Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Доказательство. Докажем эту теорему для случая суммы двух несовместных событий A_1 и A_2.

Пусть событию A_1 благоприятствуют m_1 элементарных исходов, а событию $A_2 - m_2$ исходов. Так как события A_1 и A_2 по условию теоремы несовместны, то событию $A_1 + A_2$ благоприятствуют $m_1 + m_2$ элементарных исходов из общего числа n исходов. Следовательно,

$$P(A_1+A_2)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A_1)+P(A_2),$$

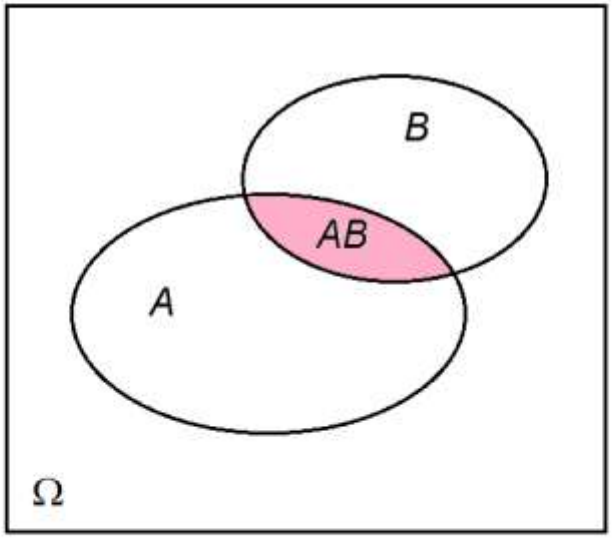
где $P(A_1)$ — вероятность события A; $P(A_2)$ — вероятность события A_2.

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Пример. Для отправки груза со склада может быть выделена одна из двух машин различного вида. Известны вероятности выделения каждой машины: $P(A_1) = 0{,}2, P(A_2) = 0{,}4$. Тогда вероятность поступления к складу хотя бы одной из этих машин будет

P(A_1+A_2) = 0,2 + 0,4 = 0,6.

Условная вероятность



$$P(B/A)=\frac{r}{m}=\frac{r/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB)=P(A)P(B/A)$$

$$P(AB)=P(BA)=P(B)P(A/B)$$

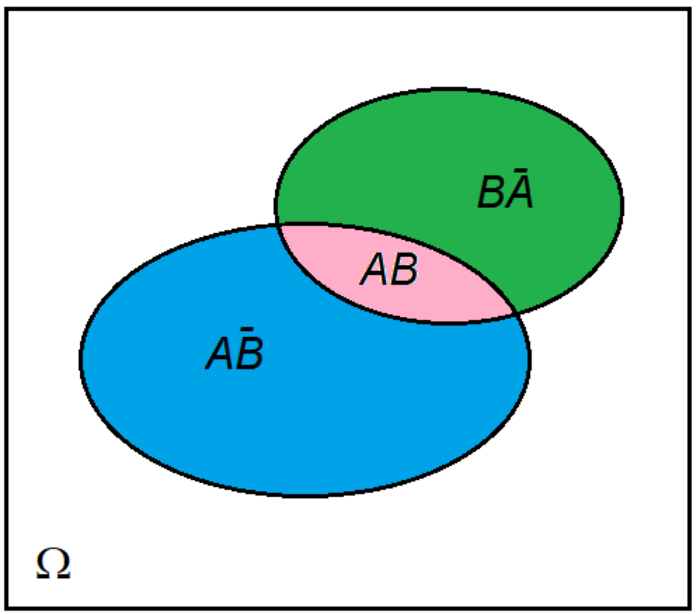
Для независимых событий: $$P(B/A)=P(B)$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



$$A+B=A\bar{B}+AB+\bar{A}B$$

$$P(A+B)=P(A\bar{B}+AB+\bar{A}B)=$$
$$=P(A\bar{B})+P(AB)+P(\bar{A}B)$$

$$A=A\bar{B}+AB$$

$$P(A)=P(A\bar{B})+P(AB)$$

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$$

$$B = \overline{A}B + AB$$

$$P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$$

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

$$P\left(A + B\right) = P\left(A\overline{B} + AB + \overline{A}B\right) =$$

$$= P\left(A\overline{B}\right) + P\left(AB\right) + P\left(\overline{A}B\right) =$$

$$= P(A) - P(AB) + P(AB) + P(B) - P(AB) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

Задача. В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

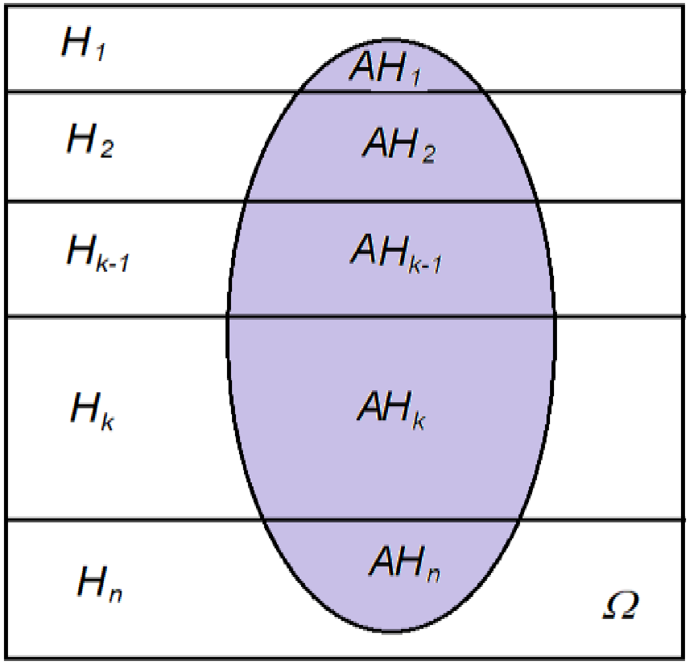
Решение. Событие A={хотя бы из одного ящика вынут белый шар} можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события A_1 и A_2 означают появление белого шара из первого и второго ящика соответственно. Вероятность вытащить белый шар из первого ящика равна $P(A_1) = 3/8$, а вероятность вытащить белый шар из второго ящика $P(A_2) = 6/10$.

Кроме того, в силу независимости A_1 и A_2 имеем: $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{40}$. По теореме сложения получаем:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 3/8 + 6/10 - 9/40 = 3/4.$$

Предположим, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, при этом известны вероятности наступления каждого из этих событий: $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Далее эти события будем называть *гипотезами*. Допустим также, что на фоне только одного из этих событий наступает интересующее нас событие A, и известны его условные вероятности $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \ldots, P_{H_n}(A)$.

Формула полной вероятности



$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$$

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) =$$
$$= AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$$

$$P(A) = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) =$$
$$= P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) =$$
$$= P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) =$$
$$= P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)P(H_n)$$

Задача. Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

Решение. Обозначим через H_1, H_2, H_3 гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи

$P(H_1) = 6/30 = 0{,}2$, $P(H_2) = 3/30 = 0{,}1$, $P(H_3) = 21/30 = 0{,}7$.

Пусть событие A={слабо подготовившийся студент сдал экзамен}. Тогда снова в силу условия задачи

$$P(A \mid H_1) = 0{,}4, \qquad P(A \mid H_2) = 0{,}1, \qquad P(A \mid H_3) = 0{,}7.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}58.$$

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(A/H_k)P(H_k)$$

Формула Байеса

$$P(AH_k)=P(A/H_k)P(H_k)=P(A)P(H_k/A)$$

$$P(H_k/A)=\frac{P(A/H_k)P(H_k)}{P(A)}$$

$$P(H_k/A)=\frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A/H_k)P(H_k)}$$

Задача. Пусть известно, что студент не сдал экзамен, т.е. получил оценку «неудовлетворительно». Кому из трех преподавателей вероятнее всего он отвечал?

Решение. Вероятность получить «неуд» равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$. Требуется вычислить условные вероятности. По формулам Байеса получаем:

$$P(H_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(\overline{A} \mid H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}42} = 0{,}285\,,$$ и аналогично,

$$P(H_2 \mid \overline{A}) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}42} = 0{,}214\,,\ P(H_3 \mid \overline{A}) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}42} = 0{,}5\,.$$

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.

Схема повторных испытаний. Формула Бернулли.

Опыт, состоящий из n независмых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с постоянной вероятностью p, называется схемой независимых испытаний с двумя исходами или схемой Бернулли.

Пусть в схеме из n независимых испытаний событие A наступает в каждом из них с постоянной вероятностью p. Тогда вероятность того, что событие A наступит k раз, определяется формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$$

Из формулы Бернулли следует, что $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$

Задача. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более, чем 2 раза.

Решение. Искомая вероятность равна сумме вероятностей трех событий, состоящих в том, что герб не выпадет ни разу, либо один раз, либо два раза:

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}344.$$

Если число независимых испытаний велико, то для нахождения вероятности того, что событие ***A*** наступит ровно *k* раз при проведении *n* независимых испытаний, проводимых по схеме Бернулли, формулу Бернулли применять (чисто технически) достаточно сложно. В этих случаях применяют асимптотические (локальную и интегральную) *формулы Муавра – Лапласа* и асимптотическую *формулу Пуассона*.

Формула Пуассона

Пусть в схеме n независимых испытаний событие ***A*** наступает в каждом из них с вероятностью p, где $n \to \infty$, а $p \to 0$ таким образом, что произведение $\lambda = np$ является постоянным числом. Тогда вероятность того, что событие ***A*** наступит k раз

$$P(k) = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Задача. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?

Решение. Имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p=0,005. Применяя пуассоновское приближение с $\lambda=np=5$, получаем

1) $P_{1000}(3)\approx\frac{5^3}{3!}e^{-5}$;

2) $P_{1000}(m\geq 3)=1-P_{1000}(m<3)=1-[P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)]\approx 1-\sum_{m=0}^{2}\frac{5^m}{m!}e^{-5}$,

и $P_{1000}(3)\approx 0,14$; $P_{1000}(m\geq 3)\approx 0,875$.

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Если же при достаточно большом *n* условия формулы Пуассона (4.2) не выполняются, следует обратиться к локальной теореме Муавра-Лапласа.

Если в схеме *n* независимых испытаний событие ***A*** наступает в каждом из них с вероятностью *p*, где $0 < p < 1$, а $n \to \infty$, то вероятность того, что событие ***A*** наступит *k* раз

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \quad (q = 1-p).$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Если в схеме n независимых испытаний событие A наступает в каждом из них с вероятностью p, где $0 < p < 1$, а $n \to \infty$, то вероятность того, что событие A наступит от k_1 до k_2 раз

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$