда и только тогда, когда он являлся решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x}^T = \mathbf{0}^T \tag{10.11}$$

с матрицей $A - \lambda E$, где A является матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3. Матрица $A - \lambda E$ называется *характеристической матрицей* линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3.

Число λ называется *собственным значением* (собственным числом) матрицы A, если существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, что

$$A\boldsymbol{x}^T = \lambda\boldsymbol{x}^T. \tag{10.12}$$

Любой вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, удовлетворяющий уравнению (10.12), называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим собственному значению λ. Совокупность всех собственных значений матрицы A называется *спектром* (дискретным спектром) матрицы A.

Теорема 10.14. *Для того чтобы число λ было собственным значением матрицы A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{10.13}$$

Уравнение (10.13) относительно параметра λ есть многочленное уравнение. Это уравнение называется *характеристическим уравнением* матрицы A. Его степень равна порядку матрицы A. Сам многочлен называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Пример 10.8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора проектирования $\boldsymbol{P}_{12}$ в плоскость x_1Ox_2, заданного в некотором базисе матрицей

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы P_{12} имеет вид

$$\det(P_{12} - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0.$$

Характеристическое уравнение матрицы P_{12} имеет только один действительный корень $\lambda = 0$. При этом значении λ система

(10.11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $(x_1, x_2, x_3) = (0; 0; t) = t(0; 0; 1)$, где $t \in \mathbb{R}$. При $t \neq 0$ вектор $\boldsymbol{x} = t(0; 0; 1)$ является собственным вектором линейного оператора проектирования $\boldsymbol{P}_{12}$ в плоскость x_1Ox_2. Все собственные векторы коллинеарны вектору $\boldsymbol{k}$ исходного базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Других вещественных собственных значений линейный оператор проектирования в плоскость x_1Ox_2 $\boldsymbol{P}_{12}$ не имеет. □

Пример 10.9. Найти собственные векторы оператора подобия $\boldsymbol{A}$ с коэффициентом подобия μ векторного пространства V_3, определенного соотношением $\boldsymbol{Ax} = \mu\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V_3$.

Решение. Оператор подобия является линейным оператором, ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \mu E,$$

характеристическая матрица —

$$\mu E - \lambda E = (\mu - \lambda)E,$$

характеристическое уравнение —

$$(\mu - \lambda)^3 = 0.$$

Корень характеристического уравнения матрицы подобия $\lambda = \mu$ имеет кратность, равную 3. Подстановка в формулу (10.11) дает систему

$$O \cdot \boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{0}^T,$$

верную для любого вектора $\boldsymbol{x}$. Следовательно, любой ненулевой вектор векторного пространства V_3 является собственным вектором оператора подобия $\mu\boldsymbol{E}$ при любом коэффициенте подобия μ. □

Теорема 10.15. *Собственные значения подобных матриц совпадают.*

Доказательство. Пусть $A\boldsymbol{x}^T = \lambda\boldsymbol{x}^T$ и $B = S^{-1}AS$. Тогда

$$B - \lambda E = S^{-1}AS - \lambda E = S^{-1}AS - S^{-1}\lambda ES = S^{-1}(A - \lambda E)S.$$

Отсюда,

$$\det(B - \lambda E) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) =$$

$$= \det S^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det S = \det(A - \lambda E).$$

Таким образом, спектр линейного оператора векторного пространства не зависит от базиса. Так как уравнения (10.11) и (10.12) совпадают, то спектр линейного оператора векторного пространства и спектр ее матрицы в некотором базисе равны и поиск собственных значений линейного оператора векторного пространства V_3 сводится к поиску собственных значений ее матрицы. □

Теорема 10.16. *Матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда матрица A является матрицей этого линейного оператора векторного пространства V_3 в базисе из ее собственных векторов.*

Замечание. Если элементами матрицы A являются комплексные числа, то в общем случае как коэффициенты характеристического многочлена, так и корни характеристического уравнения будут комплексными числами. Если же элементами матрицы A являются действительные числа, то хотя коэффициенты характеристического многочлена и будут действительными числами, но характеристическое уравнение может не иметь ни одного действительного корня. В этом случае говорят, что матрица не имеет собственных значений, подразумевают под этим, что она не имеет действительных собственных значений. Такое положение часто возникает тогда, когда матрица описывает оператор, действующий в вещественном (действительном) пространстве.

Характерным примером является матрица поворота на плоскости вокруг начала координат. Однако, если рассматривать элементы матрицы как комплексные числа, то она всегда будет иметь собственные значения, вообще говоря, комплексные.

Пример 10.10. Показать, что оператор $\boldsymbol{O}_\varphi$ поворота на угол φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ на плоскости x_1Ox_2 является линейным и найти собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Решение. Пусть оператор $\boldsymbol{O}_\varphi$ поворота на угол φ на плоскости x_1Ox_2 имеет матрицу A в базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ и матрицу A' в базисе $\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$. Из рис. 10.2 следует, что оператор $\boldsymbol{O}_\varphi$ поворота на угол φ на плоскости x_1Ox_2 является линейным.

Тогда для базисного вектора $\boldsymbol{i}$ образ оператора $\boldsymbol{O}_\varphi$ поворота на угол φ (рис. 10.3)

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{O}_\varphi(\boldsymbol{i}) = \cos\varphi \cdot \boldsymbol{i} + \sin\varphi \cdot \boldsymbol{j},$$

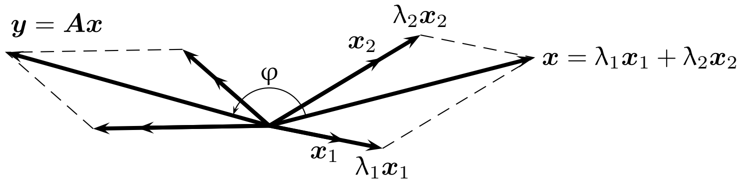


Рис. 10.2

а для базисного вектора $\boldsymbol{j}$ образ оператора $\boldsymbol{O}_\varphi$ поворота на угол φ

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{O}_\varphi(\boldsymbol{j}) = -\sin\varphi \cdot \boldsymbol{i} + \cos\varphi \cdot \boldsymbol{j}.$$

Следовательно, матрица линейного оператора $\boldsymbol{O}_\varphi$ поворота на угол φ имеет вид

$$\boldsymbol{O}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

в любом из этих базисов.

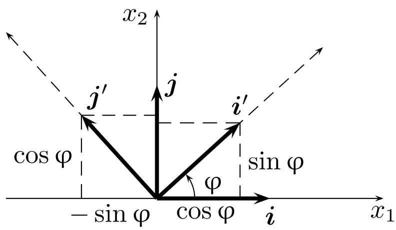


Рис. 10.3

Характеристическое уравнение матрицы O_φ оператора $\boldsymbol{O}_\varphi$ поворота на угол φ на плоскости x_1Ox_2 имеет вид

$$\det(O_\varphi - \lambda E) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0.$$

Характеристическое уравнение матрицы O_φ имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi.$$

Таким образом, в общем случае, оператор поворота не имеет собственных значений и соответственно — собственных векторов. Только при φ равным 0, π или 2π, что соответствует тождественному оператору и оператору отражения относительно координатной оси Ox_2, оператор поворота имеет собственные векторы.

Из примера 10.9 вытекает, что любой ненулевой вектор векторного пространства V_2 является собственным вектором операторов $\boldsymbol{O}_0$, $\boldsymbol{O}_\pi$ и $\boldsymbol{O}_{2\pi}$.

Таким образом, данный оператор не имеет действительных собственных значений и собственных векторов при $0 < \varphi < \pi$ и $\pi < \varphi < 2\pi$; любой ненулевой вектор векторного пространства V_3 при $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ и $\varphi = 2\pi$. □

10.9. Обратимые операторы векторных пространств. Обратные операторы

Оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 называется *обратимым оператором* векторного пространства V_3, если существует такой оператор, называемый *оператором, обратным оператору* $\boldsymbol{A}$, который обозначается символом $\boldsymbol{A}^{-1}$, удовлетворяющий соотношению

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}.$$

Теорема 10.17. *Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 обратим тогда и только тогда, когда его матрица является невырожденной.*

Теорема 10.18. *Оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$, обратный линейному оператору $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3, является обратимым линейным оператором векторного пространства V_3.*

Теорема 10.19. *Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 обратим тогда и только тогда, когда любой базис $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ векторного пространства V_3 преобразуются в базис $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3)$ этого же пространства.*

Теорема 10.20. *Матрица A обратимого линейного оператора $\boldsymbol{A}$ векторного пространства V_3 является невырожденной и матрица обратного оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ совпадает с обратной матрицей A^{-1} для матрицы A линейного оператора $\boldsymbol{A}$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{A}$ — обратимый оператор в векторном пространстве V_3 и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ — его обратный оператор. И пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в выбранном базисе $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, где $\boldsymbol{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0; 0; 1)$. Согласно формулам преобразования координат векторов (10.4) координаты векторов базиса $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ преобразуются в соответствующие вектора $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2 =$

$= \boldsymbol{e}_2$, $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$. Например,

$$(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1 = (AB\boldsymbol{e}_1^T)^T \boldsymbol{\beta}^T =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T \boldsymbol{\beta}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1.$$

Отсюда, по теоремам 10.18 и 10.17, система

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1, \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0, \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0 \end{cases}$$

относительно (b_{11}, b_{21}, b_{31}) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера, так как определитель этой системы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix},$$

где A_{1j} — алгебраическое дополнение элемента a_{1j} матрицы A. Аналогично,

$$\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\hat{A} = A^{-1}.$$

□

Теорема 10.21. *Если линейный оператор* $\boldsymbol{A}$ *векторного пространства* V_3 *обратим и его собственные значения есть числа* λ_1, λ_2, ..., λ_p, *то собственными значениями обратного оператора* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *для оператора* $\boldsymbol{A}$ *являются числа* λ_1^{-1}, λ_2^{-1}, ..., λ_p^{-1}, *а собственные векторы исходного и обратного к нему оператора совпадают.*

Пример 10.11. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$, обратного к линейному оператору $\boldsymbol{A}$, заданному в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как $\det A \neq 0$, то для линейного оператора $\boldsymbol{A}$ существует обратный линейный оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0.$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет только один действительный корень $\lambda = 1$. При этом значении λ система (10.11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2x_2 = 0, \\ -x_1 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $(x_1, x_2, x_3) = (0; 0; t) = t(0; 0; 1)$, где $t \in \mathbb{R}$. При $t \neq 0$ вектор $\boldsymbol{x} = t(0; 0; 1)$ является собственным вектором линейного оператора $\boldsymbol{A}$ и обратного к нему линейного оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$. Число $\mu = \lambda^{-1} = 1^{-1} = 1$ является собственным значением оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$. $\square$

Упражнения

10.1. Выяснить, является ли линейным оператором f, переводящий всякий вектор $\boldsymbol{x}(x_1; x_2; x_3)$ в вектор $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\boldsymbol{x}$:

а) $\boldsymbol{y}(2x_1 - x_2; x_3 - x_2; x_1)$; б) $\boldsymbol{y}(x_1; x_2 + 2; x_3)$;

в) $\boldsymbol{y}(x_2 + x_3; 2x_1 + x_2; 3x_1 - x_2)$; г) $\boldsymbol{y}(x_1^2; x_2^2; x_3^2)$.

10.2. Выяснить, является ли оператором отображение φ, переводящее всякий вектор $\boldsymbol{x}(x_1; x_2; x_3)$ трехмерного линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в вектор $(2x_1 - x_2 + 2x_3; x_1 + 2x_3; -x_1 + x_2)$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\boldsymbol{x}$. Найти базис ядра, ранг и дефект линейного оператора.

10.3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего любой вектор $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\boldsymbol{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\boldsymbol{x}$:

а) $\boldsymbol{y}(2x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 - x_3, x_2)$;

б) $\boldsymbol{y}(x_2 + 5x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2)$;

в) $\boldsymbol{y}(2x_3, x_1, x_2)$.

10.4. Пусть φ и ψ — линейные операторы пространства V_3, заданные матрицами
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\psi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
соответственно в базисах $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$. Найти матрицы преобразований $\varphi + \psi$ и $\varphi \cdot \psi$ в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, если $\boldsymbol{a}_1 = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0; 0; 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1; 1; 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0; 1; 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1; 0; 1)$.

10.5. Показать, что системы векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ образуют базис и найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ в векторы $\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}_1 = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}_1 = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

10.6. Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ заданы линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Найти линейный оператор, переводящий векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ соответственно в $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, если $\boldsymbol{a}_1 = (2; 3; 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0; 1; 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1; 1; 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1; 1; -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2; 1; 2)$.

10.7. Найти линейное преобразование, переводящее векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2; 0; 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4; 1; 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3; 1; 2)$ соответственно в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (1; 2; -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4; 5; -2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1; -1; 1)$.

10.8. Линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (1; 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1; 1)$ имеет матрицу
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$
Найти матрицу этого преобразования в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (1; -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3; -1)$.

10.9. Дана матрица
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
линейного оператора φ в естественном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$ и базис $\boldsymbol{a}_1 = (3; 1; 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; 1; 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1; 2; 5)$ координатами в естественном базисе этого же

пространства. Найти матрицу линейного оператора φ в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2$.

10.10. Найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10.11. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора φ, заданного в естественном базисе трехмерного линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные векторы обратного оператора φ^{-1} для линейного оператора φ.

Примеры тестовых заданий

10.1. Множество всех собственных значений называется...

1) рангом; 2) спектром; 3) следом; 4) порядком.

10.2. Если $(A - \lambda E)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$, то для линейного оператора с матрицей A вектор $\boldsymbol{h}$ является...

1) направляющим; 2) собственным;

3) ортогональным; 4) базисным.

10.3. Собственные векторы линейного оператора, соответствующие различным собственным значениям, непременно являются...

1) базисом в пространстве, где действует оператор;

2) попарно ортогональными;

3) линейно зависимыми;

4) линейно независимыми.

10.4. Значение a, при котором $\boldsymbol{h}_1 = (1; 0)$ и $\boldsymbol{h}_2 = (1; a)$ являются базисом из собственных векторов линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, равно...

1) -3; 2) 3; 3) -1; 4) 0.

10.5. Найти собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. В качестве ответа выбрать их сумму.

1) -4; 2) -2; 3) 2; 4) -3.

10.6. Базис из собственных векторов линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, составляют...

1) $\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 2) $\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10.7. Собственными значениями линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

являются...

1) 1, 2, 3, 7; 2) -7, 2, 3, 7; 3) -3, 2, 3, 7; 4) -2, 2, 3, 7.

Список литературы

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. — СПб.: Лань, 2015. — 312 с.
2. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. — М.: Физматлит, 2013. — 991 с.
3. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. — М.: Книга по требованию, 2013. — 392 с.
4. *Гусак А.А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2013. — 288 с.
5. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М.: Высш. шк., 2013. — 415 с.
6. *Ильина И.И.* Высшая математика: тесты / И. И. Ильина, Е. В. Володина. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2011. — 96 с.
7. Интернет-тестирование по математике: учеб. пособие / сост. В. Г. Агаков, П. С. Атаманов, А. Н. Быкова и др. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2015. — 314 с.
8. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие / Д. В. Клетеник. — СПб.: Лань, 2014. — 224 с.
9. *Кострикин А.И.* Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин. — СПб.: Лань, 2012. — 304 с.
10. *Краснов М.Л.* Вся высшая математика: учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 1. — М.: Эдиториал УРСС, 2012. — 336 с.
11. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. — М.: Наука, 2012. — 336 с.

12. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс: учеб. пособие для студентов вузов / Д. Т. Письменный. — 12-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2014. — 608 с.
13. Сборник задач по математике для втузов: в 4-х ч. / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: Изд. дом «Альянс», 2010. — 288 с.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики / В. И. Смирнов. — М.: Наука, 2012. — 616 с.
15. *Шипачев В. С.* Основы высшей математики / В. С. Шипачев. — М.: Высш. шк., 2012. — 480 с.
16. http://www.i-exam.ru — сайт для проведения интернет-экзаменов.

Ответы к упражнениям

1.1. а) $4-2i$; б) $-1+3i$; в) 0; г) $(\sqrt{5}+2)+i(\sqrt{5}-2)$; д) $\frac{\sqrt{3}}{7}+i\frac{5}{7}$; е) $0{,}6+0{,}2i$. **1.2.** а) $\frac{44-5i}{318}$; б) $-\frac{1}{2}+\frac{4+\sqrt{3}}{2}i$; в) $2+i$. **1.3.** а) 1; б) -1; в) i; г) $-i$. **1.4.** а) $\rho=5$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) $\rho=4$, $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; в) $\rho=5\sqrt{2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}-\pi$; г) $\rho=1$, $\varphi=\frac{4}{5}\pi$; д) $\rho=5$, $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; е) $\rho=1$, $\varphi=2\pi-\alpha$. **1.5.** а) $\cos 0+i\sin 0$; б) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; в) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; д) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; е) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. **1.6.** а) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right)$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right)$; в) $2^{12}(1+i)$; г) -2^6; д) $2^{24}(\sqrt{3}-i)$. **1.7.** а) $\left(-\frac{4}{11};\frac{5}{11}\right)$; б) $(4;2)$; в) $(1;3)$, $(-1;-3)$. **1.8.** а) $\pm(3+i)$; б) $\pm(2-i)$; в) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{66})$. **1.9.** а) $z_1=3-i$, $z_2=-1+2i$; б) $z_1=2+i$, $z_2=1-3i$; в) $z_1=1-i$, $z_2=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$. **1.10.** а) $-i$, $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$; б) $-1+i$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$; в) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$; г) 1, -1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$. **1.11.** а) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$, где $k=\overline{0,5}$; б) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right)$, где $k=\overline{0,7}$; в) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi+i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$, где $k=\overline{0,5}$. **1.12.** а) $\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k=\overline{0,2}$; б) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{4k+1}{6}\pi+i\sin\frac{4k+1}{6}\pi\right)$, $k=\overline{0,2}$; в) $\sqrt[10]{8}\left(\cos\frac{8k+3}{20}\pi+i\sin\frac{8k+3}{20}\pi\right)$, $k=\overline{0,4}$; г) $\sqrt{2}\,(\cos\frac{2k+1}{6}\pi+i\sin\frac{2k+1}{6}\pi)$, $k=\overline{0,5}$. **1.13.** а) нижняя полуплоскость относительно прямой $y=-1$; б) полоса между прямыми $x=-1$ и $x=5$; в) угол между прямыми

$y = -x$ и $y = x/\sqrt{3}$; г) кольцо между окружностями радиусов 2 и 4; д) внутренность эллипса $\frac{(x-2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{4} = 1$; е) правая полуплоскость, включая и ось Oy; ж) область, заключенная между окружностями $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ и $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$; з) внешность параболы $y = \frac{x^2}{2} - 2$. **1.14.** а) $\left(\frac{6}{17} - i\frac{7}{17}; -\frac{5}{17} + i\frac{3}{17}\right)$; б) $(1; i)$. **1.15.** а) $z_{1,2} = 3i$, $z_{3,4} = -3i$; б) $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = -\sqrt[3]{3}$, $z_{5,6} = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)$..

2.1. $\begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **2.2.** а) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -10 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. **2.3.** а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 10 & 8 \\ -1 & 3 & -6 & 18 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

2.4. а) $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 14 & 10 \\ -21 & -15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 21 & -28 \\ 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. **2.5.** а) $\begin{pmatrix} -1 & 21 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 6 & -18 & 21 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{pmatrix}$; в) (-18); г) $\begin{pmatrix} 29 & 4 & 27 \\ 17 & 14 & 19 \\ 14 & -5 & 11 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$.

2.6. а) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & 25 & 25 & 12 \\ -9 & -29 & -24 & -11 \\ 3 & 7 & 7 & 4 \\ -5 & -24 & -7 & -11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$.

2.7. а) $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 6 & 17 & 4 \\ -1 & 11 & 13 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -15 & 14 & 4 \\ 12 & 7 & 8 \\ -2 & 22 & -1 \end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -20 \end{pmatrix}$. **2.9.** а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.10.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.11.** $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -19 & 20 \\ 47 & 9 & 26 & -72 \\ 44 & 16 & -42 & 23 \\ -44 & -1 & -129 & 211 \end{pmatrix}$. **2.12.** а) 60; б) 1; в) -202; г) 0; д) -2; е) -96. **2.13.** а) 102; б) 0; в) 1. **2.14.** а) -3600; б) 0; в) 0. **2.15.** а) $3a - b + 2c + d$; б) -3.

2.16. а) $2a-8b+c+5d$; б) 18. **2.17.** а) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) не существует; в) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix} -7 & 7 & -7 \\ -18 & -27 & 9 \\ -5 & -4 & 13 \end{pmatrix}$. **2.18.** а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ -4 & 3/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$. **2.19.** а) $\begin{pmatrix} 1/33 & 5/33 \\ 2/11 & -1/11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4/27 & 7/27 & 1/27 \\ 1/27 & -5/27 & 7/27 \\ 11/27 & -1/27 & -4/27 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/18 & 1/9 & 1/6 & 1/9 \\ 1/9 & -1/18 & 1/9 & -1/6 \\ 1/6 & -1/9 & -1/18 & 1/9 \\ -1/9 & -1/6 & 1/9 & 1/18 \end{pmatrix}$. **2.20.** а) $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 25 & -25 \\ -26 & -2 \end{pmatrix}$. **2.21.** $X=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{pmatrix}$. **2.22.** а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.23. а) 2; б) 2; в) 2; г) 3; д) 2. **2.24.** а) 1; б) 3; в) 2; г) 2; д) 4. **3.1.** а) $(2;-5)$; б) $(3;-1)$; в) $(1;2;-2)$; г) $(3;1;1)$; д) $(1;2;1;-1)$; е) $(1;3;4;2)$. **3.2.** а) $(1;2;-2)$; б) $(3;4;5)$; в) $(1;2;-1;-2)$; г) $(1;2;1;-1)$; д) $(0;0;0;0)$; е) $(0;2;-2;0;3)$; ж) $(2;0;-2;-2;1)$. **3.3.** а) $\left(\frac{4}{7};-\frac{11}{14};\frac{3}{2}\right)$; б) несовместна; в) несовместна; г) $(1;2;-2)$; д) $\left(0;2;\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **3.4.** а) $\left(-\frac{11}{7}a;-\frac{1}{7}a;a\right)$; б) $(-8;3+a;6+2a;a)$; в) $(a;b;-a+2b;1)$; г) $\left(a;-\frac{7}{11}+\frac{2}{3}a-\frac{1}{33}b;b;\frac{8}{11}-\frac{8}{11}b;1\right)$; д) $(-16+a+b+5c;23-2a-2b-6c;a;b;c)$; е) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}c;\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{5}{6}c;a;b;c\right)$. **3.5.** а) совместна; б) совместна; в) несовместна; г) совместна; д) несовместна. **3.6.** а) $(t;-2t;t)$; б) $(0;0;0)$; в) $(\frac{1}{2}t;t;0)$; г) $(t;-\frac{1}{4}t;0;\frac{3}{4}t)$; д) $(0;t_1;t_2;\frac{-t_1+4t_2}{3})$; е) $(t_1;t_2;\frac{t_1-5t_2}{3};-\frac{4}{3}(t_1+t_2))$; ж) $(-5t_1-4t_2;t_1;11t_1+9t_2;t_2;0)$; з) $(t_1;t_2;t_3;t_1+2t_2-t_3;-t_1+t_2+t_3;-t_1+3t_2+2t_3)$. **4.1.** $\overline{BC}=\boldsymbol{q}$, $\overline{CB}=-\boldsymbol{q}$, $\overline{CD}=-\boldsymbol{p}$, $\overline{AC}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overline{BD}=-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overline{DB}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, $\overline{AO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$, $\overline{CO}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$, $\overline{BO}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$.

4.2. $\overline{AK} = \boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{q}$, $\overline{BL} = \boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}$, $\overline{CM} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}$. **4.4.** $\overline{AB} = \frac{2}{3}\boldsymbol{p} - \frac{2}{3}\boldsymbol{q}$, $\overline{BC} = \frac{2}{3}\boldsymbol{p} + \frac{4}{3}\boldsymbol{q}$, $\overline{CA} = -\frac{4}{3}\boldsymbol{p} - \frac{2}{3}\boldsymbol{q}$. **4.5.** $\overline{MA} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, $\overline{MB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$, $\overline{MC} = -\overline{MA}$, $\overline{MD} = -\overline{MB}$. **4.6.** $\overline{AN} = \alpha\beta\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b}$, $\overline{BN} = (\alpha\beta - 1)\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b}$. **4.7.** $\overline{CD} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$, $\overline{DE} = -\boldsymbol{p}$, $\overline{EF} = -\boldsymbol{q}$, $\overline{FA} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, $\overline{AD} = 2\boldsymbol{q}$, $\overline{AE} = 2\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$. **4.9.** $\boldsymbol{s} = \frac{2}{5}\boldsymbol{p} + \frac{3}{5}\boldsymbol{q} + \frac{3}{5}\boldsymbol{r}$. **4.10.** $3\boldsymbol{p} - 4\boldsymbol{q} - 3\boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{s} = 0$. **4.11.** 0. **5.1.** а) $(2;-3)$; б) $(-3;-2)$; в) $(-1;1)$. **5.2.** а) $(1;2)$; б) $(3;-1)$; в) $(-2;-2)$. **5.3.** а) $(-3;-3)$; б) $(-2;4)$; в) $(2;-1)$. **5.4.** $C(3;5\pi/9)$, $D(5;-11\pi/14)$. **5.5.** 137 кв. ед. **5.6.** $M_1(6;0)$, $M_2(-2;0)$. **5.7.** $(5/2;-2)$. **5.8.** $A(3;-1)$, $B(0;8)$. **5.9.** а) 7; б) 13; в) 5. **5.12.** $(5;0;0)$ и $(-11;0;0)$. **5.13.** 7. **5.14.** $C(6;1;19)$ и $D(9;-5;12)$. **5.15.** $C(1;5;2)$, $D(3;2;1)$, $E(5;-1;0)$, $F(7;-4;1)$. **5.16.** $\frac{2}{3}\sqrt{74}$. **5.17.** 7. **5.18.** $\overline{AB} = (-4;3;-1)$, $\overline{BA} = (4;-3;1)$. **5.19.** $\cos\alpha = 12/25$, $\cos\beta = -3/5$, $\cos\gamma = -16/25$. **5.20.** 22. **5.21.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$. **5.22.** $\boldsymbol{a}_0 = (6/7;-2/7;-3/7)$. **5.23.** $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 6$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = 14$. **5.24.** $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$. **5.25.** а) 22; б) -200; в) 129; г) 41; д) $\sqrt{105}$; е) $\frac{11}{3}$; ж) $-\frac{84}{\sqrt{189}}$; з) $\frac{11}{21}$; и) $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$. **5.26.** $m = -6$. **5.27.** 13. **5.28.** а) -6; б) 16; в) -61; г) 37; д) 73. **5.29.** $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **5.30.** а) 716; б) -721; в) -353. **5.31.** 45°. **5.32.** $\boldsymbol{x} = (-3;3;3)$. **5.33.** 31. **5.34.** $-6\frac{5}{7}$. **5.35.** $\frac{15}{7\sqrt{85}}$. **5.37.** а) $\sqrt{3}$; б) $10\sqrt{3}$. **5.38.** 16. **5.39.** ± 30. **5.40.** а) 24; б) 60. **5.41.** а) $(5;1;7)$; б) $(10;2;14)$; в) $(20;4;28)$. **5.42.** $\frac{5\sqrt{17}}{21}$. **5.43.** а) $(6;-4;-6)$; б) $(-12;8;12)$. **5.44.** 14. **5.45.** 5. **5.46.** $-4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. **5.47.** $18\sqrt{2}$. **5.48.** а) 4; б) 25; в) -7. **5.49.** а) компланарны; б) не компланарны; в) компланарны. **5.51.** $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$. **5.52.** ± 27. **5.53.** 6. **5.54.** 11. **5.55.** $V = 14$, $S = 6\sqrt{3}$, $h = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. **6.1.** а) $3x - y - 1 = 0$; б) $y + 2x = 0$; в) $15x - 5y + 32 = 0$; г) $\sqrt{3}\,y - x = 0$; д) $x - \sqrt{3}\,y - 3\sqrt{3} = 0$; е) $y = -x - 1$.

6.2. а) $45°$; б) $90°$; в) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **6.3.** а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$; б) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$; в) $x = 5 - t$, $y = -3 + 2t$; г) $3x - 4y + 29 = 0$; д) $y - 5 = 0$; е) $x + 1 = 0$; ж) $x - 3y - 16 = 0$. **6.4.** а) $x - 2y + 11 = 0$; б) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3}$; в) $x = -3$; г) $y = 4$; д) $x = -3 + t$, $y = 4 - 7t$. **6.5.** а) $2x + y + 2 = 0$; б) $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-4}{2}$; в) $y = 4$; г) $x = -3$; д) $x = -3 + 7t$, $y = 4 + t$. **6.6.** а) $y = \frac{2}{3}x - 6$; б) $x = 12 + 13t$, $y = 2 + 2t$; в) $\frac{x-12}{3} = \frac{y-2}{2}$; г) $\frac{x}{9} + \frac{y}{-6} = 1$. **6.7.** а) $x = 1 - 3t$, $y = -2 + 5t$; б) $x = t$, $y = \frac{2}{3}$; в) $x = -2 + 2t$, $y = t$. **6.8.** а) принадлежат; б) не принадлежат. **6.9.** 54. **6.10.** $(5; 0)$; $x = 5 + t$, $y = t$. **6.11.** $2x + y - 3 = 0$, $5x + 4y - 10 = 0$, $7x + 5y - 13 = 0$, $(\frac{2}{3}; \frac{5}{3})$. **6.12.** $x - y - 7 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$. **6.13.** $7x - 7y + 4 = 0$, $x + 3y + 18 = 0$, $4x - 2y - 7 = 0$. **6.14.** $2x - y - 1 = 0$. **6.15.** $43x + 2y - 67 = 0$. **6.16.** $x - 2y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$. **6.17.** $3x + 4y - 11 = 0$, $9x + 10y - 27 = 0$. **6.18.** $3x - 4y - 25 = 0$. **6.19.** $x - 1 = 0$, $2x - 3y + 8 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$. **6.20.** а) $(\frac{15}{2}; -1)$; б) $(9; 3)$. **6.21.** а) $7x - y + 3 = 0$; б) $x + 7y + 4 = 0$; в) $3x - 4y + 12 = 0$. **6.22.** $6x - 4y + 5 = 0$. **6.23.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **6.24.** $x + y - 2 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $x - y - 8 = 0$, $x - y + 4 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$. **6.25.** а) $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$; б) $4x - y + 9 = 0$, $x - 4y + 21 = 0$. **6.26.** $3x + y - 32 = 0$, $3x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 14 = 0$, $x - 3y + 16 = 0$, $2x - y - 8 = 0$. **6.27.** $x - 2y + 3 = 0$. **6.28.** $\operatorname{tg} A = \frac{5}{3}$, $\operatorname{tg} B = -\frac{14}{5}$, $\operatorname{tg} C = \frac{1}{5}$. **6.29.** $y = -2x + 7$, $y = \frac{1}{2}x - 3$. **6.30.** а) 5; б) $\sqrt{10}$. **6.31.** а) 2; б) $\frac{3\sqrt{13}}{26}$; в) $\frac{14\sqrt{5}}{5}$. **6.32.** 5. **6.33.** $(3; 11)$. **6.34.** $3x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 14 = 0$, $x - 3y + 16 = 0$, $3x + y - 32 = 0$. **6.35.** $7x + 56y - 40 = 0$. **7.1.** а) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; б) $(x + 2)^2 + y^2 = 25$; в) $(x - \frac{8}{3})^2 + y^2 = \frac{85}{9}$; г) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$; д) $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$. **7.2.** $5x - 12y + 29 = 0$, $5x - 12y - 23 = 0$. **7.3.** а) 5 и 3; $(4; 0)$ и $(-4; 0)$; $\frac{4}{5}$; $x = \pm\frac{25}{4}$; б) 1 и $\frac{1}{2}$; $(0; \frac{\sqrt{3}}{2})$ и

$(0; -\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **7.4.** а) пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек. **7.5.** M_1 — внешняя, M_2 принадлежит эллипсу, M_3 — внутренняя. **7.6.** а) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$; г) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25}$; д) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$; е) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. **7.7.** а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **7.8.** а) $\frac{3\sqrt{2}\pm 1}{\sqrt{34}}$; б) $\sqrt{3}$. **7.9.** а) $12x \pm \sqrt{174}\,y - 12 = 0$; б) $x + 2y \pm 3\sqrt{14} = 0$. **7.10.** $4x + 9y - 13 = 0$. **7.11.** $\left(\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}; \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **7.12.** 4 и 3; $\frac{5}{4}$; $(5; 0)$ и $(-5; 0)$; $x = \pm\frac{16}{5}$; $3x \pm 4y = 0$. **7.13.** а) принадлежит гиперболе; б) внутри (правее) правой ветви; в) между двумя ветвями; г) внутри (левее) левой ветви. **7.14.** а) $\left(\pm\frac{4\sqrt{34}}{5}; \pm 1{,}8\right)$; б) $\left(\frac{48}{5}; \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}\right)$. **7.15.** $4x - 3y \pm 16 = 0$. **7.16.** а) 90°; б) 90°. **7.17.** а) $\sqrt{2}$; б) 2; в) $\sqrt{10}$ или $\frac{\sqrt{10}}{3}$; г) $\sqrt{3}$. **7.18.** а) $y^2 = 5x$; б) $y^2 = 24x$; в) $y^2 = 9x$. **7.19.** $\frac{1}{5}$. **7.20.** а) $x + y + 3 = 0$ в точке $(3; -6)$ и $x - y + 3 = 0$ в точке $(3; 6)$; б) $y = 3x + 1$. **7.21.** а) $(\frac{3}{2}; 0)$, $x = -\frac{3}{2}$; б) $(-\frac{3}{4}; 0)$, $x = \frac{3}{4}$. **7.22.** а) $(\frac{15}{2}; \pm 5\sqrt{3})$; б) $(\frac{5}{4}; \pm\frac{5}{\sqrt{2}})$. **8.1.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$. **8.2.** $x - y - 3z + 2 = 0$. **8.3.** $2x - y + z - 2 = 0$. **8.4.** $x + 4y + 7z + 16 = 0$. **8.5.** $9x - y + 7z - 40 = 0$. **8.6.** $3x + 3y + z - 8 = 0$. **8.7.** а) $\pi/4$; б) $\pi/3$; в) $\arccos\frac{8}{21}$. **8.8.** $7x - y - 5z = 0$. **8.9.** $4x - y - 2z - 9 = 0$. **8.10.** 4. **8.11.** 3,5. **8.12.** $(0; 7; 0)$, $(0; -5; 0)$. **8.13.** а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; в) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; г) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$; д) $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{10}$; е) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1/2}$. **8.14.** а) $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$; б) $x = 2t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = -3$; в) $x = 3t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 5t - 3$. **8.15.** а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; б) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$. **8.16.** а) $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$; б) $x = t + 3$, $y = -t - 1$, $z = t$. **8.17.** а) $x = t + 1$, $y = -7t$, $z = -19t - 2$; б) $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 5t - 1$. **8.18.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{1}$. **8.19.** $x = 2t - 5$,

$y = -3t+1$, $z = -4t$. **8.20.** а) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{-2}$; б) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+1}{-3}$. **8.23.** 60°. **8.24.** $\cos\varphi = \frac{11}{26}$. **8.25.** а) $(2;3;-6)$; б) $(7;1;0)$. **8.26.** а) $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$; б) $\sin\varphi = \frac{5}{6}$. **8.29.** $2x-3y+4z-1=0$. **8.30.** $x+2y+3z=0$. **8.31.** $x-2y+z+5=0$. **8.32.** $x+y-z+3=0$. **8.33.** $8x-5y+z-11=0$. **8.34.** $x+2y-2z-1=0$. **8.35.** $2x+15y-4x+57=0$. **8.36.** $\sqrt{17}$. **8.37.** а) $\sqrt{\frac{35}{6}}$; б) $8\sqrt{\frac{3}{26}}$. **8.38.** а) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{3\sqrt{35}}{7}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.39.** а) $\frac{18}{\sqrt{110}}$; б) $\frac{16}{\sqrt{102}}$; в) 3. **8.40.** $(1;4;-7)$. **8.41.** $Q(-5;1;0)$. **8.42.** $Q(4;1;-3)$. **8.43.** $Q(2;-3;2)$. **8.44.** $(3;-2;4)$. **8.45.** $\frac{x+9}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1}$. **8.46.** $\begin{cases} 4x-3y+z-3=0, \\ 2x+3y+z-6=0 \end{cases}$. **8.47.** $7x-y+1=0$, $z=0$; $5x-z-1=0$; $y=0$; $5y-7z-12=0$, $x=0$. **9.1.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 4^2$. **9.2.** $(1;-2;2)$, $R=3$. **9.3.** а) эллипсоид; б) однополостный гиперболоид; в) двуполостный гиперболоид; г) конус; д) эллиптический параболоид; е) параболический цилиндр; ж) эллиптический цилиндр; з) гиперболический параболоид. **9.4.** 3, $\sqrt{3}$; $(2;3;0)$, $(2;-3;0)$, $(2;0;\sqrt{3})$, $(2;0;-\sqrt{3})$. **9.5.** 4, 3; $(4;0;-1)$, $(-4;0;-1)$. **9.6.** 15; $(0;-6;-3/2)$. **9.7.** на плоскость Oxy: $\begin{cases} x^2+4xy+5y^2-x=0, \\ z=0; \end{cases}$ на плоскость Oxz: $\begin{cases} x^2-2xz+5z^2-4x=0, \\ y=0; \end{cases}$ на плоскость Oyz: $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0, \\ x-2y+2=0 \end{cases}$. **9.9.** а) $1 < |m| < \sqrt{2}$; б) $|m| < 1$. **9.10.** а) $(3;4;-2)$ и $(6;-2;2)$; б) $(4;-3;2)$ — прямая касается поверхности; в) прямая и поверхность не имеют общих точек; г) прямая лежит на поверхности. **9.12.** а) $\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{h^2}$; б) $9(x^2+z^2) = 16y^2$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 0$; г) $x^2+y^2-z^2=0$. **9.13.** $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$. **9.14.** а) окружность x^2+

$+ y^2 = (a/\sqrt{2})^2$; б) отрезки $z = \pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2} \leqslant x \leqslant$ $\leqslant a/\sqrt{2}$; в) отрезки $z = \pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2} \leqslant y \leqslant a/\sqrt{2}$. **10.1.** а) да; б) нет; в) да; г) нет. **10.2.** Отображение φ является линейным оператором; базис ядра оператора φ состоит из одного вектора $\boldsymbol{a}(-2;-2;1)$; ранг оператора φ равен 2; дефект оператора φ равен 1. **10.3.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **10.4.** $A_{\varphi+\psi} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{\varphi\cdot\psi} = \begin{pmatrix} 3 & 17 & -6 \\ 1 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **10.5.** $\begin{pmatrix} 3/2 & 19/10 & -3/10 \\ 1/2 & -3/10 & 1/10 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$. **10.6.** $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **10.7.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$. **10.8.** $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **10.9.** $\begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}$. **10.10.** а) $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{x}_1 = c(1;-1)$, $\lambda_2 = 3$, $\boldsymbol{x}_2 = c(1;1)$; б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{x} = c_1(-2;1;0) + c_2(1;0;1)$; г) $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{x} = c(1;1;1;-1)$; в) $\lambda_1 = 7$, $\boldsymbol{x}_1 = c(1;1)$, $\lambda_2 = -2$, $\boldsymbol{x}_2 = c(4;-5)$; д) $\lambda_1 = 0$, $\boldsymbol{x}_1 = c(3;-1;2)$, $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{14}$, $\boldsymbol{x}_{2,3} = c(3 \pm i \cdot 2\sqrt{14}; 13; 2 \mp i \cdot 3\sqrt{14})$; е) $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{x}_1 = c_1(1;0;1) + c_2(0;1;0)$, $\lambda_2 = -1$, $\boldsymbol{x}_2 = c(1;0;-1)$. **10.11.** Собственные значения φ: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$; собственные векторы оператора φ: $\boldsymbol{x}_1 = c_1(6;-7;5)$, $\boldsymbol{x}_2 = c_2(-2;1;1)$, $\boldsymbol{x}_3 = c_3(0;1;1)$; собственные значения обратного оператора φ^{-1}: $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_3 = 1$; собственные векторы обратного оператора φ^{-1}: $\boldsymbol{x}_1 = c(6;-7;5)$, $\boldsymbol{x}_2 = c(0;1;1)$, $\boldsymbol{x}_3 = c(-2;1;1)$.

Оглавление

Учебное издание

Авторы-составители:
Володина Евгения Валерьевна
Ильина Ирина Игоревна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор А. Н. Антонова
Компьютерный набор и верстка В. Г. Сытина

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 26.06.18. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Гарнитура Журнальная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 13,48. Уч.-изд. л. 13,27. Тираж 200 экз. Заказ № 780.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15