Поверхности второго порядка

Поверхности, описываемые этим уравнением

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fzy+Gx+Hy+Kz+L=0$$

называются поверхностями второго порядка.

Также, как для кривых второго порядка на плоскости, при надлежащем выборе системы координат все множество поверхностей, определяемое общим уравнением, можно свести к одному из 17 канонических видов.

В некоторых случаях это могут быть пары различных или совпадающих плоскостей или это уравнение представляет одну единственную точку.

Но и такие множества мы будем называть поверхностями. Некоторые случаи соответствуют пустым множествам. Рассмотрим наиболее важные из 17 случаев.

Эллипсоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$ где a, b, c – положительные числа.

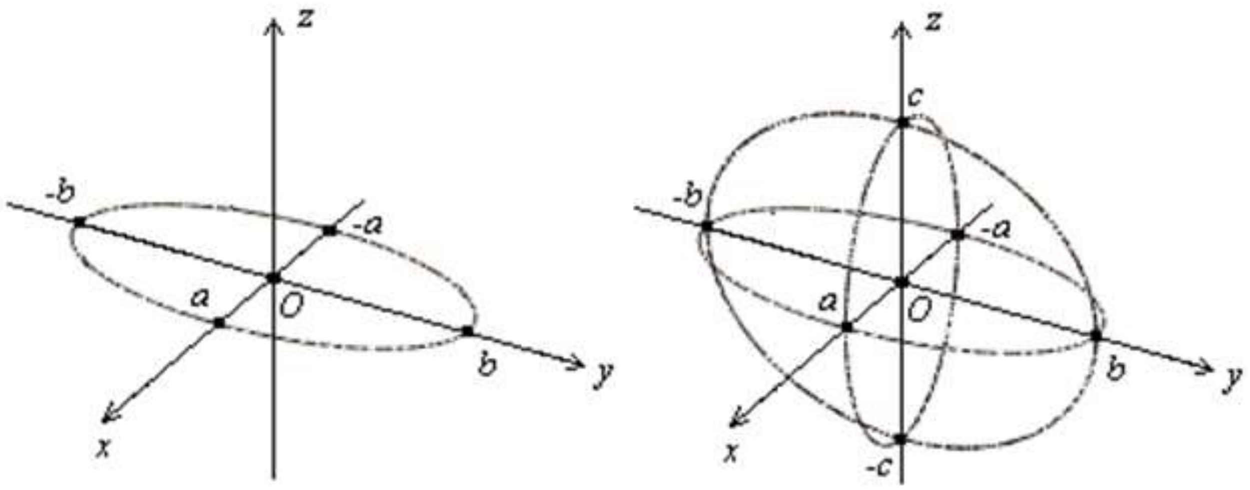
Исследуем форму эллипсоида. Из уравнения видно, что координаты точек поверхности ограничены: $|x| \le a, |y| \le b, |z| \le c$

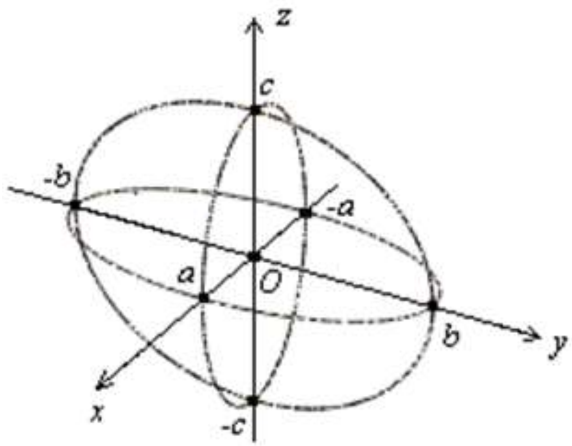
Эллипсоид обладает тремя плоскостями симметрии, тремя осями симметрии и центром симметрии. Ими служат соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

Для выяснения формы эллипсоида рассмотрим его сечения плоскостями. Найдем линию пересечения эллипсоида с плоскостью XOY. Так как любая точка плоскости XOY имеет нулевую третью координату, z=0, то координаты точек эллипсоида на плоскости XOY удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Получаем, что линия пересечения является эллипсом с полуосями a и b

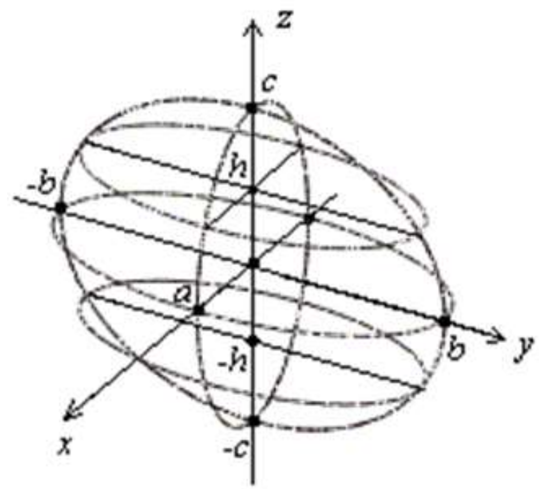




Аналогично, сечение в плоскости YOZ дает эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ с полуосями b и c,

а сечение плоскостью XOZ –

эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ с полуосями a и c.



Чтобы выяснить, как ведет себя поверхность между нарисованными кривыми, рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью z=h. Эта плоскость параллельна плоскости XOY и пересекает ось OZ в точке h. Уравнения этой линии

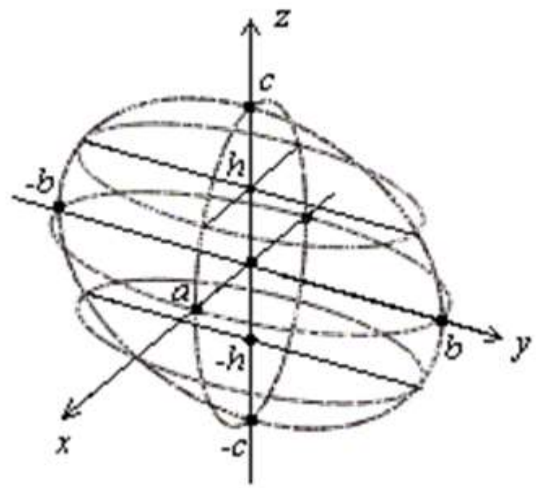
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ \mathrm{z}=\mathrm{h} \end{cases}$$

Очевидно, что если $|h|>c$, то ни одна точка пространства не может удовлетворять этой системе: в левой части первого уравнения стоит неотрицательное число, а в правой – отрицательное.

Если $|h| = c$, то сечении получим лишь одну точку (0;0;c) или (0;0;-c) в зависимости от знака h.

Пусть $|h| < c$. Тогда первое уравнение преобразуем к виду

$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}=1$, то есть к виду $\frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2}=1$, где $a_1 = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$

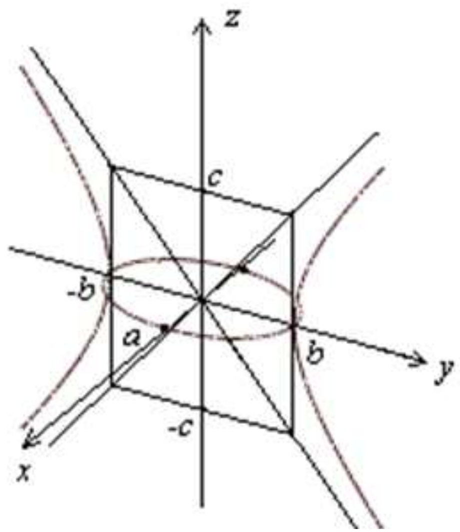


Таким образом, весь эллипсоид составлен из эллипсов, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости XOY и подобных эллипсу в плоскости XOY.

Так же, как для эллипса, точки пересечения эллипсоида с координатными осями называются вершинами эллипсоида, центр симметрии – центром эллипсоида. Числа a, b,c называются полуосями. Если полуоси попарно различны, то эллипсоид называется трехосным.

Если две полуоси равны друг другу, то эллипсоид называется эллипсоидом вращения. Эллипсоид вращения может быть получен вращением эллипса вокруг одной из осей.

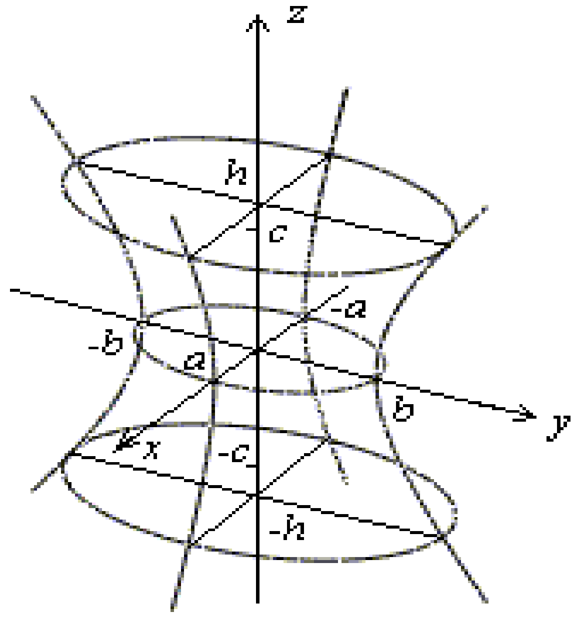
Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, где a, b, c – положительные числа



Исследуем форму однополостного гиперболоида. Так же, как эллипсоид, он имеет три плоскости симметрии, три оси симметрии и центр симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

Для построения гиперболоида найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости z=0, поэтому $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Это уравнение на плоскости XOY задает эллипс с полуосями a и b. Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости x=0, поэтому $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Это уравнение гиперболы на плоскости YOZ, где действительная полуось равна b, а мнимая полуось равна с. Построим эту гиперболу.



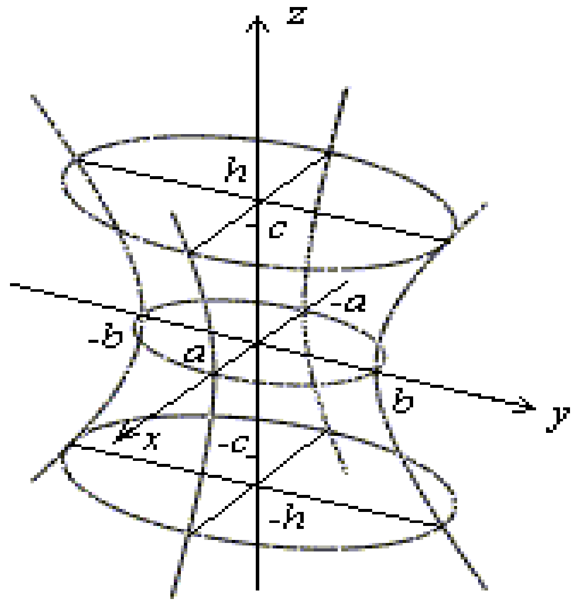
Сечение плоскостью XOZ также является гиперболой с уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$=1. Найдем линии пересечения поверхности с плоскостями z=$\pm h,\ h > 0$. Уравнения этих линий

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ \mathrm{z} = \pm \mathrm{h} \end{cases}$$

Первое уравнение преобразуем к виду $\frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1$,

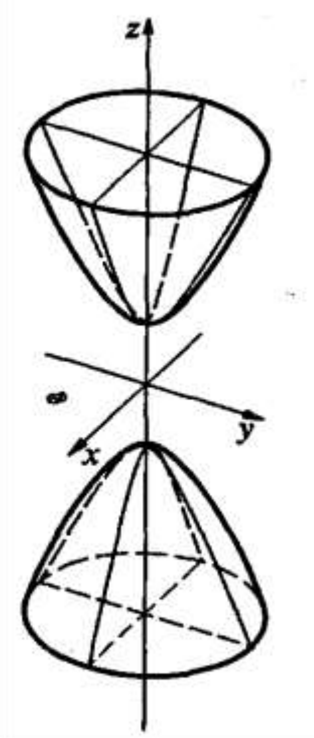
то есть к виду $\frac{x^2}{{a_1}^2}+\frac{y^2}{{b_1}^2}=1$, где $a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$

Это уравнение эллипса, подобного эллипсу в плоскости XOY, с полуосями a_1 и b_1 .



Если в каноническом уравнении a=b , то сечения гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости XOY, являются окружностями. В этом случае поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения и может быть получена вращением гиперболы, лежащей в плоскости YOZ, вокруг оси OZ.

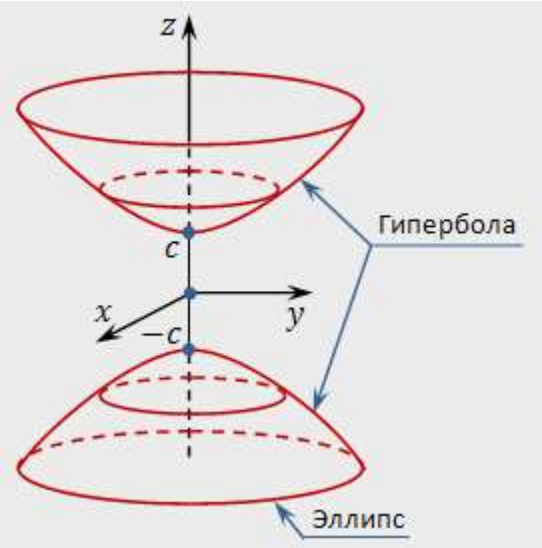
Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ = -1, где a, b, c – положительные числа



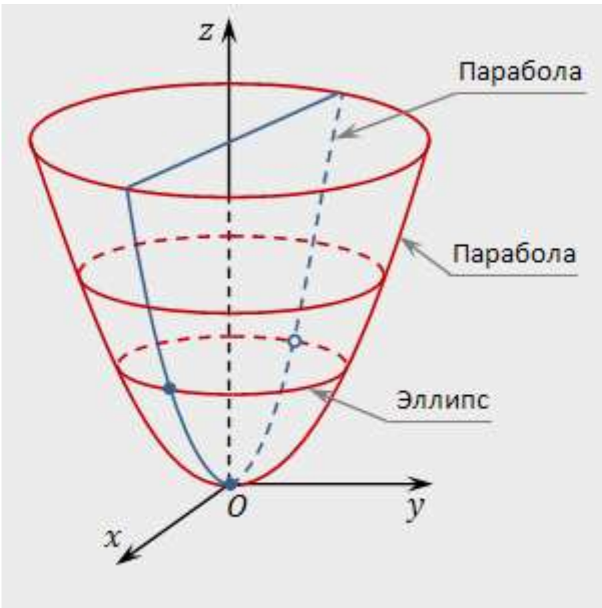
Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости z=0, поэтому координаты ни одной точки плоскости XOY не могут удовлетворять данному уравнению. Следовательно, двуполостный гиперболоид не пересекает эту плоскость.

Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости x=0, поэтому $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$=1. Это уравнение гиперболы на плоскости YOZ, где действительная полуось равна c, а мнимая полуось равна b. Сечение плоскостью XOZ также является гиперболой, с уравнением $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$=1.

Найдем линии пересечения поверхности с плоскостями $z = \pm h, h > 0$.
Очевидно, что ни одна точка не может удовлетворять этим уравнениям, если $|h| < c$.
Если h=c или h=-c, то плоскость имеет с исследуемой поверхностью только одну точку (0;0;c) или (0;0;-c) . Эти точки называются вершинами гиперболоида.
При $|h| > c$ получим уравнение эллипса, подобного эллипсу в плоскости XOY.



Эллиптическим параболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, где a, b – положительные числа.

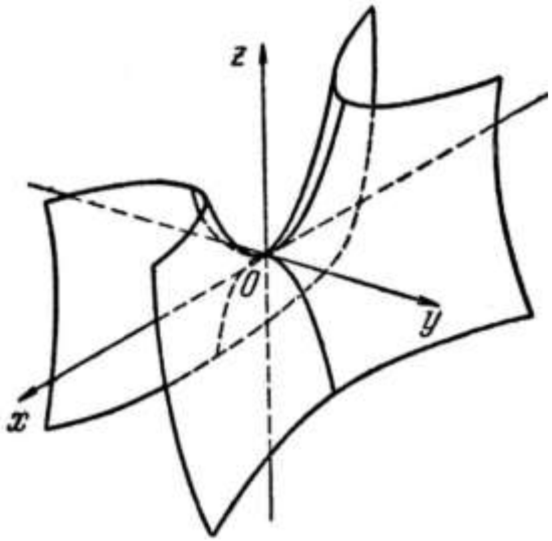


Для построения эллиптического параболоида найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости z=0, поэтому $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Координаты только одной точки плоскости XOY могут удовлетворять данному уравнению, а именно, начала координат.

Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ.
На этой плоскости x=0, поэтому
$z = \frac{y^2}{b^2}$. Это уравнение параболы на плоскости YOZ.
Сечение плоскостью XOZ также является параболой.

Найдем линии пересечения поверхности с плоскостью z=h. Уравнения этой линии
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{h}. \\ \text{z} = \text{h} \end{cases}$ Очевидно, что только одна точка (начало координат) удовлетворяет этим уравнениям, если h=0. Эта точка называется вершиной параболоида.
При $h > 0$ получаем уравнением эллипса. При h$<$ 0 плоскость поверхность не пересекает.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, где a, b – положительные числа.

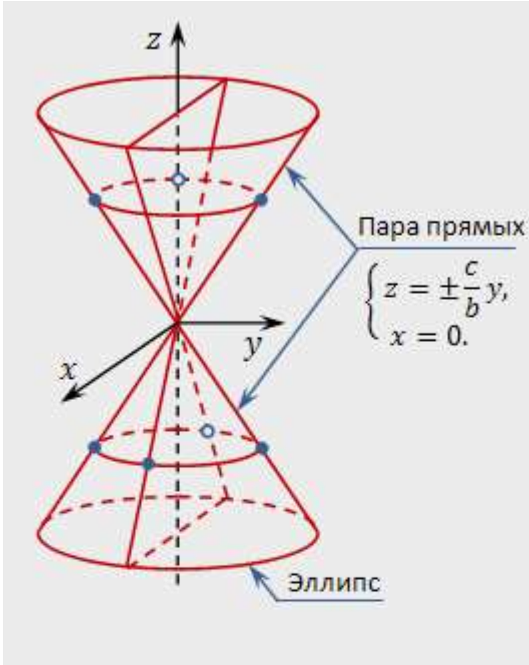


Для построения гиперболического параболоида найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости z=0, поэтому $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Это уравнение определяет на плоскости XOY пару прямых $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ . На этой плоскости x=0, поэтому $z = -\frac{y^2}{b^2}$.

Это уравнение на плоскости YOZ задает параболу, ветви которой направлены вниз.

Сечение плоскостью XOZ также является параболой $z = \frac{x^2}{a^2}$, но ее ветви направлены вверх. Найдем линии пересечения поверхности с плоскостью $z = -h, h > 0$. Получим уравнение гиперболы. Ее действительная ось параллельна оси OY, а мнимая – оси OX. Плоскость $z = h, h > 0$ пересекает поверхность по гиперболе, но в отличие от предыдущей, ее действительная ось параллельна теперь оси OX, а мнимая – оси OY.

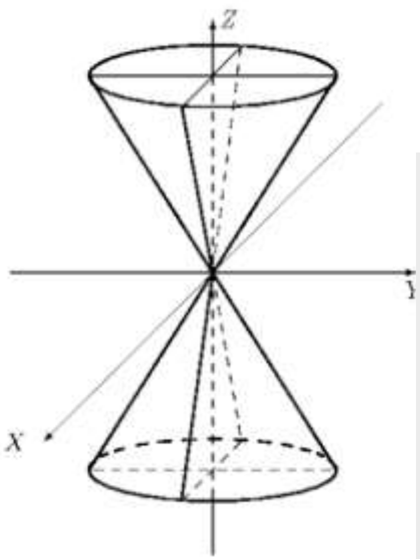


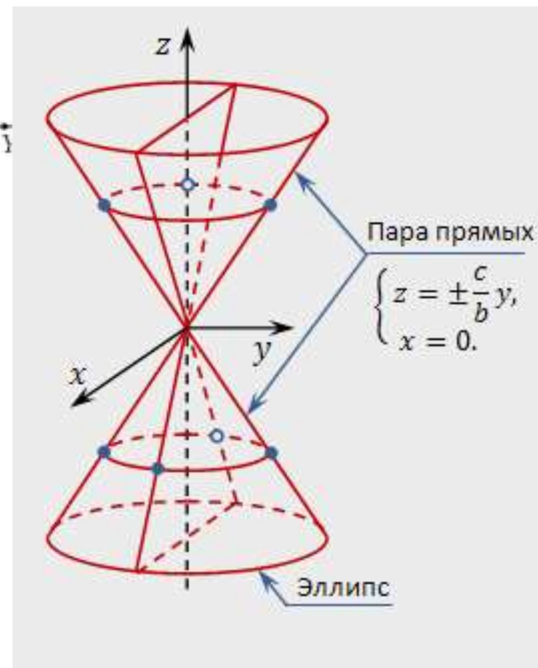
Конусом второго порядка называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости z=0, поэтому $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Координаты только одной точки плоскости XOY могут удовлетворять данному уравнению, а именно, начала координат. Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости x=0, поэтому $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Это уравнение пары прямых $z = \pm\frac{c}{b}y$ на плоскости YOZ.

Линии пересечения поверхности с плоскостями $z = \pm h, h > 0$ являются эллипсами. Точка пересечения конуса с плоскостью XOY называется вершиной конуса.

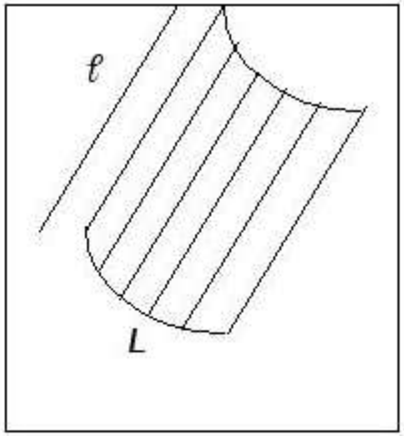

Z
Y
X


z
y
x
Пара прямых
$\begin{cases} z = \pm \frac{c}{b} y, \\ x = 0. \end{cases}$
Эллипс

Цилиндры второго порядка

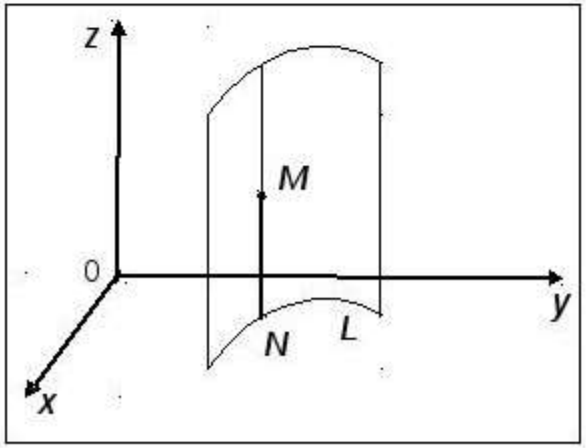
Поверхность, образованная всеми прямыми, проходящими параллельно данной прямой ℓ через точки линии L, называется ***<u>цилиндрической поверхностью</u>***

При этом линия L называется ***<u>направляющей</u>***, а прямые, проходящие через точки кривой L параллельно прямой ℓ, называется ее ***<u>образующими.</u>***



Пусть на плоскости $X0Y$ дана своим уравнением $F(x, y) = 0$ некоторая линия L .

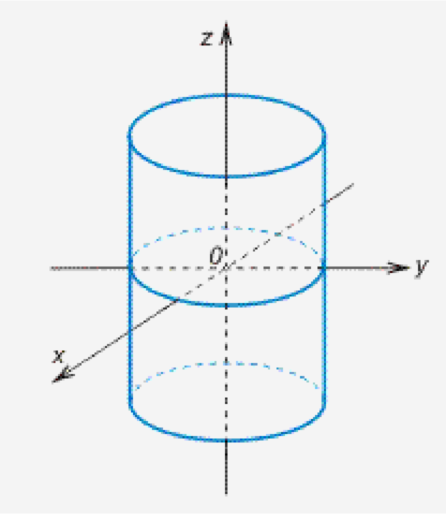
Проведем через каждую точку кривой L прямую параллельно оси $0Z$. Тогда получим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными этой оси. Уравнение $F(x, y) = 0$ - уравнение этой поверхности.



Эллиптический цилиндр

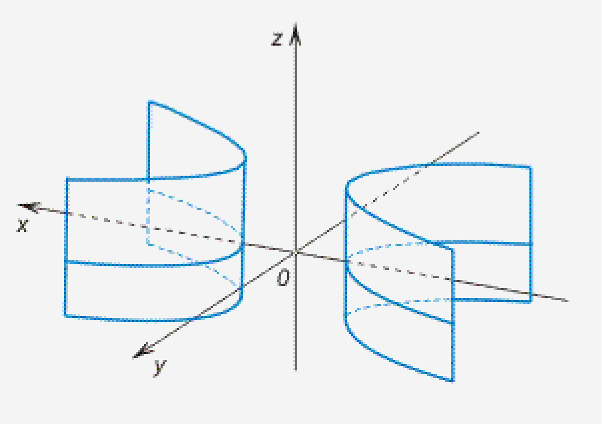
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a и b — полуоси



Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Параболический цилиндр

$y^2 = 2px$

p — фокальный параметр