Лабораторная работа № 4

Приближенное вычисление площади фигуры методом Монте-Карло

Цель: изучение метода Монте-Карло (метода статистических испытаний) на примере вычисления площади фигуры.

Метод Монте-Карло

Методы Монте-Карло или методы статистических испытаний – это группа численных методов, основанных на воспроизведении большого числа реализаций случайного процесса. Таким образом, суть метода заключается в статистическом моделировании случайных процессов, численном моделировании реализаций случайных процессов и оценивании параметров по реализациям случайных процессов методами математической статистики. Под численным статистическим моделированием обычно понимают реализацию с помощью компьютера вероятностной модели некоторого объекта с целью оценивания изучаемых интегральных характеристик на основе закона больших чисел. Свое экзотическое название метод получил от города Монте-Карло (княжество Монако), который известен благодаря своему казино, поскольку именно рулетка является одним из самых широко известных генераторов случайных чисел. Станислав Улам пишет в своей автобиографии «Приключения математика», что название было предложено Николасом Метрополисом в честь его дяди, который был азартным игроком.

Основоположники метода Монте-Карло

Станислав Улам

Николас Метрополис

Джон фон Нейман

Статистическое моделирование широко применяется для решения задач из различных областей человеческого знания. Среди них такие актуальные области как биология, химия, физика, экономика и другие.

К задачам, где широко используется этот подход, можно отнести следующие:

- численное интегрирование,
- расчеты в системах массового обслуживания,
- расчеты качества и надежности изделий,
- расчеты прохождения нейтронов и других частиц через вещество,
- передача сообщений при наличии помех,
- задачи теории игр,
- задачи динамики разреженного газа,
- задачи дискретной оптимизации,
- задачи финансовой математики.

Алгоритм вычисления площади фигуры

Применим метод статических испытаний или метод Монте-Карло к задаче вычисления площади геометрической фигуры на плоскости.

Метод заключается в следующем. Поместим данную фигуру в квадрат и будем наугад бросать точки в этот квадрат. Будем исходить из того, что чем больше площадь фигуры, тем чаще в нее будут попадать точки. Таким образом, при большом числе N точек, наугад выбранных внутри квадрата, доля точек, содержащихся в данной фигуре k, приближенно равна отношению площади этой фигуры и площади квадрата:

Если площадь квадрата равна S_0 и в результате N испытаний, из которых при k исходах случайные точки оказались внутри фигуры, то площадь фигуры S будет определяться выражением

$$S = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{N}} \mathrm{S}_0 \ .$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи на конкретном примере.

Рассмотрим фигуру, представленную на рис. 1а., площадь которой нам заранее известна и равна $S_{\text{т}} = 8{,}38404$. Вообще говоря, фигура может быть любой, но обязательно должны быть известны границы фигуры, в виде аналитического выражения или совокупности таких выражений и логических условий.

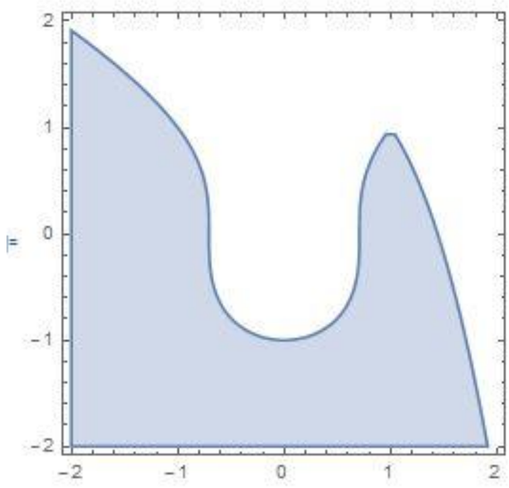


Рис. 1а

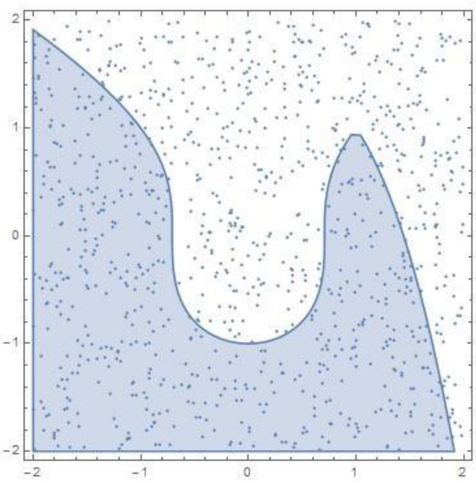


Рис. 1б

В нашем примере множество точек фигуры определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{2x^2} + \boldsymbol{y^3} < -1 \\ \boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{2y} < 3 \\ -\boldsymbol{2} < x < 2 \\ -\boldsymbol{2} < y < 2 \end{cases}$$

Площадь этой фигуры составляет часть прямоугольника площадью $\mathrm{S}_0 = 4 \times 4 = 16$.

1. Генерируем случайные числа x и y равномерно распределенные на отрезке$[-2{,}2]$. Это будут координаты случайной точки в квадрате, в которую заключена фигура, площадь которой требуется найти. Полученная точка может как попасть в исследуемую фигуру, так и не

не попасть (рис. 1б).

2. Проверяем принадлежность точки (x, y) к исследуемой фигуре. Если попадания нет, т.е. не выполняется хотя бы одно из неравенств системы, то переходим к пункту 1 и генерируем координаты новой точки. Если попадание есть, то фиксируем это попадание. Значение счетчика числа попаданий увеличиваем на единицу и снова переходим к пункту 1.

Заметим, что попадание случайной точки точно на границу фигуры можно отнести как к первому, так и ко второму исходу.

Пункты 1 и 2 следует повторить в цикле достаточно большое число N раз. От этого, в конечном итоге, зависит точность вычислений. После проведения N повторов площадь фигуры найдем по формуле:

$$S = S_0 \frac{k}{N} \ .$$

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2.

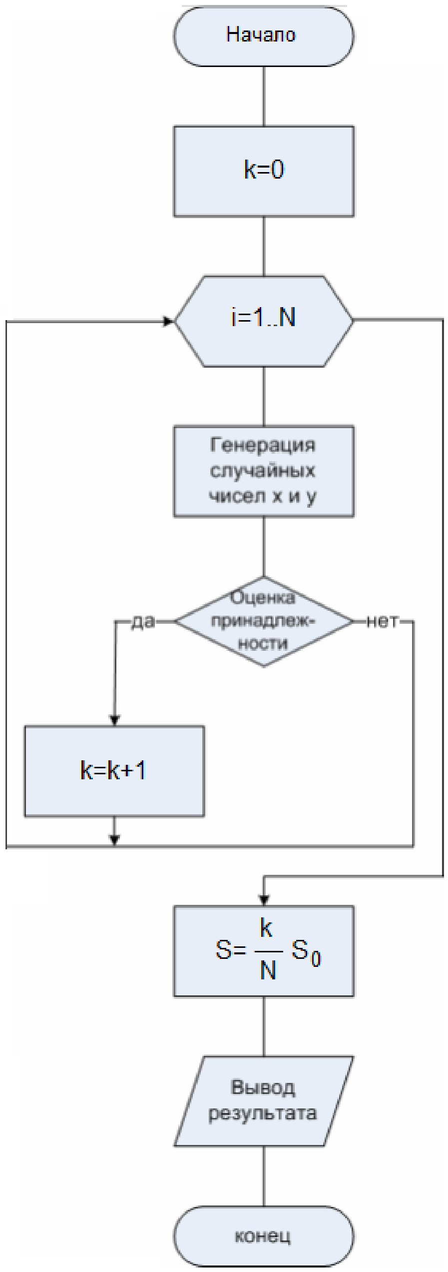


Рис. 2

Пример текста программы на VBA:

```
Function mk(n)
Randomize
s = 0
For i = 1 To n
x = -2 + 4 * Rnd(1)
y = -2 + 4 * Rnd(1)
If (-2 * x ^ 2 + y ^ 3 < -1) And (x ^ 3 + 2 * y < 3) Then k = k + 1
Next
mk = 16 * k / n
End Function
```

Функция mk(n) возвращает значение площади фигуры при заданном числе испытаний n. Условия принадлежности случайной точки фигуре заданы в теле подпрограммы-функции.

На рабочем листе Excel, использую данную функцию, составим таблицу:

N	S	δ
10	4,8	0,427484
100	8,96	0,068697
1000	8,272	0,013363
10000	8,3664	0,002104
100000	8,36512	0,002257
1000000	8,37656	0,000892

В столбцах таблицы приведены соответственно число испытаний, найденная площадь и относительная погрешность метода Монте-Карло

$$\delta = \frac{|S - S_{\text{т}}|}{S_{\text{т}}} \ .$$

Задание 1
Составить и отладить программу определения площади фигуры методом Монте-Карло в соответствии с индивидуальным заданием.

Задание 2
Вычислить методом Монте-Карло определенный интеграл. Сравните результат со значением, полученным аналитическим путем при значениях N=10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000. Выразите относительную погрешность метода Монте-Карло при каждом значении N.

Исходные данные к заданию 1

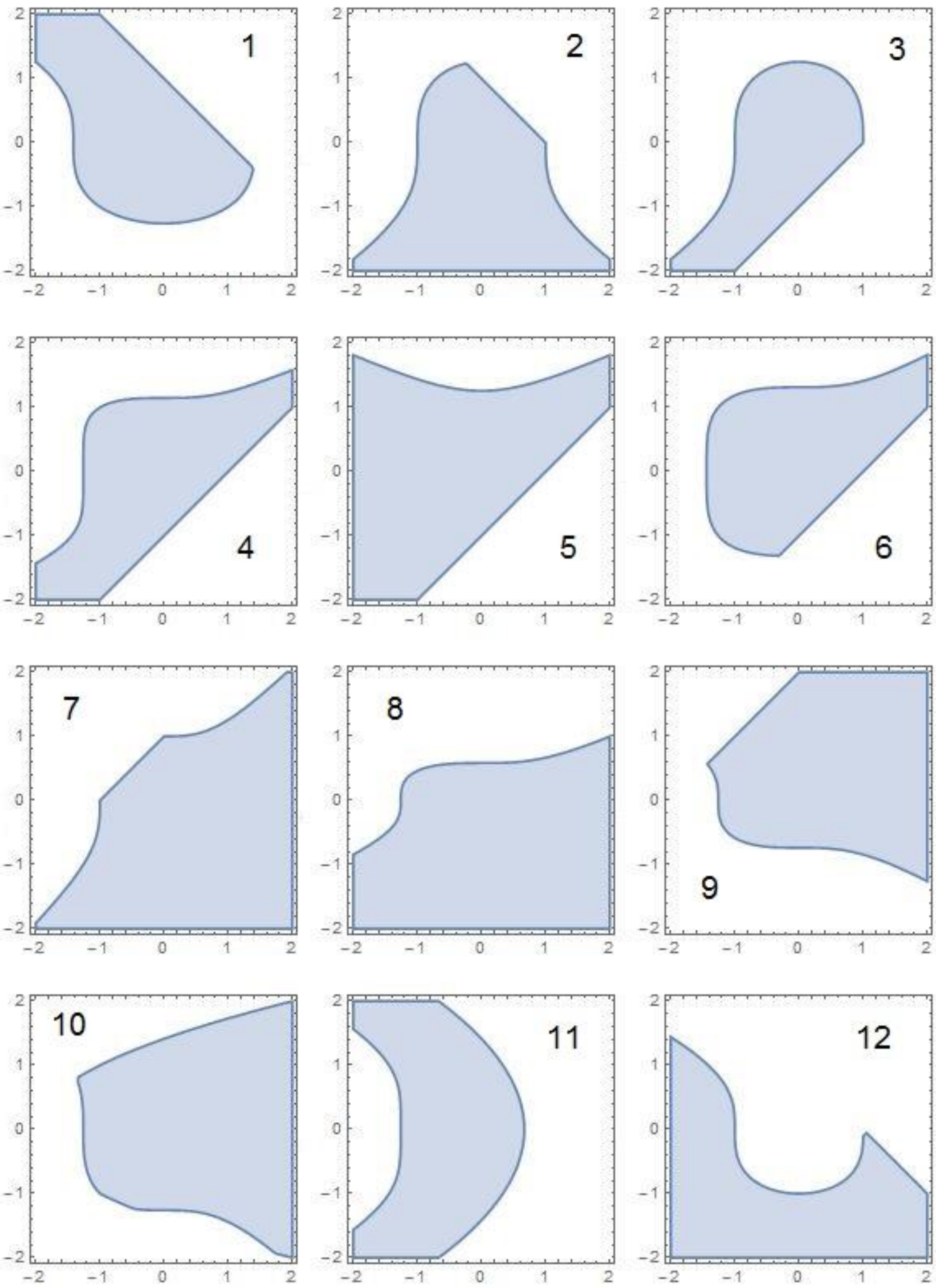
Условия, ограничивающие область фигуры

1. $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - y^3} < 2 \\ \boldsymbol{x + y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \boldsymbol{2x^2 + y^3} < 2 \\ \boldsymbol{x + y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \boldsymbol{2x^2 + y^3} < 2 \\ \boldsymbol{x - y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^3 + y^5} < 2 \\ \boldsymbol{x - y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^2 + y^3} < 2 \\ \boldsymbol{x - y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^3 + y^4} < 3 \\ \boldsymbol{x - y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^3 + y^3} < 1 \\ \boldsymbol{-x + y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
8. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^3 + 10y^3} < 2 \\ \boldsymbol{-x + y} < 2 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
9. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^3 - 5y^3} < 2 \\ \boldsymbol{-x + y} < 2 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^3 - y^3} < 2 \\ \boldsymbol{-x + y^2} < 2 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
11. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^3 - y^4} < 2 \\ \boldsymbol{3x + y^2} < 2 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$
12. $\begin{cases} \boldsymbol{-x^2 + y^3} < -1 \\ \boldsymbol{x + y} < 1 \\ \boldsymbol{-2} < x < 2 \\ \boldsymbol{-2} < y < 2 \end{cases}$

Контрольные значения площадей фигур по вариантам

Вариант	$S_т$
1	6,37517
2	6,94246
3	4,82702
4	6,57343
5	9,39411
6	6,33624
7	9,92969
8	9,64255
9	8,38467
10	9,37331
11	7,13684
12	6,84359

Фигуры, площадь которых необходимо определить методом Монте-Карло



Исходные данные к заданию 2

1	$\int_0^2 x^2 dx$	2	$\int_0^4 \sqrt{x} dx$	3	$\int_0^\pi \sin x\, dx$
4	$\int_0^2 x^3 dx$	5	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$	6	$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$
7	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$	8	$\int_0^1 (1+x)^2 dx$	9	$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$
10	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\, dx$	11	$\int_0^{\pi/4} \cos\, 2x\, dx$	12	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$