# Числовые последовательности

## Определение и предел последовательности

Рассмотрим функцию целочисленного аргумента. Такой аргумент обозначается буквой $n$, а значения функции – какой-нибудь буквой, нижним индексом которой берется соответствующее значение целочисленного аргумента, например $x_n$.

**Определение 1** Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция f, определенная на множестве натуральных чисел.

**Определение 2** Последовательностью называется множеством чисел, пронумерованных и расположенных в порядке возрастания номеров.

Последовательность обозначается $\{x_n\}$ или $x_n$ или $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. $x_1, x_2, \ldots$ - элементы или члены последовательности.

Пример:
$x_n = \dfrac{1}{2^n}$;

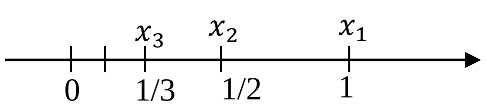
Способы задания последовательности:

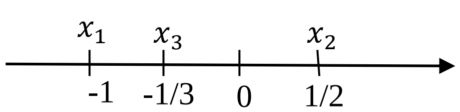
1. задание функции ,порождающей последовательность $x_n = f(n), n \in N$.
   Например, $x_n = 5^n$, $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $x_n = f(n)$ - формула общего члена последовательности.

2. перечисление нескольких членов последовательности $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ при n=1, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ при n=2, $x_2 = \dfrac{1}{4}$ и т.д.

3. рекуррентный способ – когда есть формула, позволяющая вычислить общий член последовательности через предыдущие $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$.

Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности, например $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ и $x_n = \dfrac{1}{n}$



Также это можно наглядно изобразить на плоскости, по оси x будем откладывать n.

**Последовательность называется ограниченной сверху(снизу)** ,если существует число M(m) такое что любой элемент $x_n$ этой последовательности $x_n \le M (x_n \ge m)$. На языке краткой математической записи $\exists M\ \forall x_n : x_n \le M$ .

**Последовательность называется ограниченной**, если существует число, A такое что $|x_n| \le A$ (для всех членов последовательности).

( в краткой записи $\exists A \succ 0\ \ \forall x_n : |x_n| \le A$). В противном случае последовательность называется неограниченной ( $\forall A \succ 0\ \ \exists x_n : |x_n| \succ A$).

Примеры: 1) $x_n = n$ *или* $1, 2, 3...$-ограничена снизу, но не ограничена сверху;

2) $x_n = -n$ *или* $-1, -2, -3...$-ограничена сверху, но не ограничена снизу;

3) $x_n = \frac{1}{n}$ , т.к. $0 < \frac{1}{n} \le 1$ , можно взять , например, A=1, тогда $|x| \le 1$ – ограничена

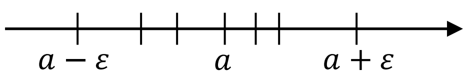
4) $x_n = (-1)^n n$ - последовательность неограниченна.

<u>**Определение**</u> Число $a$ называется пределом бесконечной числовой последовательности $x_n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ ( $\forall \varepsilon \succ 0\, \exists N\ \forall n \succ N : |x_n - a| \prec \varepsilon$ ).

Последовательность, имеющая предел называется **сходящейся. Это записывается** $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Последовательность не являющаяся сходящейся называется **расходящейся** .

Геометрически понятие предела означает: для любой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ (какой бы маленькой она ни была ) найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ члены последовательности лежат внутри этой $\varepsilon$-окрестности.




$|x_n - a| < \varepsilon$ .

Пример: 1) доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ : из определения предела ($|x_n-a|<\varepsilon$ при $a=0\Rightarrow$
$|x_n-0|<\varepsilon$ ) $\left|\frac{1}{n}-0\right|\prec\varepsilon\Rightarrow$ $\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow$ $n\succ\frac{1}{\varepsilon}$ отсюда мы можем взять в качестве

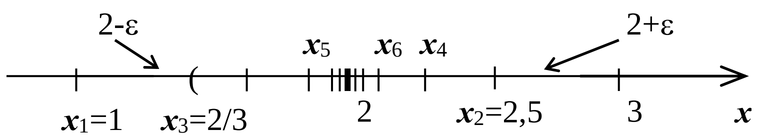
$N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{n}\right]+1$ например: $\begin{matrix}\varepsilon=0{,}001\\ N=1001\end{matrix}$ ( квадратные скобки - целая часть числа).

2) *докажем, что* последовательность $\left\{a_n \middle| a_n=2+\frac{(-1)^n}{n}, n\in Z\right\}$ *при* $\boldsymbol{n}\to\infty$ *сходится к двум. Возьмём* $\forall\varepsilon>0$. *Требуется доказать, что существует такое* $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}(\varepsilon)$, *что при* $\boldsymbol{n}>\boldsymbol{N}$ *выполняется неравенство* $|\boldsymbol{a_n}-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$, *т.е.*

$$\left|\left(2-\frac{(-1)^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}\right)-2\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{(-1)^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{\boldsymbol{n}}<\varepsilon\Rightarrow\boldsymbol{n}>\frac{1}{\varepsilon}.$$

*Таким образом, если в качестве* $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}(\varepsilon)$ *мы возьмём* $\boldsymbol{N}(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, *то при* $\boldsymbol{n}>\boldsymbol{N}$ *выполняется неравенство* $\boldsymbol{n}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\left|\left(2-\frac{(-1)^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}\right)-2\right|<\varepsilon$, *что и требовалось.*

*Расположение нескольких первых членов последовательности на числовой оси приведено на рисунке снизу:*




*Сходимость последовательности к числу 2 выражается в том, что члены последовательности сгущаются около точки* $\boldsymbol{x}=2$.

3) для последовательности $x_n=(-1)^n$ - предел не существует -1,1,-1,1,-1,….

**<u>Свойство:</u>** Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

## Бесконечно малые последовательности

Определение **Последовательность называется бесконечно малой** ( б.м.), если ее предел равен нулю.

Примеры: $x_n = \frac{1}{n}$ , $x_n = \frac{1}{n^2}$ , $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Для б.м. выполняется $|x_n| < \varepsilon$, начиная с некоторого номера.

*Теоремы о бесконечно малых последовательностях.*

**Теорема 1.** *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Пусть $a_n$ и $b_n$ - бесконечно малые последовательности ,тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1$, такой что $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_1$, и найдется $N_2$ такой, что $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_2$. Выберем $N = max\{N_1; N_2\}$, тогда для всех $n > N$ оба этих неравенства будут выполняться одновременно. Тогда для любого $n \succ N$ $|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

Следствие: алгебраическая сумма любого **конечного** числа бесконечно малых, бесконечно малая.

Но:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

**Теорема 2.** Произведение двух бесконечно малых ,есть бесконечно малая.

**Теорема 3.** Произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность, есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство*:* $x_n$ - ограниченная последовательность, $a_n$ -бесконечно малая.

Доказать: $x_n a_n$ -бесконечно малая.

Так как $x_n$ - ограниченная, то $\exists A \succ 0 \ \forall x_n : |x_n| \le A$. Возьмем $\varepsilon \succ 0$. Для б.м. $a_n$ и для положительного $\frac{\varepsilon}{A}$ существует номер N такой, что при $n > N$ $|a_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Тогда при $n > N$ $|a_n x_n| = |a_n||x_n| < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n a_n = 0$.

**Теорема 4.** Для того чтобы число $a$ было пределом последовательности $a_n$ необходимо и достаточно, чтобы $a_n$ можно было представить в виде $a_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n$ – бесконечно малая.

Доказательство:

<u>Необходимость</u> – Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ тогда найдется N, начиная с которого $n > N$ $|a_n - a| < \varepsilon$. *Пусть* $a_n - a = \alpha_n$, тогда для

$n > N \quad |\alpha_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т.е. $\alpha_n$ -бесконечно малая, поэтому если а – предел, то $a_n = a + \alpha_n$.

<u>Достаточность</u> Имеем: $a_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n$ - б.м. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Делаем обратные рассуждения : $a_n - a = \alpha_n, т.к. \alpha_n - б.м., то |\alpha_n| \prec \varepsilon$,
т.е. $|a_n - a| \prec \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ .

## Свойство сходящихся последовательностей

**Теорема** Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство: Предположим противное. Сходящаяся последовательность- $x_n$ имеет два предела $a$ и $b$ ,тогда на основе предыдущей теоремы $\Rightarrow$ $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n, \beta_n$ - б.м. Приравнивая, найдем $a + \alpha_n = b + \beta_n \Rightarrow a - b = \alpha_n - \beta_n$ , справа б.м., предел которой равен нулю $\Rightarrow$ $a = b$.

**Теорема**. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство:

Раз $x_n$ - сходящаяся последовательность, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то начиная с $n \succ N$ все члены последовательности будут лежать в $\varepsilon$-окрестности точки а. За пределами этой $\varepsilon$-окрестности ,останется лишь конечное число членов последовательности $x_1, x_2, \ldots x_N$;
Тогда $|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| \text{ } при\ n \succ N$.

Выберем $A = max\{\varepsilon + |a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$, тогда для всех членов выполняется $|x_n| \le A$ - что означает -последовательность ограничена.

**Замечание.** Обратная теорема может быть и не верна, т.е. из ограниченности последовательности еще не следует, что она сходится.

Примеры:
1) -1,1,-1,1,…
2) Последовательность
$$\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{11}{6}, \ldots ; a_n = 1 + \frac{1}{n} \text{ при } n \text{ нечётном}, a_n = 2 - \frac{1}{n} \text{ при } n \text{ чётном}; n \in N\right\}$$

ограничена: $1 \le \boldsymbol{a_n} < 2$, но предела не имеет (подпоследовательность членов с нечётными индексами сходится к числу 1, с чётными - к числу 2, последовательность в целом предела не имеет).

Однако если мы дополнительно потребуем, чтобы последовательность была монотонной, то существование предела будет обеспечено (об этом попозже).

**Теорема.** *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

**Теорема.** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ( предел суммы равен сумме пределов) если пределы слагаемых справа, существуют и конечны.

Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \quad x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$
$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$ ,где $x_n \pm y_n$-последовательность, $a \pm b$-const, $\alpha_n \pm \beta_n$-сумма или разность бесконечно малых. Последовательность можно представить в виде суммы const и б.м. Из Теоремы 4 следует доказательство.

**Теорема.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (если пределы множителей существуют).

**Теорема.** $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *(C-const) (* постоянную можно выносить за знак предела*).*

**Теорема.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ *(*если пределы знаменателя и числителя существуют и предел знаменателя не равен 0*).*

**Теорема.** $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

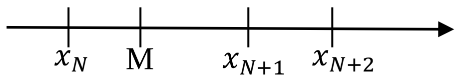
**Пример:** $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{3}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{3}{n^2}\right)} =$$

$$= (\text{\textit{применять теорему о пределе нельзя, делим на }} n^2) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

## Бесконечно большие последовательности

**Определение** Говорят, что последовательность $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, если для любого M сколь угодно большого существует $N(M)$ такой, что как только $n > N$, так $x_n > M$ .
Это записывают так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ .

Геометрически это означает, что какое бы большое число M мы ни взяли, все члены последовательности с $n > N$ будут лежать правее чем M.



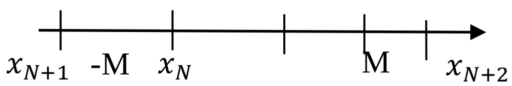

**Пример**: $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ , $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ .

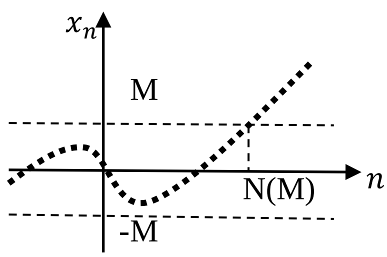
**Определение** Говорят, что последовательность $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, если для любого $M > 0$ существует номер $N(M)$ такой, что как только $n > N$ будет выполняться $x_n < -M$
Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
Геометрически это означает, что какое бы большое число M мы ни взяли, все члены последовательности с $n > N$ будут лежать левее чем -M.

**Пример**: $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$ , $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$ .

**Определение** Говорят, что последовательность $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$ при, если для любого M существует номер N(M), такой что как только $n > N$, то $|x_n| > M$.

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Геометрически это означает, что какое бы большое число M мы ни взяли, все члены последовательности с $n > N$ будут лежать левее чем -M или правее M.



Предыдущие определения попадают под это определение:
$\lim_{n\to\infty} n = +\infty = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(-3)^n = \infty$

**Определение** Если последовательность стремится к $\infty$, то она называется бесконечно большой ( б.б.).

**Теорема** Если последовательность $x_n$ бесконечно большая, то последовательность $\frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая, и наоборот.

Доказательство:

Если $x_n$ - бесконечно большая, то для любого $M > 0$ существует номер $N(M)$ такой, что для $\forall n > N$ будет выполняться $|x_n| > M$. Отсюда следует $\left|\frac{1}{x_n}\right| \prec \frac{1}{M}$, возьмем $\varepsilon = \frac{1}{M}$ тогда при $n > M$ $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{x_n}$ - б.м.. Обратное аналогично.

**Замечание**. Очевидно, что б.б. последовательность не имеет предела. В отличии от бесконечных пределов, другие будем называть конечными пределами.

## Монотонные последовательности, число *e*

### Определение

1. Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n или $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 ...$ - последовательность возрастающая.

2. Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n или $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 ...$ - последовательность неубывающая (может оставаться на одном уровне).

3. Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n или $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 ...$ - последовательность убывающая.

4. Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n или $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 ...$ - последовательность невозрастающая.

Все эти последовательности называются монотонными. Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

**Пример** $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная; $\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

**Пример:** Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\}= \dfrac{n+1}{2n+2+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $\{x_n\}-\{x_{n+1}\}= \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \dfrac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0$, т.к. $n \in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

**Пример:** Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность

$\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Найдем $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+1}{5\cdot 5^n} - \dfrac{n}{5^n} = \dfrac{n+1-5n}{5\cdot 5^n} =$

$= \dfrac{1-4n}{5\cdot 5^n}$, т.к. $n\in N$, то $1 - 4n < 0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

**Теорема Признак Вейерштрасса (признак существования предела):** Если последовательность $x_n$ монотонная и ограниченная, то эта последовательность имеет предел.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. При

$n = 1; x_1 = 2, \quad n = 2; x_2 = \dfrac{9}{4} = 2.25, \quad n = 3; x_3 = 2.37$

Вспомним комбинаторику: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$, $C_n^k$ -число сочетаний, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = 120$, $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$, свойства $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$ или,

что то же самое

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение $x_{n+1}$ и сравним его с выражением $x_n$:

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots$$

$$\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении $x_{n+1}$ больше соответствующего значения $x_n$, и, кроме того, у $x_{n+1}$ добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$. Заменим во всех членах скобки единицами, получим неравенство:

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} < 1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометр. прогрессия}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$ ( еще больше увеличили правую часть - $\frac{1}{n!} \to \frac{1}{2^{n-1}}$ )

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7182818284...$$

***e*** - число иррационально и трансцендентное (не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами).

Число e играет большую роль в науке и технике, также как число $\pi$.
Функция $y = e^x$ называется экспонента.

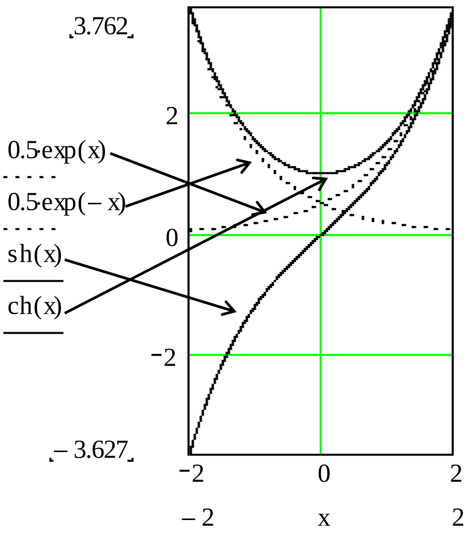
Нам знакома функция $y = \log_a x$, число ***e*** является основанием натурального логарифма $y = \log_e x = \ln x$.

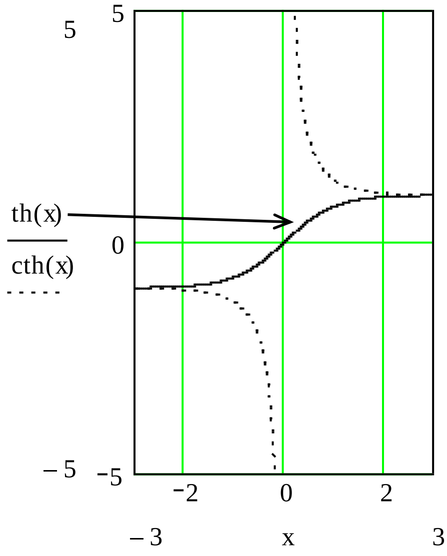
Связь натурального и десятичного логарифмов: пусть x = $10^y$, тогда $\ln x = \ln 10^y$, следовательно $\ln x = y\ln 10$

y = $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x;$ $\ln x = \frac{1}{M}\lg x$, где M = 1/ln10 ≈ 0,43429…- модуль перехода.

На основании функции экспонента строятся гиперболические функции:
$ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $th(x) = sh(x)/ch(x), cth(x) = ch(x)/sh(x)$,

Их свойства подобны обычным тригонометрическим функциям ( есть и отличия) :
$sh(2x) = 2sh(x)\cdot ch(x), ch^2(x) - sh^2(x) = 1$. Графики гиперболических функций:


3.762
2
0.5·exp(x)
0.5·exp(− x)
0
sh(x)
ch(x)
−2
− 3.627
−2
0
2
− 2
x
2


5
5
th(x)
0
cth(x)
− 5
−5
−2
0
2
− 3
x
3

# Практика вычисления пределов

**Теоремы о пределах, облегчающие нахождение пределов**

**Теорема** Если для последовательностей выполняется $a_n \le x_n \le b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

**Теорема** Если $x_n$ имеет конечный предел, то для любого $\alpha \in R$ этот предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^\alpha$ в предположении что степени имеют смысл.

**Теорема** Если $x_n$ имеет конечный предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, если корень существует.

**Теорема** Если $a > 0$ и $x_n$ имеет конечный положительный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$

**Теорема** Если $a > 0$ и $x_n$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.
Об обоснованности этих действий поговорим позже.

## Неопределенные выражения (неопределенности)

Рассмотрим частное $\frac{x_n}{y_n}$: например, 1) $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$ .Обе последовательности бесконечно малые, тогда $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$

2) $x_n = \frac{1}{n}$ , $y_n = \frac{1}{n^2}$ в этом случае $\frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$

3) $x_n = \frac{a}{n}$ , $y_n = \frac{1}{n}$ в этом случае $\frac{x_n}{y_n} = a$

4) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ в этом случае $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ частное ни к чему не стремится.

Говорят, что имеет место неопределенность вида "$\frac{0}{0}$" .

Другие виды неопределенностей: $\frac{\infty}{\infty}; 0\cdot\infty; \infty-\infty; 0^{\infty}; 0^0; 1^{\infty}$. Мы должны уметь раскрывать эти неопределенные выражения.

**Примеры вычисления пределов**

1) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$. Из определения предела $\exists\, N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ : $|x_n - a| < \varepsilon$. Надо найти N.

$$\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4n-4n-2}{2n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < 2n+1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}.\ \textit{Получаем}\ N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right].$$

Покажем, что число 3 не может быть пределом этой последовательности:
$\left|\frac{4n}{2n+1} - 3\right| = \frac{2n+3}{2n+1} \prec \varepsilon$, отсюда $n \prec \frac{\varepsilon - 3}{2 - 2\varepsilon}$, т.е. меньше 0.

Главное в этих примерах, что возможно найти $N(\varepsilon)$.

2) Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1} = 1$. $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1} - 1\right| \prec \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n^2+1}-1} \prec \varepsilon \Rightarrow n \succ \sqrt{(\frac{2}{\varepsilon}+1)^2 - 1}$. Если взять $\varepsilon$=0.01, то N=200, т.е. при n$\succ$200 все члены последовательности будут лежать в интервале (0.99; 1.01).

3) $x_n = q^n, |q| \prec 1$ *тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

$|q^n - 0| \prec \varepsilon \Rightarrow |q^n| \prec \varepsilon \Rightarrow n\lg|q| \prec \lg\varepsilon \Rightarrow n \succ \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ $(т.к.\ \lg|q| \prec 0)$, поэтому можно взять в качестве $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$. То, что мы нашли $N(\varepsilon)$ и доказывает, что предел равен 0. Покажем применение этого предела. Рассмотрим бесконечную убывающую геометрическую прогрессию: $a, aq, aq^2, aq^3, ..., aq^n, ...\quad, |q| \prec 1$. $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{a}{1-q}\cdot q^n, \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$

5) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3/n)(2-4/n)^2(5/n^2-1)$=( Применяем теорему о пределе произведения ( имеем право – каждый множитель имеет предел))=
$\lim\limits_{n\to\infty}(1+3/n)\lim\limits_{n\to\infty}(2-4/n)^2\lim\limits_{n\to\infty}(5/n^2-1) = 1\cdot 4\cdot(-1) = -4$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{6n+2}{3n-4}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+2}{3n-4}} = 3^2 = 9$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ для $a \succ 1$(для $a \prec 1$ аналогично) :

$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| \prec \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a} - 1 \prec \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a} \prec \varepsilon + 1 \Rightarrow 1/n \prec \log_a(1+\varepsilon), \quad n \succ \dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^k} = +\infty, a \succ 1 \quad ; \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n} = 0 \ ; \ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = "\infty-\infty" = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$.

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+5n}}{3n+2} = (делим\ на\ n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1/n+5/n^2}}{3+2/n} = 0$.

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{3n^3+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+n+1)} = \dfrac{1}{9}$ ( вспомним теорему о сумме конечного числа б.м.)

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+3}\right)^{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+3}\right)^{(-\frac{n+3}{2})\frac{(2n+3)(-2)}{n+3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2(2n+3)}{n+3}} = e^{-4}$.