

### III. ГРАФИКИ

#### Теоретические вопросы

1. Условия возрастания функции на отрезке.
2. Условия убывания функции на отрезке.
3. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума.
4. Достаточные признаки максимума и минимума функции (изменение знака первой производной).
5. Наибольшее и наименьшее значения, функции, непрерывной на отрезке.
6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия выпуклости и вогнутости.
7. Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.
8. Исследование функций на экстремум с помощью высших производных.
9. Асимптоты графика функции.

#### Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция  $f(x) = x - \sin x$  монотонно возрастает на отрезке: а)  $[0, 2\pi]$ ; б)  $[0, 4\pi]$  Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?

2. Доказать теорему: если функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$  и  $\varphi'(x) > \psi'(x) \quad \forall x \in (a, b)$ , а  $\varphi(a) = \psi(a)$ , то  $\varphi(x) > \psi(x) \quad \forall x \in (a, b]$ .

Дать геометрическую интерпретацию теоремы.

У к а з а н и е. При доказательстве теоремы установить и использовать монотонность функции  $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ .

3. Доказать неравенство  $2x/\pi < \sin x$  для трех случаев:

а)  $\forall x \in \left(0, \arccos \frac{2}{\pi}\right]$ ;

б)  $\forall x \in \left[\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ ;

$$\text{в) } \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Дать геометрическую интерпретацию неравенства.

4. Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке  $x = 0$  минимум, а функция

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не имеет в точке  $x = 0$  экстремума.

5. Исследовать на экстремум в точке  $x_0$  функцию  $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ , считая, что производная  $\varphi'(x)$  не существует, но функция  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $\varphi(x_0) \neq 0$ ,  $n$  — натуральное число.

6. Исследовать знаки максимума и минимума функции  $x^3 - 3x + q$  и выяснить условия, при которых уравнение  $x^3 - 3x + q = 0$  имеет а) три различных действительных корня; б) один действительный корень.

7. Определить «отклонение от нуля» многочлена  $p(x) = 6x^3 - 27x^2 + 36x - 14$  на отрезке  $[0, 3]$ , т. е. найти на этом отрезке наибольшее значение функции  $|p(x)|$ .

8. Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

## Расчётные задания

**Задача 1.** Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

1.1.  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$ .

1.2.  $y = 3x - x^3$ .

1.3.  $y = x^2(x - 2)^2$ .

1.4.  $y = (x^3 - 9x^2)/4 + 6x - 9$ .

1.5.  $y = 2 - 3x^2 - x^3$ .

1.6.  $y = (x + 1)^2(x - 1)^2$ .

1.7.  $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$ .

1.8.  $y = 3x^2 - 2 - x^3$ .

1.9.  $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$ .

1.10.  $y = (x^3 + 3x^2)/4 - 5$ .

1.11.  $y = 6x - 8x^3$ .

1.12.  $y = 16x^2(x - 1)^2$ .

1.13.  $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ .

1.14.  $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$ .

1.15.  $y = (2x + 1)^2(2x - 1)^2$ .

1.16.  $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$ .

1.17.  $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$ .

1.18.  $y = (2x - 1)^2(2x - 3)^2$ .

1.19.  $y = 27(x^3 - x^2)/4 - 4$ .

1.20.  $y = x(12 - x^2)/8$ .

1.21.  $y = x^2(x - 4)^2/16$ .

1.22.  $y = 27(x^3 + x^2)/4 - 5$ .

1.23.  $y = (16 - 6x^2 - x^3)/8$ .

1.24.  $y = -(x^2 - 4)^2/16$ .

1.25.  $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$ .

1.26.  $y = (6x^2 - x^3 - 16)/8$ .

1.27.  $y = -(x - 2)^2(x - 6)^2/16$ .

1.28.  $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$ .

1.29.  $y = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)/8$ .

1.30.  $y = -(x + 1)^2(x - 3)^2/16$ .

1.31.  $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ .

**Задача 2.** Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

2.1.  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ .

2.2.  $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ .

2.3.  $y = 12\sqrt[3]{6(x-2)^2} / (x^2 + 8)$ .

2.4.  $y = -12\sqrt[3]{6(x-1)^2} / (x^2 + 2x + 9)$ .

2.5.  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ .

2.6.  $y = 2x + 6 - 3\sqrt[3]{(x+3)^2}$ .

2.7.  $y = 6\sqrt[3]{6(x-3)^2} / (x^2 - 2x + 9)$ .

2.8.  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$ .

2.9.  $y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x + 6$ .

2.10.  $y = -6\sqrt[3]{6x^2} / (x^2 + 4x + 12)$ .

2.11.  $y = 4x + 8 - 6\sqrt[3]{(x+2)^2}$ .

2.12.  $y = 3\sqrt[3]{6(x-4)^2} / (x^2 - 4x + 12)$ .

2.13.  $y = \sqrt[3]{x(x+2)}$ .

2.14.  $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$ .

2.15.  $y = -3\sqrt[3]{6(x+1)^2} / (x^2 + 6x + 17)$ .

2.16.  $y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x + 8$ .

2.17.  $y = 3\sqrt[3]{6(x-5)^2} / (x^2 - 6x + 17)$ .

2.18.  $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}$ .

2.19.  $y = 6x - 6 - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}$ .

2.20.  $y = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 8}$ .

2.21.  $y = \sqrt[3]{4x(x-1)}$ .

2.22.  $y = -3\sqrt[3]{6(x+2)^2} / (x^2 + 8x + 24)$ .

2.23.  $y = \sqrt[3]{x(x-2)}$ .

2.24.  $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$ .

2.25.  $y = 9\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6x - 6$ .

2.26.  $y = 6\sqrt[3]{6(x+3)^2} / (x^2 + 10x + 33)$ .

2.27.  $y = 8x - 16 - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}$ .

2.28.  $y = -6\sqrt[3]{6(x-6)^2} / (x^2 - 8x + 24)$ .

2.29.  $y = 12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8x - 16$ .

2.30.  $y = 3\sqrt[3]{6(x-1)^2} / (2(x^2 + 2x + 9))$ .

2.31.  $y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$ .

**Задача 3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

$$3.1. y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad [1, 4].$$

$$3.2. y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, \quad [1, 4].$$

$$3.3. y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1, \quad [0, 6].$$

$$3.4. y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}, \quad [-3, 3].$$

$$3.5. y = 2\sqrt{x} - x, \quad [0, 4].$$

$$3.6. y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}, \quad [-1, 5].$$

$$3.7. y = x - 4\sqrt{x} + 5, \quad [1, 9].$$

$$3.8. y = \frac{10x}{1+x^2}, \quad [0, 3].$$

$$3.9. y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2, \quad [-3, 3].$$

$$3.10. y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59, \quad [2, 4].$$

$$3.11. y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}, \quad [-1, 2].$$

$$3.12. y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}, \quad [-1, 6].$$

$$3.13. y = \frac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}, \quad [1, 4].$$

$$3.14. y = x - 4\sqrt{x+2} + 8, \quad [-1, 7].$$

$$3.15. y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}, \quad [1, 5].$$

$$3.16. y = \frac{4x}{4+x^2}, \quad [-4, 2].$$

$$3.17. y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8, \quad [-4, -1].$$

$$3.18. y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}, \quad [-2, 4].$$

$$3.19. y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}, \quad [-2, 1].$$

$$3.20. y = -\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}, \quad [-5, 1].$$

$$3.21. y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}, \quad [0, 4].$$

$$3.22. y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13, \quad [2, 5].$$

$$3.23. y = 2\sqrt{x-1} - x + 2, \quad [1, 5].$$

$$3.24. y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}, \quad [-3, 4].$$

$$3.25. y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5, \quad [-2, 1].$$

$$3.26. y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

$$3.27. y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3, \quad [-4, 2].$$

$$3.28. y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2} - 9, \quad [-1, 2].$$

$$3.29. y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15, \quad \left[-2, -\frac{1}{2}\right].$$

$$3.30. y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}, \quad [-2, 5].$$

$$3.31. y = -\frac{10x+10}{x^2+2x+2}, \quad [-1, 2].$$

#### Задача 4.

Варианты 1 – 10.

Рыбаку нужно переправиться с острова  $A$  на остров  $B$  (рис. 1). Чтобы пополнить свои запасы, он должен попасть на участок берега  $MN$ . Найти кратчайший путь рыбака  $s = s_1 + s_2$ .

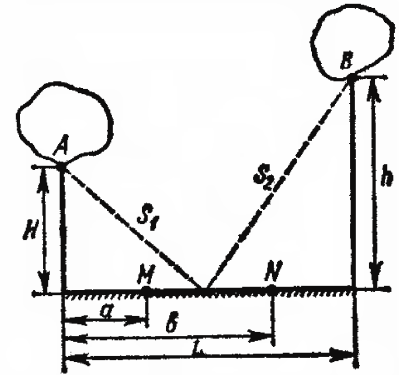


Рис. 1

- 4.1.  $a = 200, b = 300, H = 400, h = 300, L = 700$ .  
 4.2.  $a = 400, b = 600, H = 800, h = 600, L = 1400$ .  
 4.3.  $a = 600, b = 900, H = 1200, h = 900, L = 2100$ .  
 4.4.  $a = 800, b = 1200, H = 1600, h = 1200, L = 2800$ .  
 4.5.  $a = 1000, b = 1500, H = 2000, h = 1500, L = 3500$ .  
 4.6.  $a = 400, b = 500, H = 300, h = 400, L = 700$ .  
 4.7.  $a = 800, b = 1000, H = 600, h = 800, L = 1400$ .  
 4.8.  $a = 1200, b = 1500, H = 900, h = 1200, L = 2100$ .  
 4.9.  $a = 1600, b = 2000, H = 1200, h = 1600, L = 2800$ .  
 4.10.  $a = 2000, b = 2500, H = 1500, h = 2000, L = 3500$ .

Варианты 11 – 20.

При подготовке к экзамену студент за  $t$  дней изучает  $\frac{t}{t+k}$ -ю часть курса, а забывает  $\alpha t$ -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

- 4.11.  $k = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{2}{49}$ .  
 4.12.  $k = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{2}{81}$ .  
 4.13.  $k = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{2}{121}$ .  
 4.14.  $k = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{2}{169}$ .  
 4.15.  $k = 1, \alpha = \frac{1}{25}$ .  
 4.16.  $k = 1, \alpha = \frac{1}{16}$ .  
 4.17.  $k = 1, \alpha = \frac{1}{36}$ .  
 4.18.  $k = 1, \alpha = \frac{1}{49}$ .  
 4.19.  $k = 2, \alpha = \frac{1}{18}$ .  
 4.20.  $k = 2, \alpha = \frac{2}{49}$ .

Варианты 21 – 31.

Тело массой  $m_0 = 3000$  кг падает с высоты  $H$  м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности  $k = 100$  кг/с<sup>2</sup>. Считая, что начальная скорость  $v_0 = 0$ , ускорение  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, и пренебрегая сопротивлением воздуха найти наибольшую кинетическую энергию тела.

4.21.  $H = 500$ .

4.22.  $H = 605$ .

4.23.  $H = 720$ .

4.24.  $H = 845$ .

4.25.  $H = 980$ .

4.26.  $H = 1125$ .

4.27.  $H = 1280$ .

4.28.  $H = 1445$ .

4.29.  $H = 1620$ .

4.30.  $H = 1805$ .

4.31.  $H = 2000$ .

**Задача 5.** Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

5.1.  $y = x^2 - 4x - (x - 2)\ln(x - 1)$ ,  $x_0 = 2$ .

5.2.  $y = 4x - x^2 - 2\cos(x - 2)$ ,  $x_0 = 2$ .

5.3.  $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$ ,  $x_0 = 2$ .

5.4.  $y = 2\ln(x + 1) - 2x + x^2 + 1$ ,  $x_0 = 0$ .

5.5.  $y = 2x - x^2 - 2\cos(x - 1)$ ,  $x_0 = 1$ .

5.6.  $y = \cos^2(x + 1) + x^2 + 2x$ ,  $x_0 = -1$ .

5.7.  $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$ ,  $x_0 = 1$ .

5.8.  $y = 1 - 2x - x^2 - 2\cos(x + 1)$ ,  $x_0 = -1$ .

5.9.  $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$ ,  $x_0 = -2$ .

5.10.  $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$ ,  $x_0 = -1$ .

5.11.  $y = (x + 1)\sin(x + 1) - 2x - x^2$ ,  $x_0 = -1$ .

5.12.  $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$ ,  $x_0 = 1$ .

5.13.  $y = 2x + x^2 - (x + 1)\ln(2 + x)$ ,  $x_0 = -1$ .

5.14.  $y = \sin^2(x + 1) - 2x - x^2$ ,  $x_0 = -1$ .

5.15.  $y = x^2 + 4x + \cos^2(x + 2)$ ,  $x_0 = -2$ .

- 5.16.  $y = x^2 + 2\ln(x + 2)$ ,  $x_0 = -1$ .
- 5.17.  $y = 4x - x^2 + (x - 2)\sin(x - 2)$ ,  $x_0 = 2$ .
- 5.18.  $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$ ,  $x_0 = 0$ .
- 5.19.  $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}$ ,  $x_0 = 2$ .
- 5.20.  $y = \sin^2(x + 2) - x^2 - 4x - 4$ ,  $x_0 = -2$ .
- 5.21.  $y = \cos^2(x - 1) + x^2 - 2x$ ,  $x_0 = 1$ .
- 5.22.  $y = x^2 - 2x - (x - 1)\ln x$ ,  $x_0 = 1$ .
- 5.23.  $y = (x - 1)\sin(x - 1) + 2x - x^2$ ,  $x_0 = 1$ .
- 5.24.  $y = x^2 - 4x + \cos^2(x - 2)$ ,  $x_0 = 2$ .
- 5.25.  $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x)$ ,  $x_0 = 0$ .
- 5.26.  $y = \sin^2(x - 2) - x^2 + 4x - 4$ ,  $x_0 = 2$ .
- 5.27.  $y = 6e^{x+1} - x^3 - 6x^2 - 15x - 16$ ,  $x_0 = -1$ .
- 5.28.  $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x$ ,  $x_0 = 0$ .
- 5.29.  $y = \sin^2(x - 1) - x^2 + 2x$ ,  $x_0 = 1$ .
- 5.30.  $y = \cos x + \operatorname{ch} x$ ,  $x_0 = 0$ .
- 5.31.  $y = x^2 - 2e^{x-1}$ ,  $x_0 = 1$ .

**Задача 6.** Найти асимптоты и построить графики функций.

- 6.1.  $y = (17 - x^2)/(4x - 5)$ .
- 6.2.  $y = (x^2 + 1)/\sqrt{4x^2 - 3}$ .
- 6.3.  $y = (x^3 - 4x)/(3x^2 - 4)$ .
- 6.4.  $y = (4x^2 + 9)/(4x + 8)$ .
- 6.5.  $y = (4x^3 + 3x^2 - 8x - 2)/(2 - 3x^2)$ .
- 6.6.  $y = (x^2 - 3)/\sqrt{3x^2 - 2}$ .
- 6.7.  $y = (2x^2 - 6)/(x - 2)$ .
- 6.8.  $y = (2x^3 + 2x^2 - 3x - 1)/(2 - 4x^2)$ .
- 6.9.  $y = (x^3 - 5x)/(5 - 3x^2)$ .
- 6.10.  $y = (x^2 - 6x + 4)/(3x - 2)$ .



6.11.  $y = (2 - x^2) / \sqrt{9x^2 - 4}$ .

6.12.  $y = (4x^3 - 3x) / (4x^2 - 1)$ .

6.13.  $y = (3x^2 - 7) / (2x + 1)$ .

6.14.  $y = (x^2 + 16) / \sqrt{9x^2 - 8}$ .

6.15.  $y = (x^3 + 3x^2 - 2x - 2) / (2 - 3x^2)$ .

6.16.  $y = (21 - x^2) / (7x + 9)$ .

6.17.  $y = (2x^2 - 1) / \sqrt{x^2 - 2}$ .

6.18.  $y = (2x^3 - 3x^2 - 2x + 1) / (1 - 3x^2)$ .

6.19.  $y = (x^2 - 11) / (4x - 3)$ .

6.20.  $y = (2x^2 - 9) / \sqrt{x^2 - 1}$ .

6.21.  $y = (x^3 - 2x^2 - 3x + 2) / (1 - x^2)$ .

6.22.  $y = (x^2 + 2x - 1) / (2x + 1)$ .

6.23.  $y = (x^3 + x^2 - 3x - 1) / (2x^2 - 2)$ .

6.24.  $y = (x^2 + 6x + 9) / (x + 4)$ .

6.25.  $y = (3x^2 - 10) / \sqrt{4x^2 - 1}$ .

6.26.  $y = (x^2 - 2x + 2) / (x + 3)$ .

6.27.  $y = (2x^3 + 2x^2 - 9x - 3) / (2x^2 - 3)$ .

6.28.  $y = (3x^2 - 10) / (3 - 2x)$ .

6.29.  $y = (-x^2 - 4x + 13) / (4x + 3)$ .

6.30.  $y = (-8 - x^2) / \sqrt{x^2 - 4}$ .

6.31.  $y = (9 - 10x^2) / \sqrt{4x^2 - 1}$ .

**Задача 7.** Провести полное исследование функций и построить их графики.

7.1.  $y = (x^3 + 4) / x^2$ .

7.2.  $y = (x^2 - x + 1) / (x - 1)$ .

7.3.  $y = 2 / (x^2 + 2x)$ .

7.4.  $y = 4x^2 / (3 + x^2)$ .

7.5.  $y = 12x / (9 + x^2)$ .

7.6.  $y = (x^2 - 3x + 3) / (x - 1)$ .

7.7.  $y = (4 - x^3) / x^2$ .

7.8.  $y = (x^2 - 4x + 1) / (x - 4)$ .

7.9.  $y = (2x^3 + 1) / x^2$ .

7.10.  $y = (x - 1)^2 / x^2$ .

7.11.  $y = x^2 / (x - 1)^2$ .

7.12.  $y = (1 + 1/x)^2$ .

7.13.  $y = (12 - 3x^2) / (x^2 + 12)$ .

7.14.  $y = (9 + 6x - 3x^2) / (x^2 - 2x + 13)$ .

7.15.  $y = -8x / (x^2 + 4)$ .

7.16.  $y = ((x - 1) / (x + 1))^2$ .

7.17.  $y = (3x^4 + 1)/x^3.$

7.18.  $y = 4x/(x+1)^2.$

7.19.  $y = 8(x-1)/(x+1)^2.$

7.20.  $y = (1 - 2x^3)/x^2.$

7.21.  $y = 4/(x^2 + 2x - 3).$

7.22.  $y = 4/(3 + 2x - x^2).$

7.23.  $y = (x^2 + 2x - 7)/(x^2 + 2x - 3).$

7.24.  $y = 1/(x^4 - 1).$

7.25.  $y = -(x/(x+2))^2.$

7.26.  $y = (x^3 - 32)/x^2.$

7.27.  $y = 4(x+1)^2/(x^2 + 2x + 4).$

7.28.  $y = (3x - 2)/x^3.$

7.29.  $y = (x^2 - 6x + 9)/(x - 1)^2.$

7.30.  $y = (x^3 - 27x + 54)/x^3.$

7.31.  $y = (x^3 - 4)/x^2.$

**Задача 8.** Провести полное исследование функций и построить их графики.

8.1.  $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}.$

8.2.  $y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$

8.3.  $y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1.$

8.4.  $y = (3 - x)e^{x-2}.$

8.5.  $y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$

8.6.  $y = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$

8.7.  $y = (x - 2)e^{3-x}.$

8.8.  $y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$

8.9.  $y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}.$

8.10.  $y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}.$

8.11.  $y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$

8.12.  $y = \ln \frac{x}{x-2} - 2.$

8.13.  $y = (2x + 5)e^{-2(x+2)}.$

8.14.  $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$

8.15.  $y = 2 \ln \frac{x}{x+1} - 1.$

8.16.  $y = (4 - x)e^{x-3}.$

8.17.  $y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$

8.18.  $y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3.$

8.19.  $y = (2x-1)e^{2(1-x)}.$

8.20.  $y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}.$

8.21.  $y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3.$

8.22.  $y = -(x+1)e^{x+2}.$

8.23.  $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}.$

8.24.  $y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$

8.25.  $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}.$

8.26.  $y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}.$

8.27.  $y = \ln \frac{x-5}{x} + 2.$

8.28.  $y = (x+4)e^{-(x+3)}.$

8.29.  $y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$

8.30.  $y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$

8.31.  $y = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1.$

**Задача 9.** Провести полное исследование функций и построить их графики.

9.1.  $y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}.$

9.2.  $y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}.$

9.3.  $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}.$

9.4.  $y = \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}.$

9.5.  $y = \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}.$

9.6.  $y = \sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}.$

9.7.  $y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}.$

9.8.  $y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}.$

9.9.  $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}.$

9.10.  $y = \sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}.$

9.11.  $y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}.$

9.12.  $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}.$

9.13.  $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}.$

9.14.  $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}.$

9.15.  $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$ .

9.16.  $y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}$ .

9.17.  $y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$ .

9.18.  $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ .

9.19.  $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$ .

9.20.  $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$ .

9.21.  $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$ .

9.22.  $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$ .

9.23.  $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$ .

9.24.  $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ .

9.25.  $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$ .

9.26.  $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$ .

9.27.  $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$ .

9.28.  $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$ .

9.29.  $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$ .

9.30.  $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$ .

9.31.  $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ .

**Задача 10.** Провести полное исследование функций и построить их графики.

10.1.  $y = e^{\sin x + \cos x}$ .

10.2.  $y = \arctg \left[ (\sin x + \cos x) / \sqrt{2} \right]$ .

10.3.  $y = \ln(\sin x + \cos x)$ .

10.4.  $y = 1/(\sin x + \cos x)$ .

10.5.  $y = e^{\sqrt{2} \sin x}$ .

10.6.  $y = \arctg(\sin x)$ .

10.7.  $y = \ln(\sqrt{2} \sin x)$ .

10.8.  $y = 1/(\sin x - \cos x)$ .

10.9.  $y = e^{\sin x - \cos x}$ .

10.10.  $y = \arctg \left[ (\sin x - \cos x) / \sqrt{2} \right]$ .

10.11.  $y = \ln(\sin x - \cos x)$ .

10.12.  $y = 1/(\sin x + \cos x)^2$ .

10.13.  $y = e^{-\sqrt{2} \cos x}$ .

10.14.  $y = -\arctg(\cos x)$ .

10.15.  $y = \ln(-\sqrt{2} \cos x)$ .

10.16.  $y = 1/(\sin x - \cos x)^2$ .

10.17.  $y = e^{-\sin x - \cos x}$ .

10.18.  $y = \sqrt[3]{\sin x}$ .

10.19.  $y = \ln(-\sin x - \cos x)$ .

10.20.  $y = \sqrt{(\sin x - \cos x) / \sqrt{2}}$ .

$$10.21. y = e^{-\sqrt{2}\sin x}.$$

$$10.23. y = \ln(-\sqrt{2}\sin x).$$

$$10.25. y = e^{\cos x - \sin x}.$$

$$10.27. y = \ln(\cos x - \sin x).$$

$$10.29. y = e^{\sqrt{2}\cos x}.$$

$$10.31. y = \ln(\sqrt{2}\cos x).$$

$$10.22. y = \sqrt[3]{\cos x}.$$

$$10.24. y = \sqrt{\cos x}.$$

$$10.26. y = \sqrt[3]{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}.$$

$$10.28. y = \sqrt{\sin x}.$$

$$10.30. y = \sqrt{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}.$$