Плоскость и прямая в пространстве

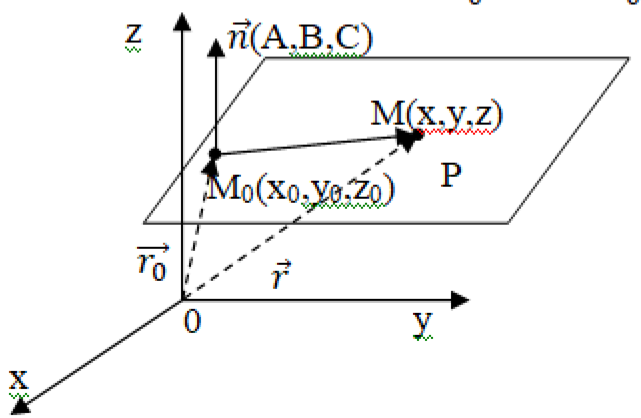
<u>Определение</u> Линейным уравнением относительно переменных x,y,z называется уравнение вида

Ax+By+Cz+D=0 где хотя бы один из коэффициентов A,B,C отличен от 0.

Теорема Каждая плоскость в пространстве определяется некоторым линейным уравнением и, обратно, всякое уравнение (1) в пространстве определяет плоскость.

Пусть в пространстве задана плоскость P. Выберем на плоскости какую-либо точку M_0 и построим ненулевой вектор $\vec{n}(A,B,C) \perp P$, $\vec{n}$-нормальный вектор Для того, чтобы произвольная точка M пространства принадлежала P, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overline{M_0M}$ был ортогонален $\vec{n}$

$$\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}, \quad (\vec{r} - \vec{r_0})\,\vec{n} = 0$$



Это уравнение плоскости в **векторной форме**.

В координатной форме :

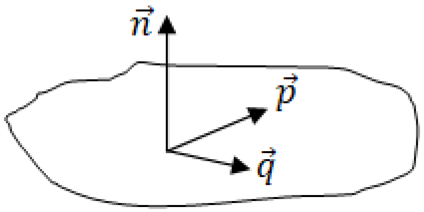
$\overline{M_0M}$ =(x-x_0,y-y_0,z-z_0), A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,

Это уравнение **плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей нормальный вектор** $\vec{n}$(A,B,C).

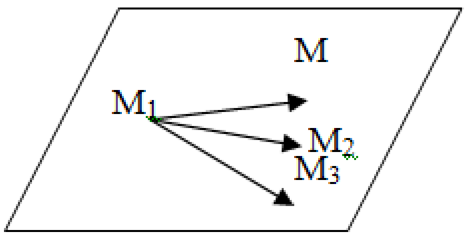
Раскрывая скобки и собирая константы получим

Ax+By+Cz+D=0 **- общее уравнение плоскости**. Тем самым мы доказали теорему.

Итак, плоскость вполне лопределяется заданием точки, лежащей на плоскости, и нормального вктора. Если имеются векторы $\vec{p}$ и $\vec{q} \in P$, то $\vec{n} = [\vec{p}; \vec{q}]$



Тогда векторное уравнение плоскости запишется
$(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{p}\vec{q}=0$ - смешанное произведение.
Воспользуемся этим выражением, чтобы вывести уравнение плоскости, проходящей через три точки.



$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0\ , \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Пусть M_1, M_2, M_3 – точки, лежащие на плоскости(но не лежащие на одной прямой), точка M – произвольная точка. Возьмём M_1 в качестве начальной точки и проведём векторы

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$. Точка M только тогда будет лежать на плоскости, когда все три вектора будут компланарны, т.е. их смешанной произведение будет равно 0. Отсюда и получается **уравнение плоскости, проходящей через три точки.**

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на -D

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

заменив –D/A=a, -D/B=b, -D/C=c, получим **уравнение плоскости «в отрезках»**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

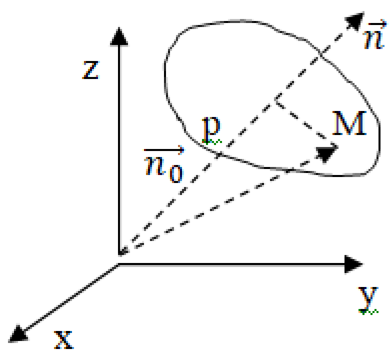
Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z.

Пусть задана плоскость P , проведём из начала координат вектор $\vec{n} \perp P$, а $\overrightarrow{n_0}$ - орт вектора $\vec{n}$.

Мы знаем, что координаты орта $\overrightarrow{n_0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

α, β, γ – углы, которые $\vec{n}$ образует с осями координат.

Расстояние от начала координат до плоскости, т.е. до точки пересечения $\vec{n}$ с плоскостью, обозначим $p > 0$. Тогда, какую-бы точку плоскоти M мы не взяли, то проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на вектор $\overrightarrow{n_0}$ будет равна p, тогда



$$\overrightarrow{n_0} \cdot \overrightarrow{OM} = p \text{ или } x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

это **- нормальное уравнение плоскости.**

Чтобы из общего уравнения получить нормальное, надо его умножить на $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

(Знак выбирается так, чтобы в нормальном уравнении перед свободным членом стоял минус)

Пример: найти уравнение плоскости, проходящей через точку (-2;0;-1) и имеющей нормальный вектор $\vec{n}(3;-4;6)$. Используем первый способ задания плоскости: 3(x+2)-4(y-0)+6(z+1)=0. Раскрывая скобки, получим общее уравнение плоскости 3x-4y+6z+12=0. Делим на (-12) и получаем уравнение « в отрезках» : -x/4+y/3-z/2=1. Умножив общее уравнение на $\mu = -\frac{1}{\sqrt{61}}$, получим нормальное уравнение: $-\frac{3x}{\sqrt{61}}+\frac{4y}{\sqrt{61}}-\frac{6z}{\sqrt{61}}-\frac{12}{\sqrt{61}}=0.$

Пример: Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(2, -1, 4) и B(3, 2, -1) перпендикулярно плоскости x + y + 2z – 3 = 0.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: Ax + By + Cz + D = 0, вектор нормали к этой плоскости $\overrightarrow{n_1}$ (A, B, C). Вектор $\overrightarrow{AB}$(1, 3, -5) принадлежит плоскости. Заданная нам плоскость, перпендикулярная искомой, имеет вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$(1, 1, 2). Т.к. плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким образом, вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$ (11, -7, -2). Т.к. точка A принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. $11\cdot 2 + 7\cdot 1 - 2\cdot 4 + D = 0$; D = -21.

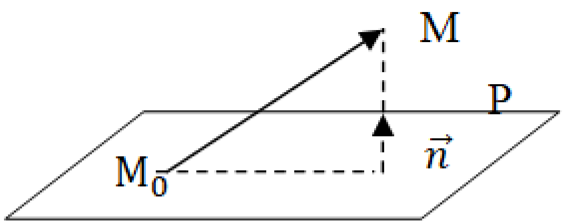
Итого, получаем уравнение плоскости: 11x - 7y – 2z – 21 = 0.

Расстояние от точки до прямой

Точно так же, как и для прямой на плоскости, чтобы найти расстояния от произвольной точки $M(x^*, y^*, z^*)$ до плоскости, нужно в общий вид подставить координаты этой точки и умножить на μ:

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Или другой способ:

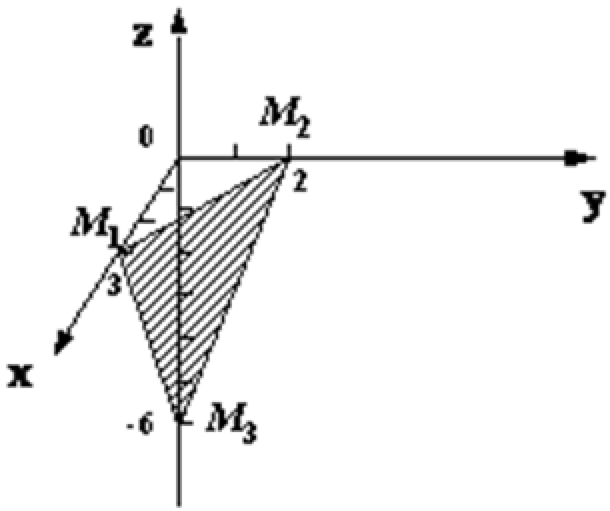


$$d = \text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M} = \frac{\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|} \ .$$

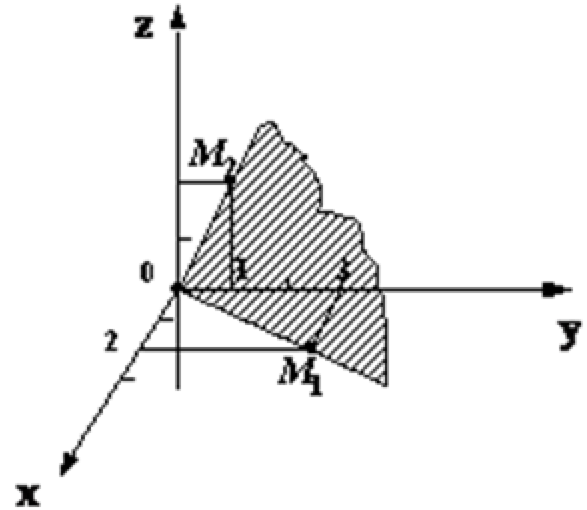
Пример: M(1,2,4) ; P=2x+2y-z-11=0, d=9/$\sqrt{21}$

Неполные уравнения плоскости

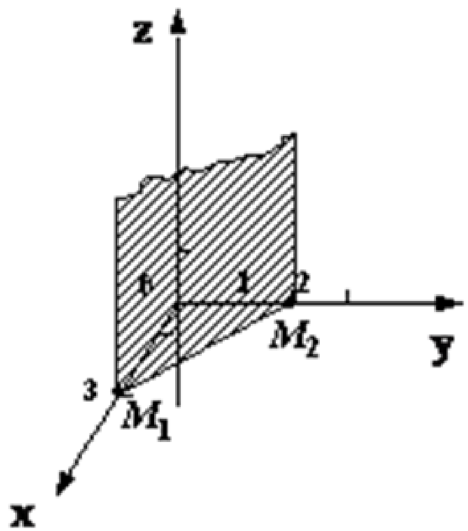
A = 0 – плоскость параллельна оси Ox
B = 0 – плоскость параллельна оси Oy
C = 0 – плоскость параллельна оси Oz
D = 0 – плоскость проходит через начало координат
A = B = 0 – плоскость параллельна плоскости xOy
A = C = 0 – плоскость параллельна плоскости xOz
B = C = 0 – плоскость параллельна плоскости yOz
A = D = 0 – плоскость проходит через ось Ox
B = D = 0 – плоскость проходит через ось Oy
C = D = 0 – плоскость проходит через ось Oz
A = B = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOy
A = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью xOz
B = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью yOz



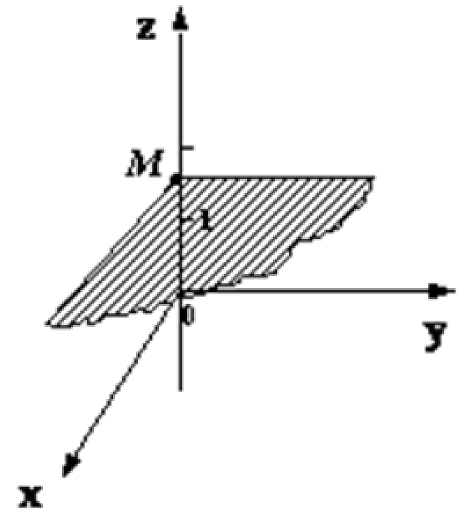
Все коэффициенты ненулевые



Свободный член равен нулю



Коэффициент при переменной z равен нулю



Два коэффициента при переменных равны нулю

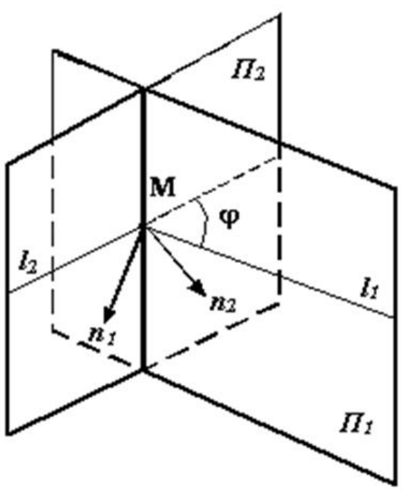
Угол между плоскостями

Пусть плоскости $П_1$ и $П_2$ заданы соответственно уравнениями

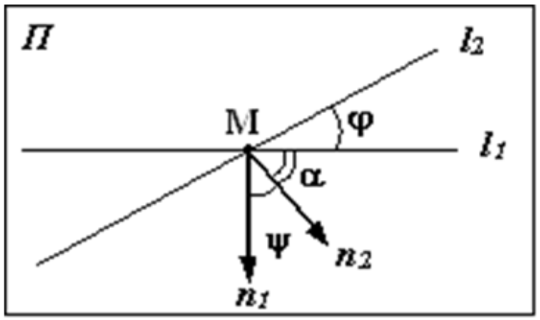
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

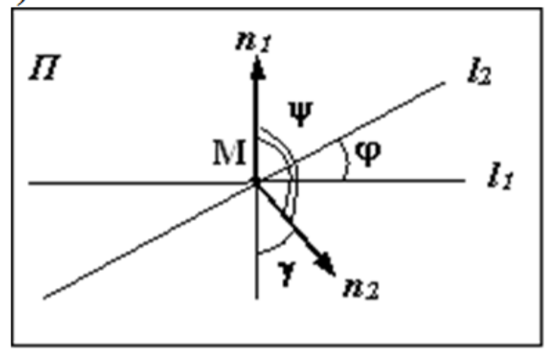
Требуется найти угол φ между этими плоскостями. Плоскости, пересекаясь, образуют четыре двугранных угла (см. рис.): два тупых и два острых или четыре прямых, причем оба тупых угла равны между собой, и оба острых тоже равны между собой. Мы всегда будем искать острый угол. Для определения его величины возьмем точку M на линии пересечения плоскостей и в этой точке в каждой из плоскостей проведем перпендикуляры l_1 и l_2 к линии пересечения. Нарисуем также нормальные векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ плоскостей $П_1$ и $П_2$ с началами в точке M(см. рис.).



Если через точку М провести плоскость П, перпендикулярную линии пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 , то прямые l_1и l_2 и изображения векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ будут лежать в этой плоскости. Сделаем чертеж в плоскости П (возможны два варианта):



Угол между нормальными векторами острый



Угол между нормальными векторами тупой

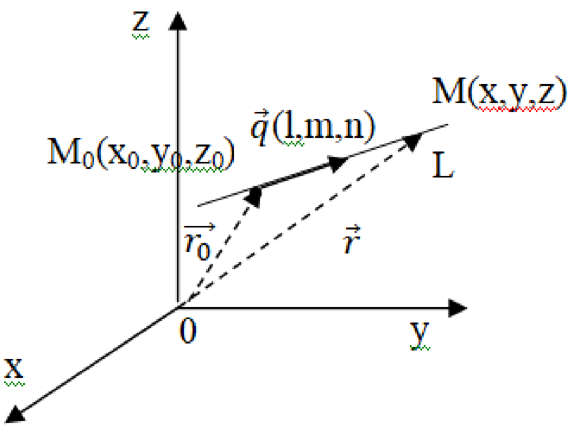
В одном варианте $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\psi + \alpha = \pi/2$, следовательно, угол ψ между нормальными векторами равен углу φ, являющемуся линейным углом острого двугранного угла между плоскостями Π_1 и Π_2 .

Во втором варианте $\gamma = \varphi$, а угол ψ между нормальными векторами равен $\pi - \gamma$. Так как $cos\psi = \cos(\pi - \gamma) = -cos\gamma$, то в обоих случаях $|cos\psi| = cos\varphi$. По определению скалярного произведения $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = |\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|cos\psi$. Откуда $cos\psi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$ и соответственно $cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$.

Так как координаты нормальных векторов известны, если заданы уравнения плоскостей, то полученная формула позволяет найти косинус острого угла между плоскостями. Если плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы. Получаем условие перпендикулярности плоскостей: $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}$=0. Если плоскости параллельны, то коллинеарны их нормальные векторы. Получаем условие параллельности плоскостей $\overrightarrow{n_1} = t\,\overrightarrow{n_2}$, где t-- любое число.

Прямая в пространстве

Пусть в пространстве задана прямая L и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ней. Зададим направление этой



прямой **направляющим** вектором $\vec{q}(l,m,n)$. Очевидно, что произвольная M(x,y,z) будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ будет коллинеарен вектору $\vec{q}$. Условие коллинеарности $[\overrightarrow{M_0M};\vec{q}]=0$, или в координатной форме

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$ - это **канонические уравнения прямой**

Так как векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{q}$ коллинеарны, значит должна быть связь $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t\vec{q}$ или в координатной форме $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}, -\infty < t < \infty$ **- параметрические уравнения прямой.**

Для отрезка M_1M_2: $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}, 0 \le t \le 1$

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей. Так как точка прямой принадлежит каждой из плоскостей, то ее координаты обязаны удовлетворять уравнениям обеих плоскостей, то есть удовлетворять системе из двух уравнений.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

И наоборот, точки, удовлетворяющие такой системе уравнений, образуют прямую, являющуюся линией пересечения плоскостей, чьи уравнения образуют эту систему.

Пример: Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases};\quad y = -3x,$$ 2x – 9x – 7 = 0; x = -1; y = 3; Получаем: A(-1; 3; 0).

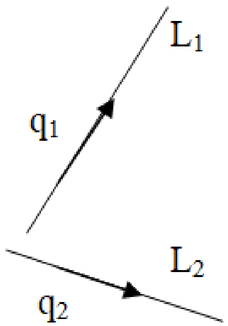
$$\vec{q} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$$ – направляющий вектор прямой.

Итого : $\dfrac{x+1}{-35} = \dfrac{y-3}{-14} = \dfrac{z}{-7}$; $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$;

Отсюда можем получить параметрические уравнения: x=-1+5t, y=3+2t, z=t.

Угол между двумя прямыми

Угол между двумя прямыми определяется как угол между их направляющими векторами, тогда

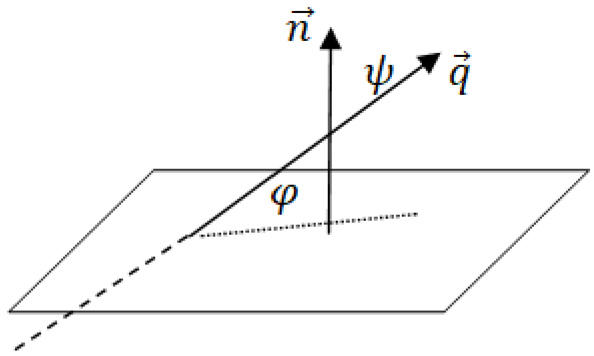


$$\cos\varphi = \frac{\vec{q_1}\vec{q_2}}{|\vec{q_1}||\vec{q_2}|}$$ *– мы получим φ, либо $\pi - \varphi$*

тогда условия перпендикулярности и параллельности:

$\vec{q_1} \cdot \vec{q_2} = 0$ и $[\vec{q_1}; \vec{q_2}]=0$.

Угол между прямой и плоскостью



Угол φ между прямой и плоскостью определяется как не тупой угол между этой прямой и её проекцией на плоскость. Плоскость задана общим уравнением, прямая – каноническими уравнениями, т.е. известны $\vec{n}$ и $\vec{q}$. Тогда $sin\varphi = cos\psi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{q}}{|\vec{n}||\vec{q}|}$.

Условие параллельности прямой и плоскости $\vec{n}\cdot\vec{q} = 0$, перпендикулярности - $[\vec{n}\,;\,\vec{q}] = 0$.

Точка пересечения прямой и плоскости

Заданы плоскость Ax+By+Cz+D=0 и прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$. Можно решать эту задачу как систему из трёх линейных уравнений, но это слишком долго. Поступим по-другому. Запишем параметрические уравнения $x=x_0+lt, y=y_0+mt, z=z_0+nt$, подставим их в уравнение плоскости и найдем значение параметра t, соответствующего точке пересечения. Затем это найденное значение t подставляем в параметрические уравнения – находим координаты искомой точки

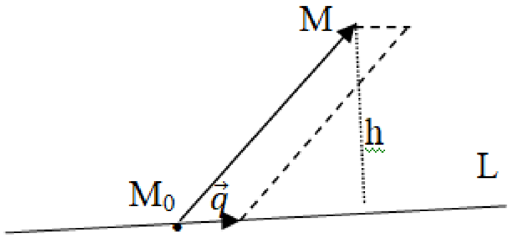
Например: 2x+y+7z-3=0 , $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$ $\begin{cases} x=7+3t \\ y=3+t \quad \Rightarrow t=1 \\ z=-1-2t \end{cases}$

Точка пересечения (10,4,-3)

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки M до прямой L можно найти, выполнив следующие действия:

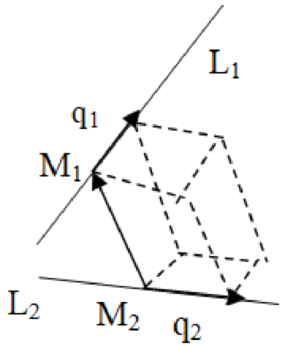
1) строим плоскость, перпендикулярную прямой и проходящую через т.M ; 2) находим точку пересечения этой плоскости и прямой; 3) находим расстояние между этой точкой и M. Другой способ. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{q}$ равна



$$S = \left|\left[\overrightarrow{M_0M}\,;\vec{q}\right]\right| = |\vec{q}|\cdot h,\ h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}\,;\vec{q}\right]\right|}{|\vec{q}|}.$$

Пример: $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$, M(2;-1;3)   Ответ: $3\sqrt{38}/10$

Расстояние между скрещивающимися прямыми



Даны две прямые своими каноническими уравнениями. Построим параллепипед на векторах $\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}, \overrightarrow{M_2M_1}$. Его объём -

$$V=\overrightarrow{q_1}\cdot\overrightarrow{q_2}\cdot\overrightarrow{M_2M_1}=S_{осн}\cdot h=|[\overrightarrow{q_1};\overrightarrow{q_2}]|\cdot h.\ \text{Отсюда}\ h=\frac{\overrightarrow{q_1}\cdot\overrightarrow{q_2}\cdot\overrightarrow{M_2M_1}}{|[\overrightarrow{q_1};\overrightarrow{q_2}]|}.$$

Итак, прямые пересекаются, когда h=0. Прямые называются скрещивающимися, когда не лежат в одной плоскости, т.е. $h \neq 0$.

Пример: найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми : $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$. Ответ: $\sqrt{3}/3$