Однородные системы

Определение Однородной называется система $AX = 0$.

Однородная система всегда **совместна**, что вытекает из теоремы Кронекера- Капелли: RgA=Rg A' . n-мерный вектор 0=(0,0,…,0) является решением (тривиальное решение). Если RgA=Rg A'=n, то нулевое решение является единственным.

Однородная система имеет нетривиальное решение, когда RgA=Rg $A' \prec$ n. Тогда, как обычно для случая бесконечного множества решений, решаем систему методом Гаусса. Для случая m = n для наличия ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы detA=0.

Найдем **базис** и **размерность** подпространства решений однородной системы:

Размерность равна $s = n - r$. Вводим r базисных, n-r - свободных переменных. Решаем систему относительно базисных переменных, выражаем их через свободные переменные. Свободные переменные будем обозначать: $x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, x_n = C_{n-r} = C_s$. Общее решение запишется:

$$\vec{X}(C_1, C_2, \ldots\ldots, C_s) = \begin{pmatrix} x_1(C_1, C_2, \ldots\ldots, C_s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r(C_1, C_2, \ldots\ldots, C_s) \\ C_1 \\ \ldots\ldots \\ C_s \end{pmatrix}$$

Найдем базисные векторы в подпространстве решений однородной системы следующим образом:

$$C_1 = 1, C_2 = 0, \ldots\ldots, C_s = 0 \to \vec{X}(1, 0, \ldots, 0) = \vec{X}_1$$

$$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0, \ldots\ldots, C_s = 0 \to \vec{X}(0, 1, 0, \ldots, 0) = \vec{X}_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots\ldots, C_s = 1 \to \vec{X}(0, 0, \ldots, 0, 1) = \vec{X}_s$$

Мы получили линейно независимую систему векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_s$, которая образует базис в подпространстве решений однородной системы и называется фундаментальной системой решений. (линейно независимые, потому что rang ($\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_s$) равен рангу системы единичных векторов, т.к. первые строки, где базисные переменные, есть линейные комбинации строк, где свободные переменные). Тогда любое решение можно представить в виде: $\vec{X} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_s X_s$.

Пример:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 & 0 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 & 0 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r = 2$$

Получаем укороченную систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ \quad 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \qquad r = 2, n = 5; s = 5 - 2 = 3, \quad x_1, x_2 - \textit{базисные}$$

$$x_3 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3 - \textit{свободные. Общее решение}:$$

$$\vec{X}(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} 19C_1/8 + 3C_2/8 - C_3/2 \\ 7C_1/8 - 25C_2/8 + C_3/2 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{X}_2 = \vec{X}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{X}_3 = \vec{X}(0,0,1) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = C_1\vec{X}_1 + C_2\vec{X}_2 + C_3\vec{X}_3.$$

Проведем параллель тех результатов, которые мы получили для неоднородной системы (1) и однородной системы (2). Пусть m=n.

Если определитель системы не равен 0, то система (1) имеет единственное решение, а система (2) - только нулевое.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases} \quad r(A) = r(A') = 2 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1, x_2 - \textit{базисные} \\ x_3 = C_1, x_4 = C_2 - \textit{свободные} \end{array}$$

Общее решение неоднородной $(6 - 3C_1/2 - C_2; 2 - C_1/2 - 2C_2; C_1; C_2)$.

Общее решение соответствующей однородной $(-3C_1/2 - C_2; -C_1/2 - 2C_2; C_1; C_2)$.

Фундаментальная система $\vec{X}_1 = (-3/2; -1/2; 1; 0), \vec{X}_2 = (-1; -2; 0; 1)$, тогда общее решение однородной можно записать $\vec{X}_{однор} = C_1(-3/2; -1/2; 1; 0) + C_2(-1; -2; 0; 1)$. Найдем какое-либо частное решение неоднородной системы(например, при $C_1 = 0, C_2 = 0$) $\vec{X}_{частное} = (6; 2; 0; 0)$, тогда

$$\vec{X} = \vec{X}_{частное} + C_1\vec{X}_1 + C_2\vec{X}_2 = (6; 2; 0; 0) + C_1(-3/2; -1/2; 1; 0) + C_2(-1; -2; 0; 1)$$

Скалярные и векторные величины. Линейные операции над векторами

Величины, определяемые не только числовым значением, но и направлением, называются **векторными** величинами и для их характеристики служат векторы.
Вектор - характеристика векторной величины.

Вектор - это направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой А и с конечной точкой В, который можно передвигать параллельно самому себе.

Различают три вида векторов.

Связанный вектор - вектор, у которого заданы: линия действия, направление на этой линии , начало вектора и его длина.

Скользящий вектор – то же, что у связанного вектора, только нет требования о закреплении начала вектора.

Свободный вектор – определяется положительным направлением линии действия и длиной.

Итак, в аналитической геометрии мы имеем дело со свободными векторами.
Обычно вектор обозначается строчной буквой с чертой $\bar{a}$ либо буква выделяется жирным шрифтом $\boldsymbol{a}$, или же двумя заглавными буквами, обозначающими начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$.

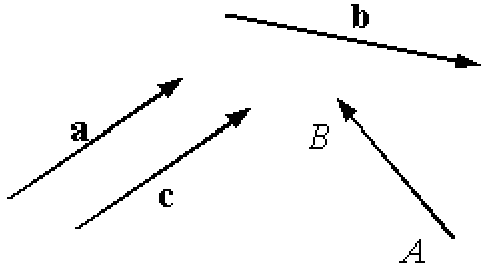


Рис.1 Изображение векторов

Длина(модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$ - неотрицательное число, равное длине отрезка AB: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Компланарные векторы - векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым** и обозначается $\boldsymbol{o}$.

Длина такого вектора равна нулю, направления он не имеет. Все нулевые векторы равны друг другу. Так как нулевой вектор лежит на любой прямой, то, по определению, он считается коллинеарным любому вектору и перпендикулярным любому вектору.

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют равные длины.

Единичный вектор - вектор, длина которого равна единице.

Для любого вектора существует противоположный вектор $(-\vec{a})$ такой, что: $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейные операции над векторами

<u>**Определение**</u> **Линейными операциями** над векторами называется сложение, вычитание и умножение на число.

Суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\boldsymbol{a}$, а конец - с концом вектора $\boldsymbol{b}$. Этот способ построения суммы векторов называется **правилом треугольника** (Рис. 2).

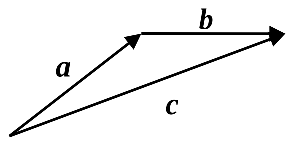


Рис. 2

Если на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, как на сторонах, построить параллелограмм, то большая диагональ параллелограмма будет суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Этот способ построения суммы векторов называется **правилом параллелограмма** (Рис.3).

Разностью двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
На рис. 3 вектор $-\boldsymbol{b}$ изображен пунктиром. Сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}$ также изображена пунктиром. Легко видеть, что $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ есть меньшая диагональ параллелограмма.
Общее правило сложения любого числа векторов (правило многоугольника) показано на Рис.4

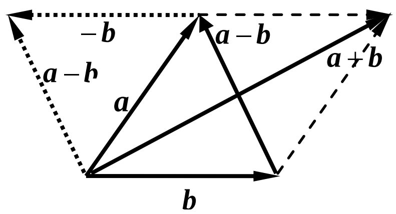


Рис. 3

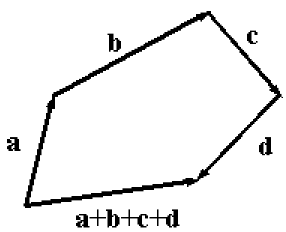
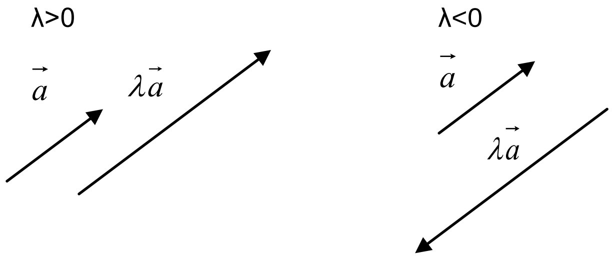


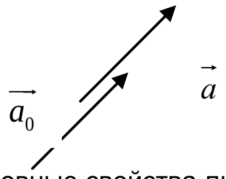
Рис. 4

Произведением числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ называется вектор $\boldsymbol{b}$, имеющий длину $|\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. Направление вектора $\boldsymbol{b}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно по направлению, если $\lambda<0$.



Всякий ненулевой вектор можно представить как $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0$, где $\vec{a}_{\,0}=орт\vec{a}$. $\vec{a}_0\uparrow\uparrow\vec{a}, |\vec{a}_0|=1.$

$\vec{a}_0=\vec{a}\;/|\vec{a}|$



Укажем основные свойства линейных операций над векторами.

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - коммутативность.
2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4) $\vec{a}+(-1)\vec{a}=\vec{0}$
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ - дистрибутивность
7) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Применяя линейные операции, можно составлять линейные комбинации $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\ldots$.

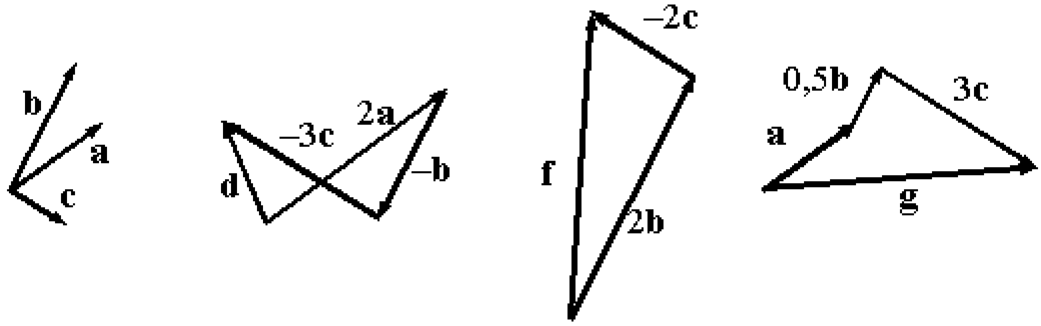


Рис.5

Векторы **d**,**f**,**g** на Рис.5 и $\vec{h}=0$ являются линейными комбинациями векторов **a**,**b**,**c**:

$$\vec{d}=2\vec{a}+(-1)\vec{b}+(-3)\vec{c},\; f=0\cdot\vec{a}+2\vec{b}+(-2)\vec{c},\; \vec{g}=1\cdot\vec{a}+0.5\vec{b}+3\vec{c},\; \vec{h}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\;,\,,\,,.$$

Свойства линейных операций позволяют преобразовывать векторные выражения по обычным правилам алгебры: можно раскрывать скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенств с противоположным знаком.

Проекции вектора на ось

Пусть в пространстве задана некоторая ось l, то есть прямая, на которой отмечена фиксированная точка O и заданы направление и единица длины. Тогда каждой точке оси соответствует некоторое число. Спроецируем точки A и B на ось l (проекцией т.А на прямую l называется точка, в которой пересекается прямая l с плоскостью, перпендикулярной к l и проходящей через A – ортогональная проекция).

<u>**Определение**</u> **Проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется разность проекций конца вектора и его начала.

Проекцию будем обозначать $пр_l\overrightarrow{AB}$. На Рис. $пр_l\overrightarrow{AB}=\beta-\alpha$.

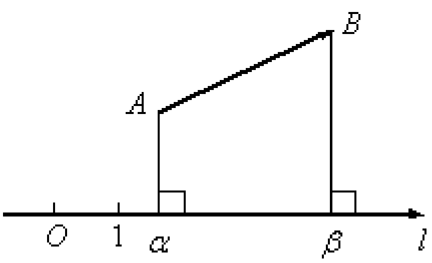


Рис.6.

Легко проверить, что если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $np_l\overrightarrow{AB}=np_l\overrightarrow{CD}$, то есть проекция не зависит от положения начала вектора, а зависит только от самого вектора.

Утверждение Пусть φ -- угол, образованный вектором **a** с осью *l.* Тогда $np_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$.

Доказательство*.* Пусть угол φ -- острый. Тогда в соответствии с рис. 7 получим $\beta-\alpha=|\vec{a}|\cos\varphi$.

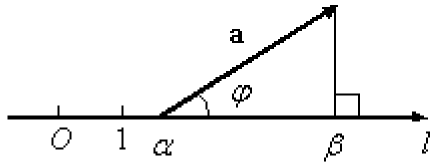


Рис.7

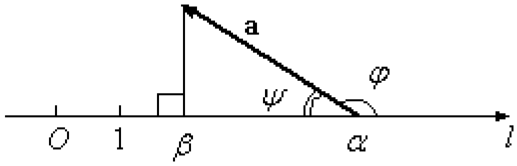


Рис. 8

Если угол φ тупой, то в соответствии с Рис.8 находим $\alpha-\beta=-|\vec{a}|\cos\psi$, откуда $\beta-\alpha=|\vec{a}|\cos\varphi$.

<u>**Определение**</u> **Проекцией вектора b на вектор a**, **a** $\neq 0$, будем называть проекцию вектора **b** на любую ось, параллельную вектору **a** и имеющую направление, совпадающее с направлением вектора **a.**

Проекция вектора **b** на вектор а обозначается $np_{\vec{a}}\vec{b}$. Очевидно, что $np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$, где φ -- угол между векторами **a** и **b.**

Утверждение Проекция на ось суммы векторов равна сумме их проекций $np_{\vec{a}}\vec{b}+np_{\vec{a}}\vec{c}=np_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})$.

Утверждение Проекция на ось вектора, умноженного на число, равна произведению проекции вектора на это число $np_{\vec{a}}(\alpha\vec{b})=\alpha np_{\vec{a}}\vec{b}$.

Линейная зависимость векторов. Разложение вектора по базису

<u>**Определение.**</u> Векторы $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая их линейная комбинация, что $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n=0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\neq 0$. Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n=0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1 Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2 Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3 Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4 Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5 Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6 Любые 4 вектора линейно зависимы.

Свойство 7 Нулевой вектор коллинеарен всякому вектору.

Свойство 8 Если несколько векторов коллинеарны между собой, то они и компланарны между собой.

Свойство 9 Всякие два вектора между собой компланарны.

Определение. Векторное пространство называется *n-мерным*, если среди множества его векторов найдутся *n* линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов уже окажутся зависимыми. Число n называется *размерностью* векторного пространства.

Определение Множество векторов на прямой назовем одномерным векторным пространством, множество векторов на плоскости -- двумерным векторным пространством, в пространстве -- трехмерным векторным пространством.

Будем говорить, что ***вектор* а *раскладывается по векторам*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, если **а** является линейной комбинацией этих векторов.

Предложение Если $\vec{a} \neq 0$, то любой вектор $\vec{b}$, коллинеарный $\vec{a}$, представим и причем единственным образом в виде $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, где λ -- число.

Предложение Пусть **a** и **b** два неколлинеарных вектора. Тогда любой вектор **c**, компланарный с векторами **a** и **b**, раскладывается по ним, причем единственным образом.

Предложение Пусть **a**,**b** и **c** -- некомпланарные векторы. Тогда любой вектор **d** раскладывается по этим векторам.

Определение. Упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства называется **базисом** этого пространства.

Определение Базисом векторного пространства будем называть упорядоченную систему векторов пространства, состоящую: из одного ненулевого вектора, если пространство одномерное; из двух неколлинеарных векторов, если пространство двумерное; из трех некомпланарных векторов, если пространство трехмерное.
Очевидно, что в любом векторном пространстве можно выбрать бесконечно много базисов, число векторов в каждом из них равно размерности пространства.
Слова "упорядоченная система векторов" означают, что указан порядок перечисления векторов.

Определение **Координатами (или компонентами) вектора а** в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ называются коэффициенты разложения вектора **а** по векторам базиса: $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n$.
Для указания, что вектор **а** имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, мы будем использовать запись $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Теорема Разложение вектора по данному базису единственно

Следствие Равные векторы имеют одинаковые координаты.

Теорема При сложении векторов складываются их соответствующие координаты:
Если $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\vec{b}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$.

Прямоугольная декартовая система координат

Рассмотрим случай трехмерного пространства (на плоскости все построения аналогичны). Фиксируем некоторую точку О и возьмем произвольную точку М. **Радиус-вектором** точки М по отношению к точке О называется вектор $\overrightarrow{OM}$. Если в пространстве выбран базис(например, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), то вектор $\overrightarrow{OM}$ раскладывается по этому базису. Таким образом точке М можно сопоставить упорядоченную тройку чисел -- координаты ее радиус-вектора.

Определение **Декартовой (аффинной) системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка О носит название **начала координат**; прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются **осями координат**. Первая -- осью **абсцисс,** вторая -- осью **ординат**, третья -- осью **аппликат**. Плоскости, проходящие через оси координат, называют **координатными плоскостями**.

Определение Координаты радиус-вектора точки М по отношению к началу координат называются **координатами** точки М в рассматриваемой системе координат.
Первая координата называется **абсциссой**, вторая -- **ординатой**, третья -- **аппликатой.**

Аналогично определяются декартовы координаты на плоскости. Разумеется, точка на плоскости имеет только две координаты -- абсциссу и ординату. Координаты точки обычно пишут в скобках после буквы, обозначающей точку, например A(1;2;-3).

Среди аффинных систем координат наибольшее применение находит декартовая прямоугольная система координат.

Определение Базис, образованный единичными попарно ортогональными векторами, называют **ортонормированным.**

Определение Декартова система координат , базис которой ортонормирован, называется **декартовой прямоугольной** системой координат. В дальнейшем мы будем использовать лишь декартову прямоугольную систему координат и для краткости будем называть ее просто "система координат".
Единичные попарно ортогональные векторы базиса принято, как правило, обозначать **i**, **j**, **k:**
i $\perp$ **j**, **i** $\perp$ **k, k** $\perp$ **j**, $|i|=|j|=|k|=1$

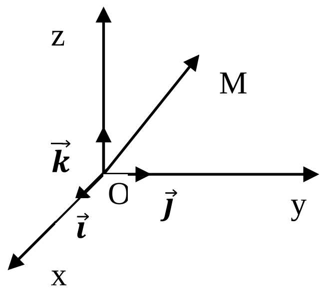


Рис. 9

На Рис.10 показаны два способа изображения точки A(-1;2;3) по ее координатам.

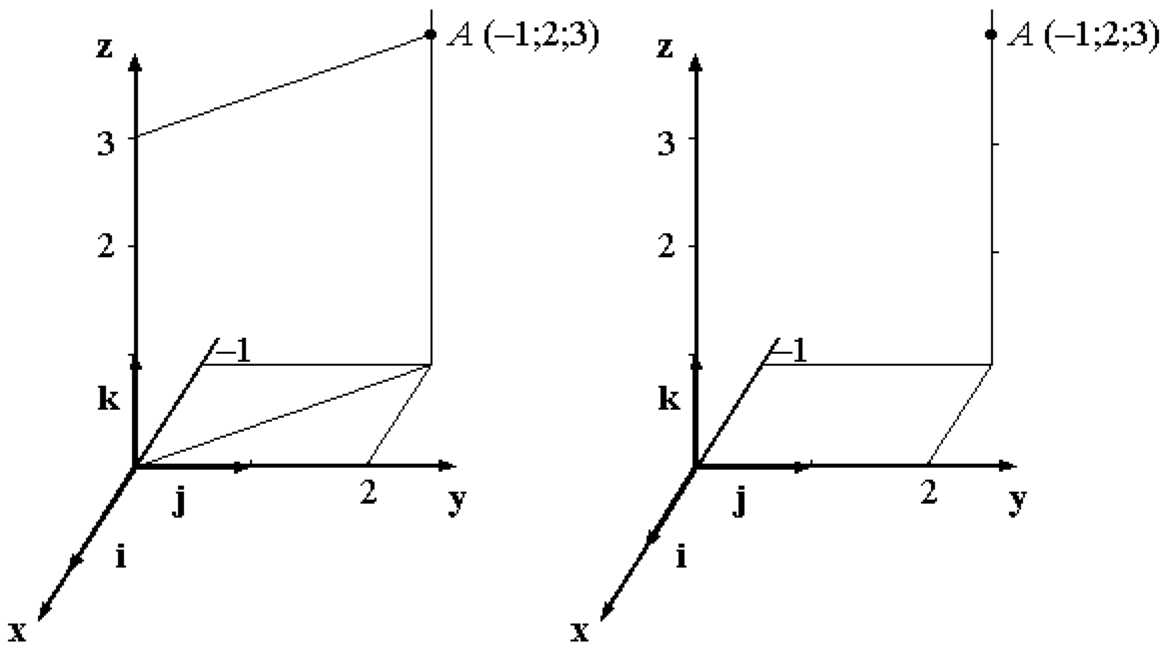


Рис.10

Так как точку пространства мы вынуждены изображать на плоскости, то, пока не указаны линии, связывающие изображение точки с осями координат, установить ее положение в пространстве невозможно! Это показывает Рис. 11

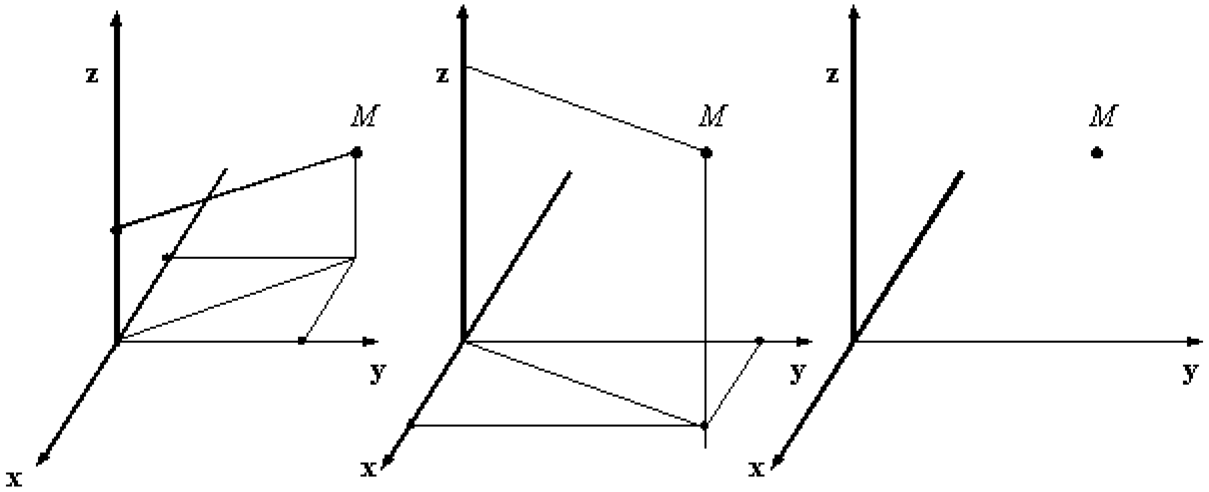
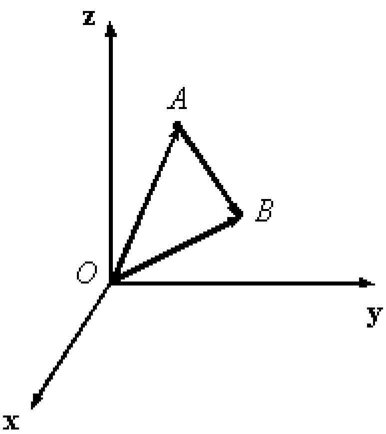


Рис.11



Зная координаты начала и координаты конца вектора, можно определить координаты самого вектора. Если точки заданы своими координатами $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\, B(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, то $\overrightarrow{AB}=(\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\alpha_3-\beta_3)$.

Действительно: очевидно соотношение $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ (рис. 12), откуда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Так как, по определению, координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора, то $\overrightarrow{OB}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),\, \overrightarrow{OA}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,.

Тогда получим. $\overrightarrow{AB}=(\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\alpha_3-\beta_3)$. Это можно сформулировать так: чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Рис.12

Произвольный вектор может быть разложен по базисным векторам: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, где

$a_x=np_{ox}\vec{a}, a_y=np_{oy}\vec{a}, a_z=np_{oz}\vec{a}$, т.е проекции вектора на координатные оси равны координатам вектора.

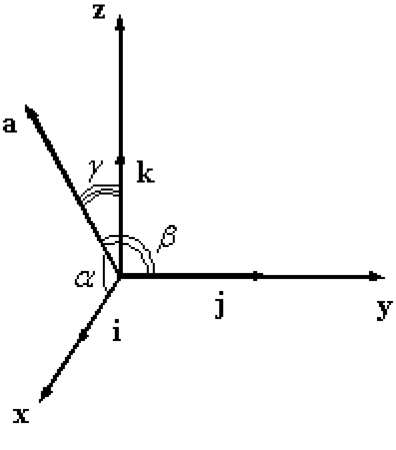
Например: $\vec{a}(3,-2,4)=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

Если $\vec{a}(a_x,a_y,a_z), \vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, то $|\vec{a}|=\sqrt{a^2{}_x+a^2{}_y+a^2{}_z}$, $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$,

$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$.

Направляющие косинусы

<u>**Определение**</u> Косинусы углов, образованных вектором с осями координат, называются **направляющими косинусами вектора:** $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$.



$$\cos\alpha=a_x/|\vec{a}|,\quad \cos\beta=a_y/|\vec{a}|,\quad \cos\gamma=a_z/|\vec{a}|;$$

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\vec{a}|\cos\gamma.$$

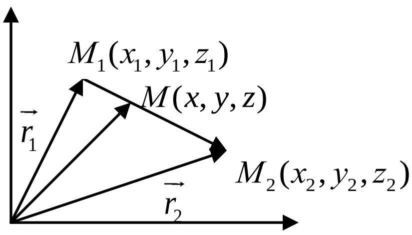
Если вектор единичный, то его координатами служат направляющие косинусы. Возведем в квадрат все три соотношения и сложим:

$$a^2{}_x+a^2{}_y+a^2{}_z=|\vec{a}|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma),$$ отсюда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Рис. 13

Деление отрезка в заданном отношении



Пусть заданы две точки $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ ($M_1 \neq M_2$). Требуется разделить отрезок M_1M_2 в заданном отношении, т.е. найти координаты т. M(x,y,z) отрезка M_1M_2 такой, что $M_1M / MM_2 = \lambda$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M\,M_2}$. Они лежат на одной прямой, т.е. коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M\,M_2}$. Выразим координаты т.M через координаты т. M_1 и т. M_2: $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{M\,M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, отсюда $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1+\lambda}$ или

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Например, точки C и D делят отрезок AB на три равные части, тогда для нахождения координат точки C следует использовать λ =1/2, а для точки D - λ =2. В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как (λ =1) : x = $(x_1 + x_2)/2$; y = $(y_1 + y_2)/2$; z = $(z_1 + z_2)/2$.

Скалярное произведение векторов

<u>Определение</u> Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

Можно по-другому определить скалярное произведение: скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть произведение длины вектора $\vec{b}$ на числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{b}$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\, np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\, np_{\vec{b}}\vec{a}.$$ Отсюда $np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$ или $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

<u>Свойства</u> скалярного произведения:

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ - скалярный квадрат;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ (условие ортогональности векторов) или $\vec{a}$ = 0 или $\vec{b}$ = 0.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

Эти свойства позволяют при скалярном произведении векторных многочленов выполнять действия аналогично выполнению действий над алгебраическими многочленами, например:

$$(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3|\vec{a}|^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 2|\vec{b}|^2.$$

Таблица скалярных произведений координатных ортов(базисных векторов, ортонормированный базис):

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Если рассматривать векторы $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$; $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z;$$

Следствие: если $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, то его длина $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$; $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2} +$

$+ 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336$.

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$\vec{a}$ = (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, -3, -4)

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1$.

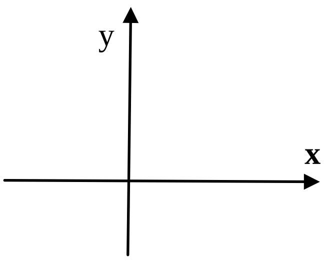
Пример применения скалярного произведения из физики: если тело под действием силы $\vec{F}$ передвигается прямолинейно вдоль вектора $\vec{l}$, то работа, выполненная этой силой равна

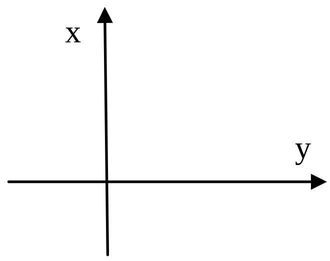
$A = |\vec{F}||\vec{l}|\cos\left(\widehat{\vec{F},\vec{l}}\right) = \vec{F}\cdot\vec{l}$.

Пример: даны три вершины треугольника – найти длины сторон и угол.

Векторное произведение векторов

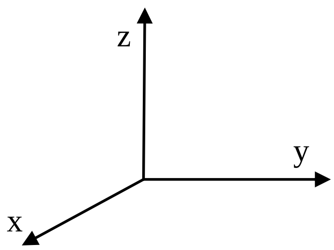
Ориентация системы координат

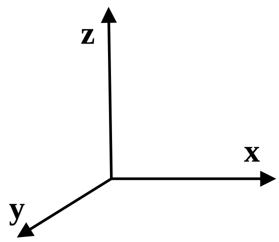




Рассмотрим две системы координат на плоскости . Невозможно первую систему, передвигая её в плоскости как целое, совместить со второй так, чтобы направления соответствующих осей совпали.

Аналогично в пространстве:





Говорят, что эти системы координат ориентированы **противоположно**.

Пусть в пространстве выбран ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.Наложим на этот базис еще одно дополнительное условие, а именно: из конца вектора k поворот от i к j по кратчайшему направлению должен быть виден против часовой стрелки.

Определение Упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ будем называть **правой тройкой векторов**, если из конца третьего вектора $\vec{a}_3$ поворот от первого вектора $\vec{a}_1$ ко второму вектору $\vec{a}_2$ по кратчайшему направлению виден против часовой стрелки. Если поворот виден по часовой стрелке, то тройку называют **левой тройкой векторов**.

Оказывается, если векторы правой тройки изменять непрерывно, но так, чтобы в любой момент времени они были не компланарны, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет правой тройкой. Аналогичным свойством обладает и левая тройка векторов.

Отметим также, что определение векторного произведения и правой (левой) тройки векторов связаны с наличием в пространстве "физических" объектов: часов, человека и т. п. В абстрактном векторном пространстве, где такие объекты отсутствуют, определить, какая тройка -- правая, а какая -- левая, невозможно. Можно только все некомпланарные тройки векторов разбить на два класса такие, что при непрерывной деформации тройки одного класса, при которой в любой момент векторы тройки не компланарны, тройка все время остается в своем классе.

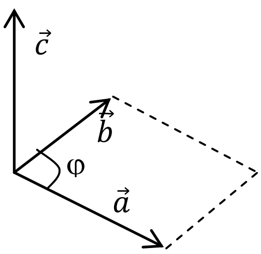
Правило « правой руки» или « правого винта»: если указательный палец направить вдоль оси z, а большой – по оси x, то при вращении от x к y винт с правой нарезкой будет двигаться вдоль положительного направления z.
Итак, пусть в трехмерном пространстве задан ортонормированный базис i, j, k, векторы которого образуют правую тройку векторов. Такой базис будем называть правым.

<u>**Определение**</u> **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$,обозначаемый как $\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a};\ \vec{b}]$ *и* удовлетворяющий следующим условиям:

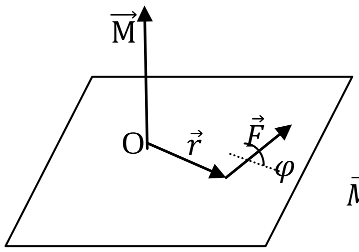
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \ge 0; 0 \le \varphi \le \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

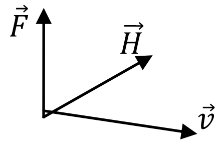
3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.



Примеры из школьного курса физики:



$\vec{M} = [\vec{r};\vec{F}]$



$\vec{F} \sim [\vec{v};\vec{H}]$

момент силы $\vec{F}$ относительно точки O сила, действующая на заряд в магнитном поле

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a}$ = 0 или $\vec{b}$ = 0 (условие коллинеарности);

3) $\vec{a}\times\vec{a} = 0$

4) $(\alpha\,\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\,\vec{b}) = \alpha\,(\vec{a}\times\vec{b})$;

5) $\vec{a}\times(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;

Эти свойства позволяют при векторном перемножении векторных многочленов выполнять действия аналогично выполнению действий над алгебраическими многочленами - с одним лишь отличием: надо сохранять порядок векторных сомножителей, например:

$$[\vec{a}-\vec{b};\vec{a}+\vec{b}] = [\vec{a};\vec{a}] - [\vec{b};a] + [\vec{a};\vec{b}] - [\vec{b};\vec{b}] = 2[\vec{a};\vec{b}].$$

Предложение Векторное произведение не является ассоциативным, то есть существуют такие векторы **a**, **b**, **c**, что $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \ne \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.
Таблица векторных произведений координатных ортов (базисных векторов, ортонормированный базис):

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	-$\vec{j}$
$\vec{j}$	-$\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	-$\vec{i}$	0

Если заданы векторы $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то (с учетом таблицы)

$$[\vec{a};\vec{b}] = [a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}] = (a_yb_z - b_ya_z)\vec{i} + (a_zb_x - b_za_x)\vec{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\vec{k} =$$

$$= \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Геометрический смысл модуля векторного произведения: модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

<u>Пример</u>: Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a}$ = (2, 5, 1); $\vec{b}$ = (1, 2, -3) $\qquad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$.

Пример: Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3),C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2;1-2;0-2) = (-2;-1;-2),\ \overrightarrow{AB} = (4-2;0-2;3-2) = (2;-2;1)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+\vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.\quad \left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.\quad S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

Пример: Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b};\quad 3\vec{a} + \vec{b}$,если

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1;\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = 30^0 : (\vec{a} + 3\vec{b})\times(3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} + 9\vec{b}\times\vec{a} + 3\vec{b}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} + 9\vec{b}\times\vec{a} = 8\vec{b}\times\vec{a}$$

$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4.$$

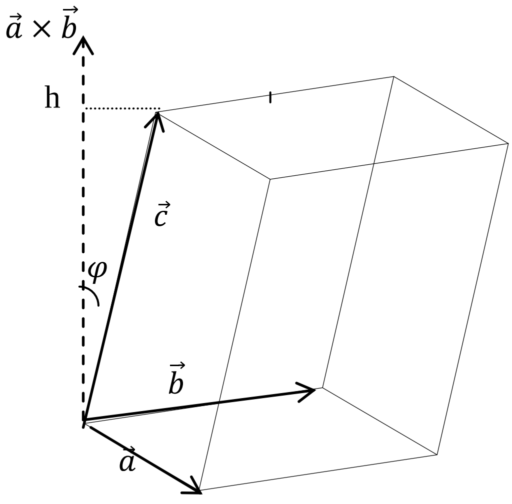
Смешанное произведение векторов

<u>Определение</u> Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $[\vec{a};\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$ и обозначается $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \left[\vec{a};\vec{b}\right]\cdot\vec{c}$.

Геометрический смысл: смешанное произведение трёх векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, приведенных к общему началу, равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если эта тройка векторов правая, и со знаком «-» , если тройка левая :

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V$$

Доказательство: пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку, $|[\vec{a};\vec{b}]| = S$, получается $S\cdot h = V > 0$,



то есть $|[\vec{a};\vec{b}]|\cdot|\vec{c}|\cdot cos\varphi = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
Отсюда объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$.

Свойства смешанного произведения:

1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

2) смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке (это будет один и тот же параллепипед, ориентация сохраняется): $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$
в силу этого свойства мы можем не указывать где векторное произведение, где скалярное

3) в силу предыдущего свойства, смешанное произведение, в котором есть два одинаковых вектора, равно 0 (с помощью циклической перестановки мы их всегда можем поставить рядом в векторном произведении). Также смешанное произведение равно нулю, если: а) хоть один из векторов равен нулю; б) два из векторов коллинеарны; в) векторы компланарны.

4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

Условие компланарности трех векторов: три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

Если $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\quad \vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то $\quad(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$

Пример: Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; 3), C(9; 4;0), D(1; 5; 4) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1),\quad \overrightarrow{AC}=(4;-3;-2),\quad \overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример: Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4),\ \overrightarrow{BD}=(1;4;-3),\ \overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=\frac{1}{6}(22+30+68)=20.$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}$ = $\sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. V = $\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}.$

Двойное векторное произведение: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$.
Разложение вектора $\vec{a}$ по направлению единичного вектора $\vec{u}$, ему перпендикулярного:

$$\vec{a} = \vec{u}(\vec{a}\vec{u}) + \vec{u} \times (\vec{a} \times \vec{u}).$$

Решение уравнения:

$$\begin{cases} \vec{x}\vec{a} = p \\ \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{a}\,\frac{p}{a^2} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \frac{1}{a^2}$$