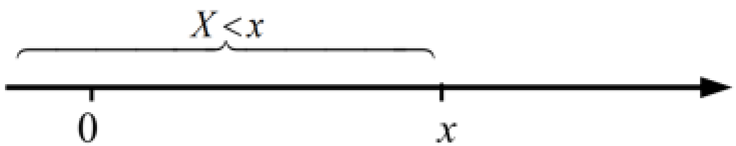
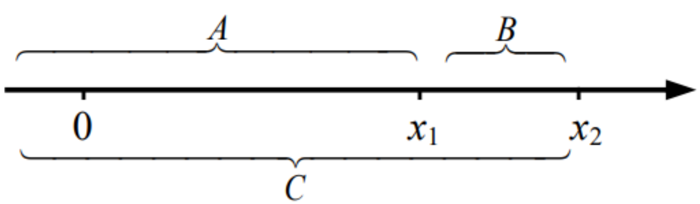
Случайные величины

Случайной величиной называется функция $X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий $\Omega,\ \omega \subseteq \Omega$. Функция $X(\omega)$ должна быть такой, что множество тех ω, для которых $X(\omega) < x$, при любых x являлось подмножеством пространства Ω.

Функцией распределения случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x, т.е. $F(x) = P\{X < x\}$.





$$F(x) = P\{X < x\}$$

Свойства функции распределения

1. Функция распределения принимает значения из промежутка $[0,1]$: $0 \le F(x) \le 1$.
2. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[x_1, x_2)$, равна

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

3. Функция распределения – неубывающая функция, т.е.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{, если } x_2 \ge x_1 .$$

4. $F(x) \to 1$ при $x \to \infty$ и $F(x) \to 0$ при $x \to -\infty$.
5. Функция распределения непрерывна слева

$$\lim_{\varepsilon \to +0} F(x - \varepsilon) = F(x)$$

Дискретные случайные величины

Дискретной называется случайная величина, возможные значения которой образуют или конечное множество, или счётное (бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать).

X	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями x_1 , x_2 ,…, x_3 этой случайной величины и соответствующими им вероятностями p_1 , p_2 , …, p_n .

$$P\{X = x_k\} = p_k > 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P\{X = x_k\}$$

$$F(x_k + 0) - F(x_k) = P\{X = x_k\}$$

X:	0	1	2	3
	0,24	0,46	0,26	0,04

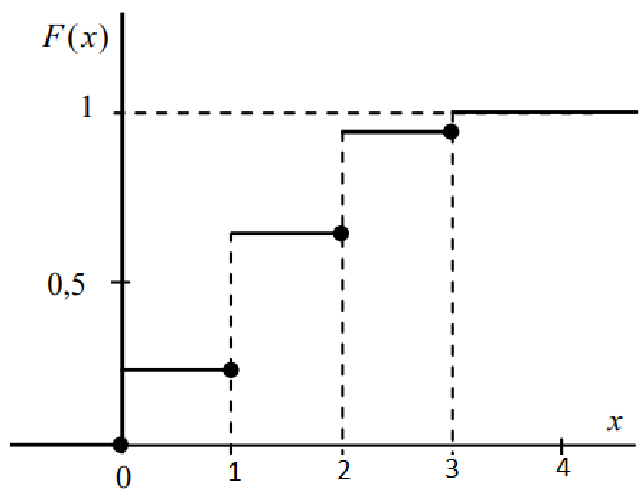
$x \le 0,\ F(x) = 0$;

$0 < x \le 1,\ F(x) = P\{X = 0\} = 0{,}24$;

$1 < x \le 2,\ F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}7$;

$2 < x \le 3,\ F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0{,}96$;

$x > 3,\ F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1$.



Примеры дискретных случайных величин

Биномиальное распределение

$$P\{X=k\}=p_k=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q=1-p$$

X	0	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\cdots$	p^n

Распределение Пуассона

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda=np$$

Непрерывная случайная величина

$$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

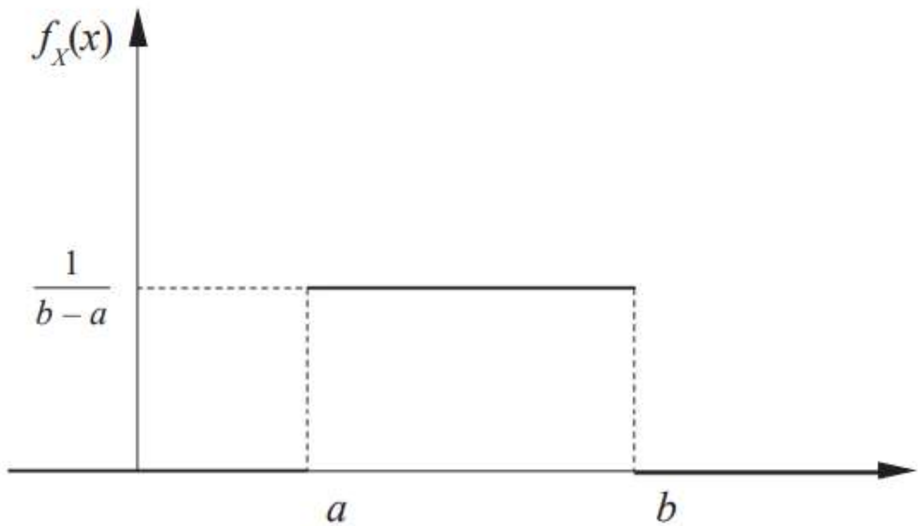
1. $f(x) \geq 0\,, \; -\infty < x < \infty$
2. $\dfrac{d}{dx} F(x) = f(x)$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
4. $P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$

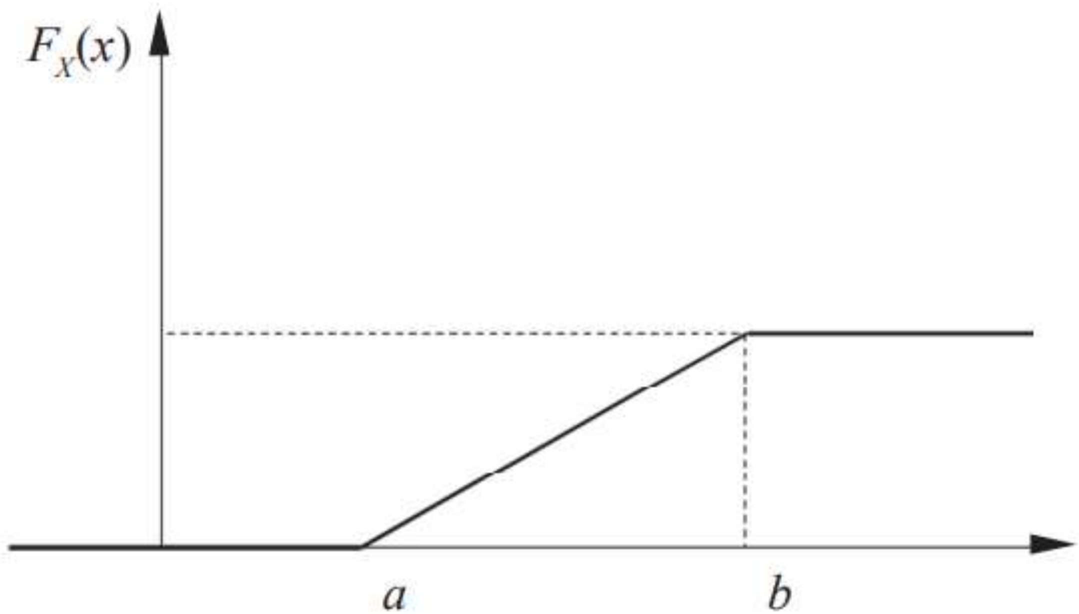
Равномерно распределенная случайная величина

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b); \\ C, & x \in (a, b). \end{cases}$$

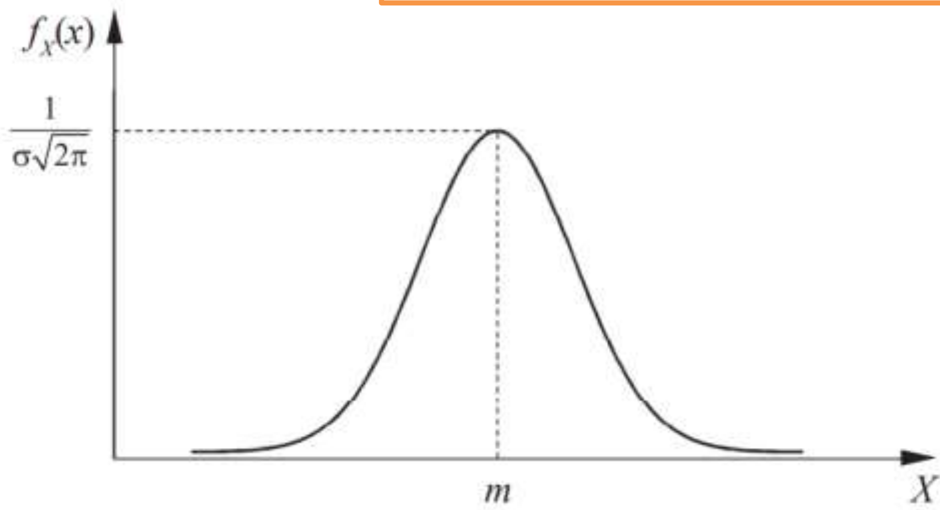
$$\int_a^b f(x)dx = 1. \qquad \int_a^b C dx = 1 \qquad C = \frac{1}{b-a}$$

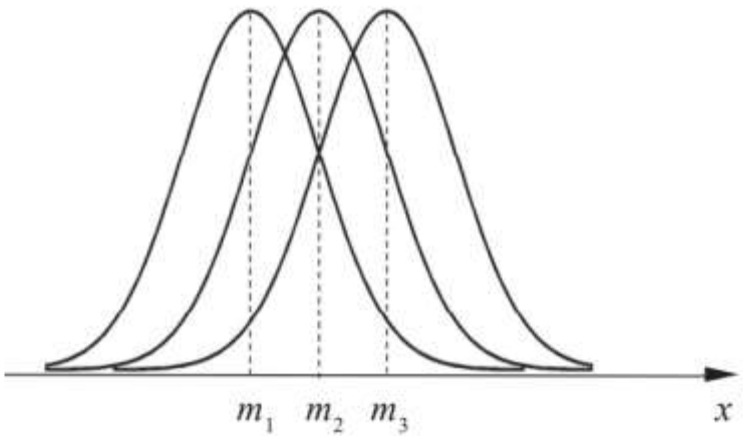
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b); \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a, b). \end{cases}$$

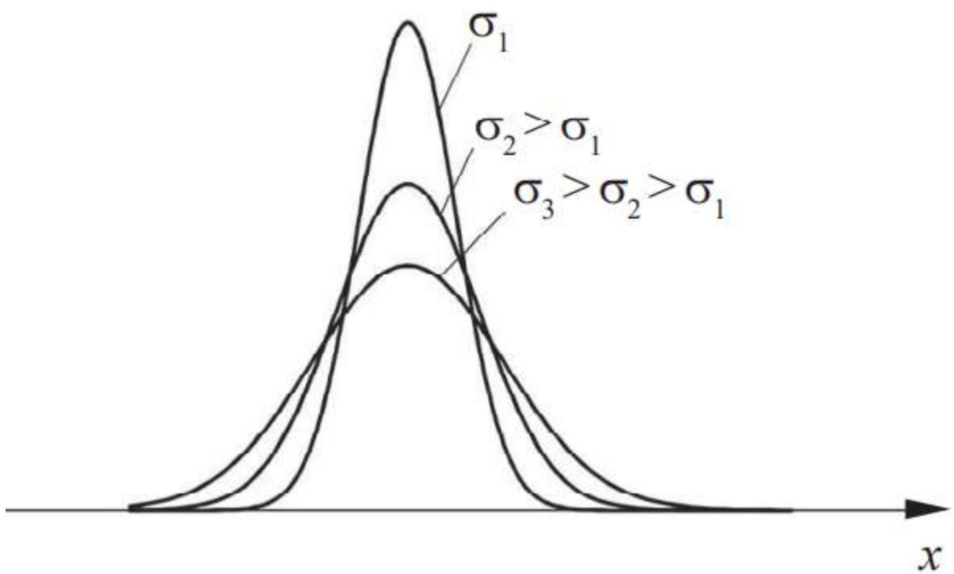



$F_X(x)$
a
b

Нормальное распределение







$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормированное
нормальное
распределение

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$